

Promieniowanie emitowane przez przyspieszony ładunek elektryczny

Opracowanie na podstawie rozdziału 11 Griffithsa

Tymoteusz Prostack

1. Idea promieniowania

W tym opracowaniu przez promieniowanie rozumiem energię pola elektromagnetycznego, która odrywa się od źródła i ucieka do nieskończoności. Taką definicję przyjmuje Griffiths w rozdziale 11: interesuje nas strumień wektora Poyntinga przez bardzo dużą powierzchnię zamkniętą.

$$P(r, t) = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (\text{Griffiths 11.1})$$

Ponieważ zaburzenia elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością c , energia przecinająca sferę promienia r w chwili t opuściła źródło wcześniej:

$$t_0 = t - \frac{r}{c}. \quad (1)$$

Dla promieniowania istotne są tylko te części pól, które w strefie dalekiej maleją jak

$$E_{\text{rad}}, B_{\text{rad}} \sim \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Wtedy

$$S \sim E^2 \sim \frac{1}{r^2}, \quad (3)$$

a po przemnożeniu przez pole powierzchni sfery, proporcjonalne do r^2 , dostaje się skończoną moc. Człony pól typu $1/r^2$, $1/r^3$ itd. nie dają promieniowania do nieskończoności.

2. Potencjały opóźnione

Dla ogólnego rozkładu ładunku i prądu potencjały opóźnione mają postać

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau', \quad (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau', \quad (5)$$

gdzie

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (6)$$

Sens jest taki, że pole w punkcie obserwacji nie zależy od aktualnego stanu źródła, lecz od stanu źródła w czasie opóźnionym.

2.1. Dlaczego dla ładunku punktowego pojawia się czynnik Liénarda-Wiecherta

Jeżeli ładunek punktowy porusza się po trajektorii $\mathbf{w}(t)$, to nie można naiwnie napisać

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (7)$$

Problemem nie jest to, że ładunek zmienia wartość, lecz to, że zmienia położenie. Odległość

$$R(t_r) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| \quad (8)$$

zależy od czasu opóźnionego, a sam czas opóźniony spełnia równanie uwikłane

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}. \quad (9)$$

Poprawne potencjały Liénarda-Wiecherta są

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}/c)}, \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Wszystkie wielkości po prawej stronie są liczone w czasie opóźnionym. Czynnik

$$1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}/c \quad (12)$$

jest geometrycznym efektem ruchu źródła. Jeśli ładunek porusza się w stronę obserwatora, kolejne zaburzenia docierają gęściej w czasie; jeśli ucieka, docierają rzadziej.

3. Promieniowanie ładunku punktowego

3.1. Pełne pole Liénarda-Wiecherta

Pole elektryczne poruszającego się ładunku punktowego zapisuje się w postaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right], \quad (\text{Griffiths 11.62})$$

gdzie

$$\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}. \quad (13)$$

Wektor \mathbf{R} prowadzi od opóźnionego położenia ładunku do punktu obserwacji, a $R = |\mathbf{R}|$. Prędkość \mathbf{v} i przyspieszenie \mathbf{a} są liczone w czasie opóźnionym.

Pole magnetyczne jest

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{Griffiths 11.63})$$

W polu elektrycznym są dwa fizycznie różne człony:

1. $(c^2 - v^2)\mathbf{u}$ – pole prędkościowe, malejące jak $1/R^2$;
2. $\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})$ – pole przyspieszeniowe, malejące jak $1/R$.

Promieniowanie pochodzi tylko z pola przyspieszeniowego:

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]}. \quad (\text{Griffiths 11.66})$$

3.2. Ładunek chwilowo spoczywający: wzór Larmora

Jeżeli w czasie opóźnionym ładunek chwilowo spoczywa, to

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}}. \quad (14)$$

Wtedy

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})]. \quad (\text{Griffiths 11.68})$$

Z tożsamości

$$\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a}) = (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{a} \quad (15)$$

wynika

$$|\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})|^2 = a^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 = a^2 \sin^2 \theta. \quad (16)$$

Zatem

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \hat{\mathbf{R}}, \quad (17)$$

i dostajemy

$$\boxed{\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c R^2} \hat{\mathbf{R}}}. \quad (\text{Griffiths 11.69})$$

Całkowita moc:

$$P = \int \mathbf{S}_{\text{rad}} \cdot d\mathbf{a} \quad (18)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (19)$$

Używając

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}, \quad (20)$$

otrzymuje się wzór Larmora:

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}}. \quad (\text{Griffiths 11.70})$$

Profil promieniowania, kształtem przypominający torus, jest proporcjonalny do $\sin^2 \theta$. Ładunek nie promieniuje wzdłuż kierunku przyspieszenia, natomiast najmocniej promieniuje w kierunku poprzecznym do swojego przyspieszenia.

