

RZUT UKOŚNY Z OPOREM

OPÓR LINIOWY $F = -kv$

Zakładamy ruch ciała o masie m w polu grawitacyjnym Ziemi z przyspieszeniem $\vec{g} = (0, -g)$ (rzut ukośny w płaszczyźnie xy) i pod wpływem siły oporu powietrza liniowej z prędkością:

$$\vec{F}_{op} = -k\vec{v} = (-kv_x, -kv_y) \quad (1)$$

Stała oporu $k \left[\frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg}{s} \right]$ jest zależna od własności ośrodka i kształtu ciała. Wzór (1) jest słusznym przybliżeniem na siłę oporu dla niewielkich prędkości ciała względem ośrodka i przepływów ustalonych (laminarnych).

Równania dynamiki

Zapisujemy II zasadę dynamiki Newtona :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v} \quad (2)$$

Wprowadzamy współczynnik oporu $\beta = \frac{k}{m} \left[\frac{1}{s} \right]$. Dostajemy 2 równania algebraiczne dla składowych v_x oraz v_y :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \beta v_y \quad (3)$$

Równania prędkości

Rozwiązujemy układ równań różniczkowych (3) ze względu na v_x i v_y (np. metodą zmiennych rozdzielonych - w równaniu na v_y robimy wcześniej podstawienie za prawą stronę) z uwzględnieniem warunków początkowych: $v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Otrzymujemy¹:

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\beta t} \quad v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \quad (4)$$

Równania położenia

Znajdujemy współrzędne położenia (równania ruchu), całkując współrzędne prędkości z warunkami początkowymi: $x(0) = y(0) = 0$. Otrzymujemy²:

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \quad y(t) = \left(\frac{v_{0y}}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t \quad (5)$$

Równanie toru

Na podstawie równania na składową $x(t)$ z rozwiązań (5) otrzymujemy zależności na t :

$$(1 - e^{-\beta t}) = \frac{\beta}{v_{0x}} x \quad t = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{v_{0x}} x \right) \quad (6)$$

Podstawiamy zależności (6) do równania na składową $y(t)$ z rozwiązań (5) i otrzymujemy równanie toru:

$$y(x) = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{g}{v_{0x}\beta} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(1 - \frac{\beta}{v_{0x}} x \right) \quad (7)$$

Można zauważyć w równaniu toru (7), że $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan \alpha$.

Kształt toru (wykres funkcji (7)) przedstawiono na rys. (1) w zależności od parametru β .

Parametry rzutu

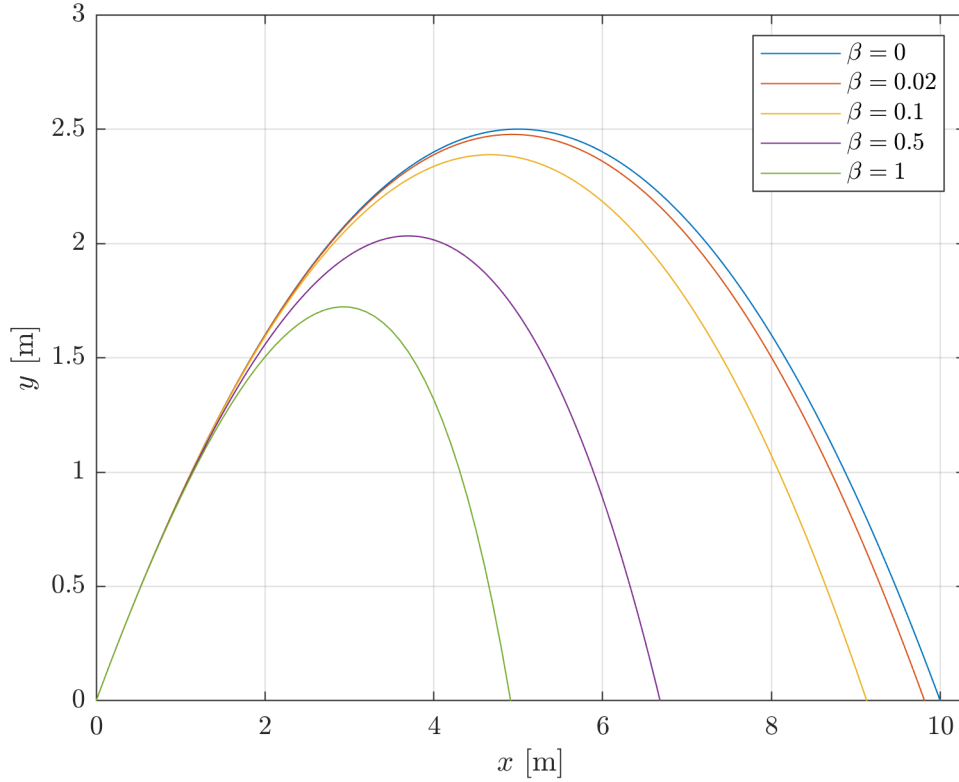
Możemy wyznaczyć parametry rzutu ukośnego z oporem, podobnie jak w przypadku idealnym (bez oporów): czas wznoszenia, czas ruchu, zasięg, wysokość maksymalna.

Czas wznoszenia $t_{\uparrow}$ wyznaczymy z warunku $v_y(t_{\uparrow}) = 0$. Na podstawie (4) mamy:

$$t_{\uparrow} = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{v_{0y}\beta}{g} \right) \quad (8)$$

¹Szczegółowe rozwiązanie równań (3) podano w ??

²Szczegółowe rozwiązanie równań (4) podano w ??