3.3. Ładunek poruszający się: poprawka czasowa i rozkład kątowy

Dla $\mathbf{v} \neq 0$ pojawia się subtelność: moc przechodząca przez sferę obserwatora nie jest automatycznie tą samą mocą, z jaką energia opuściła ładunek. Jest to podobny mechanizm geometryczny jak w zjawisku Dopplera. Jeżeli źródło porusza się w stronę obserwatora, kolejne porcje energii docierają szybciej, niż były emitowane.

Związek między czasem obserwacji t i czasem emisji t_r jest

$$t = t_r + \frac{R(t_r)}{c}. \quad (21)$$

Różniczkując,

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc}. \quad (22)$$

Dlatego jeżeli dW/dt jest mocą przechodzącą przez sferę, to moc opuszczająca ładunek wynosi

$$\frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dt_r} = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{dW}{dt}. \quad (\text{Griffiths 11.71})$$

Stąd rozkład kątowy promieniowanej mocy:

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5}}. \quad (\text{Griffiths 11.72})$$

3.4. Wzór Liénarda

Całkując równanie (11.72), otrzymujemy w przypadku relatywistycznym

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left[a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right]}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{Griffiths 11.73})$$

Dwa szczególne przypadki:

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{a} \implies P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c}, \quad (23)$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{a} \implies P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}. \quad (24)$$

Dla dużych prędkości promieniowanie skupia się w wąskim stożku w kierunku ruchu cząstki.

4. Siła reakcji promieniowania

Skoro ładunek promieniuje, energia musi skądś pochodzić. Naturalnie oczekuje się siły reakcji działającej na ładunek. Naiwnie można by napisać

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} = -P, \quad (25)$$

ale to równanie jest chwilowo błędne. Powód: pole prędkościowe nie promieniuje do nieskończoności, ale może magazynować i oddawać energię w pobliżu cząstki.

Dla przedziału czasu, po którym układ wraca do tego samego stanu, można użyć bilansu średniego, w którym brana jest pod uwagę zmiana energii tylko członu związanego z przyspieszeniem, z racji tego, że prędkość jest periodyczna:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt. \quad (\text{Griffiths 11.78})$$

Prawą stronę całkuje się przez części:

$$\int_{t_1}^{t_2} a^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt \quad (26)$$

$$= \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (27)$$

Jeżeli stan początkowy i końcowy są takie same, wyraz brzegowy znika. Najprostsza siła zgodna z tym bilansem to

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}}. \quad (\text{Griffiths 11.80})$$

Jest to wzór Abrahama-Lorentza. Siła zależy od pochodnej przyspieszenia, a nie od samego przyspieszenia. To prowadzi do znanych trudności klasycznej elektrodynamiki ładunku punktowego: rozwiązań uciekających i preakceleracji.

5. Dipol i źródło rozciągłe

5.1. Dowolne małe źródło

Dla zlokalizowanego źródła rozwijamy potencjały opóźnione względem rozmiaru źródła r' . Zachowujemy wyrazy do pierwszego rzędu w r' , ponieważ właśnie ten rząd daje elektryczny moment dipolowy. Jednocześnie w strefie dalekiej, przy obliczaniu pól promieniowania, zostawiamy tylko wyrazy proporcjonalne do $1/r$.

Po takim rozwinięciu potencjał skalarny ma postać

$$V(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{rc} \right], \quad (\text{Griffiths 11.51})$$

a potencjał wektorowy zapisuje się jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r}. \quad (\text{Griffiths 11.54})$$

Po podstawieniu do

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (28)$$

oraz po zostawieniu tylko składników typu $1/r$, otrzymujemy pola promieniowania

$$\boxed{\mathbf{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0))]}, \quad (\text{Griffiths 11.56})$$

$$\boxed{\mathbf{B} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)]}. \quad (\text{Griffiths 11.57})$$

Wektor Poyntinga:

$$\mathbf{S} \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{Griffiths 11.59})$$

Całkowita moc w przybliżeniu dipolowym:

$$\boxed{P_{\text{rad}}(t_0) \simeq \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2}. \quad (\text{Griffiths 11.60})$$

Wniosek: monopol elektryczny nie promieniuje, bo całkowity ładunek jest zachowany. Pierwszy zwykle promieniujący wkład to zmienny dipol elektryczny.

5.2. Oscylujący dipol elektryczny

Rozważamy krótki dipol o długości d , dla którego

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}, \quad p_0 = q_0 d. \quad (29)$$

W modelu krótkiego dipola rozwijamy odległości od obu końców dipola do punktu obserwacji r_{\pm} z dokładnością do pierwszego rzędu względem rozmiaru dipola d . Równocześnie zakładamy, że dipol jest mały względem długości fali,

$$d \ll \lambda, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (30)$$

W strefie promieniowania, czyli dla

$$r \gg \lambda, \quad (31)$$

w polach \mathbf{E} i \mathbf{B} zostawiamy tylko wyrazy proporcjonalne do $1/r$. Wyrazy $1/r^2$ i $1/r^3$ opisują pole bliskie, ale nie dają skończonej mocy promieniowanej w nieskończoność.

Dla

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (32)$$

otrzymujemy w strefie promieniowania

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{Griffiths 11.18})$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (\text{Griffiths 11.19})$$

Średni wektor Poyntinga:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{Griffiths 11.21})$$

Całkowita średnia moc:

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}. \quad (\text{Griffiths 11.22})$$

6. Zastosowania

6.1. Promieniowanie synchrotronowe

W ruchu po okręgu: prędkość jest styczna do toru, a przyspieszenie jest dośrodkowe. Korzystając ze wzajemnej prostopadłości wektora prędkości i przyspieszenia:

Wybieramy osie tak, aby

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{a} = a \hat{\mathbf{x}}, \quad (33)$$

Kierunek obserwacji zapisujemy jako

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (34)$$

Wprowadzamy

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (35)$$

Po podstawieniu tego przypadku do rozkładu kąтового promieniowania ładunku punktowego otrzymuje się

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}}. \quad (36)$$

To jest wersja dla $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. Dla małych prędkości, czyli $\beta \ll 1$, mianownik jest bliski jedności i wracamy jakościowo do klasycznego obrazu promieniowania poprzecznego. Dla prędkości relatywistycznych, gdy $\beta \approx 1$, czynnik

$$(1 - \beta \cos \theta)^{-5} \quad (37)$$

silnie wzmacnia promieniowanie w kierunku ruchu. Dlatego promieniowanie nie wygląda już jak symetryczny torus wokół przyspieszenia, lecz jest skupione w wąskim stożku do przodu, czyli mniej więcej wzdłuż \mathbf{v} .

Całkując po wszystkich kierunkach, dostaje się

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}}. \quad (38)$$

Jest to zgodne ze wzorem Liénarda. Rzeczywiście, dla $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 = v^2 a^2, \quad (39)$$

więc

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left[a^2 - \frac{v^2 a^2}{c^2} \right] \quad (40)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} a^2 (1 - \beta^2) \quad (41)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}. \quad (42)$$

Dla ruchu po okręgu

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (43)$$

więc

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} \frac{v^4}{R^2}. \quad (44)$$

Wynika z tego, że relatywistyczny elektron poruszający się po zakrzywionym torze traci energię bardzo intensywnie, a promieniowanie jest skupione w kierunku jego chwilowej prędkości.

6.2. Straty w obwodach prądu przemiennego i opór promieniowania

Prąd przemienny oznacza przyspieszanie ładunków, więc obwód może promieniować. Dla krótkiego dipola wygodnie opisuje się to przez opór promieniowania:

Dla oscylującego dipola

$$p_0 = q_0 d, \quad (45)$$

średnia moc promieniowania jest

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}. \quad (46)$$

Amplituda prądu w przewodzie:

$$I_0 = q_0 \omega. \quad (47)$$

Definicja oporu promieniowania:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\text{rad}}. \quad (48)$$

Zatem

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\langle P \rangle}{I_0^2} \quad (49)$$

$$= \frac{2}{q_0^2 \omega^2} \frac{\mu_0 q_0^2 d^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (50)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega^2 d^2}{6\pi c}. \quad (51)$$

Ponieważ

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (52)$$

to

$$R_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 c}{6\pi} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2. \quad (53)$$

Dla $\mu_0 c \simeq 377 \Omega$

$$R_{\text{rad}} \simeq 790 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \Omega. \quad (54)$$

Jeśli $d \ll \lambda$, wkład radiacyjny jest mały. Jeżeli rozmiar przewodu staje się porównywalny z długością fali, układ zaczyna działać jak antena.