Rysunek 1: Wykres toru dany równaniem (7) dla różnych wyborów współczynnika oporu β oraz danych początkowych: $v_0 = 10$ m/s, $\alpha = 45^\circ$. Warto zauważyć, że dla rzutu okrągłym kamieniem o średnicy 2 cm (masa takiego kamienia to ok. 11 g), siła oporu dana jest przez wzór Stokesa, a więc stała oporu to $k = 6\pi\eta r$ (r - promień kulki; η - wsp. lepkości ośrodka wyrażony w mPa·s). Można więc oszacować wielkość współczynnika oporu β dla kamienia rzucanego w różnych ośrodkach: w powietrzu $\beta \approx 10^{-4}$, w wodzie $\beta \approx 0,02$, w oleju $\beta \approx 1$ (w jednostkach 1/s). Widać stąd, że dla w miarę niedużych ciał (np. kul o niewielkich promieniach) rzucanych w powietrzu wpływ siły oporu na ruch jest pomijalny.

Wysokość maksymalna w rzucie $h_{max} = y(t_{\uparrow})$, stąd:

$$h_{max} = \frac{v_{0y}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \ln\left(1 + \frac{v_{0y}\beta}{g}\right) \quad (9)$$

Czas ruchu otrzymamy z warunku $y(t_{\uparrow\downarrow}) = 0$, co prowadzi do nieanalitycznego równania:

$$\frac{t_{\uparrow\downarrow}}{1 - e^{-\beta t_{\uparrow\downarrow}}} = \frac{v_{0y}}{g} + \frac{1}{\beta} \quad (10)$$

Rozwiązaniem równania (10) jest funkcja specjalna (W Lamberta). Spróbujemy znaleźć rozwiązanie przybliżone dla małych argumentów eksponenty. Przybliżenie Taylora wokół $\beta t_{\uparrow\downarrow} = 0$ do wyrażu kwadratowego prowadzi do:

$$t_{\uparrow\downarrow} = \frac{2v_{0y}}{v_{0y}\beta + g} \quad (11)$$

Zasięg rzutu obliczymy jako $z = x(t_{\uparrow\downarrow})$. Podstawiając za $1 - e^{-\beta t_{\uparrow\downarrow}}$ na podstawie (10) do równania na x (5), otrzymamy:

$$z = \frac{v_{0x}g}{v_{0y}\beta + g} \cdot t_{\uparrow\downarrow} \quad (12)$$

Teraz podstawiając za $t_{\uparrow\downarrow}$ przybliżoną formułę z (11), dostajemy:

$$z = \frac{2v_{0x}v_{0y}g}{(v_{0y}\beta + g)^2} \quad (13)$$

Zauważamy, że $2v_{0x}v_{0y} = v_0^2 \sin(2\alpha)$. Trzeba mieć na uwadze, że przybliżone formuły (11) oraz (13) są słusznie naprawdę jedynie dla małych parametrów β (rzędu 0,01). Jak łatwo stwierdzić na podstawie rys. 1 niezgodność zaczyna być znacząca już przy $\beta = 0,1$.

Przypadek szczególny: $\beta = 0$

Rozwiązania ogólne muszą sprowadzać się do rozwiązań znanych dla przypadku bez oporów ($\beta = 0$). Widzimy, że zwykle podstawienie $\beta = 0$ do równań (4), (5), (7) oraz wzorów na parametry rzutu, prowadzi do rozbieżności wszędzie tam, gdzie β występuje w mianowniku. Należy znaleźć graniczną postać tych równań przy przejściu $\beta \rightarrow 0$, a więc dokonać rozwinięć w szereg Taylora do wyrazów 1. albo 2. rzędu względem β . Pamiętajmy, że: $e^{-\beta t} \approx 1 - \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2$ oraz $\ln(1 + c\beta) \approx c\beta - \frac{1}{2}c^2\beta^2$.

Dokonamy teraz odpowiednich przybliżeń / rozwinięć dla kolejnych wielkości.

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\beta t} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \boxed{v_{0x}} \quad (14)$$

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \left(v_{0y} + \frac{g}{\beta}\right) (1 - \beta t) - \frac{g}{\beta} = \boxed{v_{0y} - gt} \quad (15)$$

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{v_{0x}}{\beta} (1 - (1 - \beta t)) = \boxed{v_{0x} t} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{v_{0y}}{\beta} + \frac{g}{\beta^2}\right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{v_{0y}}{\beta} + \frac{g}{\beta^2}\right) \left(1 - \left(1 - \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2\right)\right) - \frac{g}{\beta} t = \\ &= v_{0y} t - \frac{1}{2} v_{0y} \beta t^2 + \cancel{\frac{g}{\beta} t} - \frac{1}{2} g t^2 - \cancel{\frac{g}{\beta} t} = \boxed{v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$t_{\uparrow} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{v_{0y}\beta}{g}\right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \frac{v_{0y}\beta}{g} = \boxed{\frac{v_{0y}}{g}} \quad (18)$$

$$h_{max} = \frac{v_{0y}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \ln\left(1 + \frac{v_{0y}\beta}{g}\right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{v_{0y}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \left(\frac{v_{0y}\beta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g^2} \beta^2\right) = \boxed{\frac{v_{0y}^2}{2g}} \quad (19)$$

$$\frac{t_{\uparrow\downarrow}}{1 - e^{-\beta t_{\uparrow\downarrow}}} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \frac{1}{2}\beta^2 t_{\uparrow\downarrow}} = \frac{v_{0y}}{g} + \frac{1}{\beta} \Rightarrow t_{\uparrow\downarrow} = \boxed{\frac{2v_{0y}}{g}} \quad (20)$$

$$z = \frac{v_{0x}g}{v_{0y}\beta + g} \cdot t_{\uparrow\downarrow} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} v_{0x} \cdot \frac{2v_{0y}}{g} = \boxed{\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}} \quad (21)$$