6.3. Obwód RC przy rozładowaniu kondensatora

Niech kondensator płaski ma pojemność C , odległość okładek d i początkowy ładunek Q_0 . Po podłączeniu rezystora R

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}. \quad (55)$$

Moment dipolowy kondensatora można oszacować jako

$$p(t) = Q(t)d. \quad (56)$$

Stąd

$$\ddot{p}(t) = d\ddot{Q}(t) = d \frac{Q_0}{R^2 C^2} e^{-t/(RC)}. \quad (57)$$

Z wzoru dipolowego

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{p}(t)]^2 \quad (58)$$

dostajemy

$$P(t) = \frac{\mu_0 d^2 Q_0^2}{6\pi c R^4 C^4} e^{-2t/(RC)}. \quad (59)$$

Energia wypromieniowana:

$$E_{\text{rad}} = \int_0^\infty P(t) dt \quad (60)$$

$$= \frac{\mu_0 d^2 Q_0^2}{6\pi c R^4 C^4} \int_0^\infty e^{-2t/(RC)} dt \quad (61)$$

$$= \frac{\mu_0 d^2 Q_0^2}{12\pi c R^3 C^3}. \quad (62)$$

Energia początkowa kondensatora:

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad (63)$$

Ułamek wypromieniowanej energii:

$$\boxed{\frac{E_{\text{rad}}}{U_0} = \frac{\mu_0 d^2}{6\pi c R^3 C^2} = \frac{\mu_0 c}{6\pi R} \left(\frac{d}{cRC} \right)^2}. \quad (64)$$

Dla danych z Griffithsa:

$$C = 1 \text{ pF}, \quad R = 1000 \Omega, \quad d = 0,1 \text{ mm}, \quad (65)$$

mamy

$$RC = 10^{-9} \text{ s}, \quad cRC \simeq 0,3 \text{ m}, \quad (66)$$

$$\frac{d}{cRC} \simeq 3,3 \cdot 10^{-4}. \quad (67)$$

Ponieważ

$$\frac{\mu_0 c}{6\pi R} \simeq \frac{377}{6\pi \cdot 1000} \simeq 2,0 \cdot 10^{-2}, \quad (68)$$

to

$$\boxed{\frac{E_{\text{rad}}}{U_0} \simeq 2,2 \cdot 10^{-9}}. \quad (69)$$

Wniosek: dla typowych układów elektronicznych energia promieniowana przy rozładowaniu kondensatora jest praktycznie pomijalna. Główna strata energii zachodzi w rezystorze.

7. Przykłady rachunkowe

7.1. Przykład 1. Obracający się dipol

Rozważmy obracający się moment dipolowy

$$\mathbf{p}(t) = p_0[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{y}}]. \quad (70)$$

W czasie opóźnionym zapisujemy

$$\psi = \omega(t - r/c), \quad (71)$$

$$\mathbf{p}(t_0) = p_0(\cos \psi \hat{\mathbf{x}} + \sin \psi \hat{\mathbf{y}}). \quad (72)$$

Korzystamy z postaci

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} [\mathbf{p}(t_0) - (\mathbf{p}(t_0) \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}]. \quad (73)$$

Potrzebne rzuty:

$$\mathbf{p}(t_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = p_0 \cos \theta \cos(\psi - \phi), \quad (74)$$

$$\mathbf{p}(t_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = p_0 \sin(\psi - \phi). \quad (75)$$

Część radialna znika, więc

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} [\cos \theta \cos(\psi - \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin(\psi - \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}]. \quad (76)$$

Ponieważ $\mathbf{B} = (1/c) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}$,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r} [-\sin(\psi - \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \theta \cos(\psi - \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}]. \quad (77)$$

Dla promieniowania

$$\mathbf{S} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{\mathbf{r}}. \quad (78)$$

Po policzeniu E^2 i uśrednieniu po czasie:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c r^2} (1 + \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{r}}. \quad (79)$$

Całkowita moc:

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{6\pi c}. \quad (80)$$

Podsumowanie

Najkrócej: promieniowanie elektromagnetyczne jest związane z członami pól malejącymi jak $1/r$. Dla ładunku punktowego źródłem tych członów jest przyspieszenie. Dla małego źródła rozciągniętego najniższym zwykle istotnym wkładem jest promieniowanie dipola elektrycznego. W zwykłych obwodach promieniowanie często istnieje formalnie, ale jest bardzo małe, chyba że rozmiar układu staje się porównywalny z długością fali.