

ZESTAW 3

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fk_ft

Tematyka: budowa atomu.

Korpuskularna natura światła. Rozwój koncepcji fotonu

3.1. Zjawisko Comptona

- (a) Proszę wyprowadzić wzór na długość fali rozproszonego promieniowania. Następnie proszę przekształcić ten wzór do postaci na energię rozproszonych fotonów. Ile wynosi tzw. *komptonowska długość fali*?
- (b) Foton γ o długości fali 5 pm rozprasza się na elektronie tak, że ten uzyskuje prędkość $v = 0,5c$. Obliczyć zmianę długości fali fotonu i kąt rozpraszania.
- (c) Jaką energię kinetyczną uzyskuje elektron w zjawisku Comptona (wyprowadzić wzór)? Jaką maksymalną energię uzyska elektron, na którym rozprasza się promieniowanie o długości fali $\lambda = 0,84 \text{ \AA}$?

Budowa atomu. Stara teoria kwantów

3.2. Klasyczna teoria rozpraszania, wzór Rutherforda [por. Irodow2 rozdział 2, Matthews 10.2] [Całe zadanie potraktujemy z (*), zrobimy tylko podpunkty (a) i (d)]

Rozważ rozpraszanie elastyczne (bez straty energii) dodatniego ładunku q na (punktowym i spoczywającym) atomie o liczbie atomowej Z .

- (a) Z zasady zachowania energii oblicz minimalną odległość D , na jaką ładunek q może zbliżyć się do jądra, w funkcji jego prędkości (przypadek nierelatywistyczny).
- (b) Wyprowadź związek parametru zderzenia b z odległością D i kątem rozpraszania θ (Odp. $b = \frac{D}{2} \cotg \frac{\theta}{2}$). W tym celu rozważ zachowanie momentu pędu cząstki q przy przejściu w pobliżu jądra i zasady dynamiki w oddziaływaniu cząstki z jądrem.
- (c) Wyprowadź wzór Rutherforda na różniczkowy przekrój czynny w zderzeniu ładunku punkowego q z folią zbudowaną z jąder atomowych o Z protonach (Odp. $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZe^2}{mv_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$). W tym celu pokaż związek udziału liczby cząstek rozproszonych do wszystkich cząstek padających: $\frac{dN}{N} = n \cdot x \cdot 2\pi b \cdot |db|$ (gdzie n – koncentracja jąder atomowych w folii, x – grubość folii, b – parametr zderzenia) z kątem rozpraszania θ i wykorzystaj definicję różniczkowego przekroju czynnego: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega} \cdot A$ (pole przekroju poprzecznego w zderzeniu: $A = \frac{1}{N \cdot n \cdot x}$), przy czym dla problemów o symetrii osiowej: $d\Omega = 2\pi d(\cos \theta)$.
- (d) Jakiego rzędu jest przekrój czynny na rozpraszanie cząstek α (jąder helu) na folii ze złota ($Z = 79$) przy energii kinetycznej cząstek rzędu kilku MeV. Podaj wynik w barnach ($1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$). Podaj odpowiadający temu rząd wielkości rozmiarów jądra atomowego.
- (e) [Irodow2 2.23.] Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że cząstka α o energii $T = 3 \text{ MeV}$ przy przejściu przez folię ołowianą o grubości $1,5 \text{ }\mu\text{m}$ zostaje rozproszona w przedziale kątowym: (a) $59^\circ - 61^\circ$, (b) $60^\circ - 90^\circ$.
Wskazówka. Trzeba scałkować po kącie zależność $\frac{dN}{N}$.

3.3. Model Bohra atomu

- (a) Na podstawie postulatów Bohra proszę stworzyć kwantowy model budowy atomu wodoropodobnego (tj. znaleźć kwantowanie energii, promienia orbity, prędkości na orbicie oraz częstości obiegu wokół jądra dla elektronu).
- (b) Proszę obliczyć wartości powyższych wielkości dla 1. orbity atomu wodoru. W szczególności proszę sprawdzić jakim ułamkiem prędkości światła jest prędkość elektronu.
- (c) Dla jakiego atomu (wodoropodobnego) prędkość elektronu na 1. orbicie staje się relatywistyczna?
- (d) Wyprowadzić wzór na długość fali wyemitowanego promieniowania przy przejściach elektronu między orbitami k i m w atomie wodoru (wzór Rydberga). Obliczyć stałą Rydberga R_y . Jakie są granice serii Lymana, Balmera, Paschena itd.?
- (e) Pod linkiem <http://spektrus.software.informer.com/1.0/> można znaleźć darmowy program edukacyjny ilustrujący widma emisyjne różnych atomów. Korzystając z tego programu, proszę znaleźć energie (długości fal) przejść z zakresu światła widzialnego dla atomu wodoru i ustalić, między którymi poziomami przejścia te występują. Do jakiej serii należą?

- (f) [Irodow 5.9.] Proszę rozpatrzyć argumenty przeciwko atomowej teorii Bohra, obliczyć czas, po jakim elektron z pierwszej orbity spadłby na proton w atomie wodoru. Zgodnie z klasyczną elektrodynamiką szybkość strat energii na promieniowanie wynosi

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2,$$

gdzie a jest przyspieszeniem dośrodkowym elektronu (założenie). Powyższy wzór nosi nazwę *wzoru Larmora* na moc wypromieniowaną przez poruszający się z przyspieszeniem ładunek (patrz: Griffiths rozdziały 11.1.4. oraz 11.2.1).

3.4. Oscylator harmoniczny w modelu Bohra [Irodow 5.10.]

Proszę na podstawie postulatów Bohra znaleźć skwantowane poziomy energetyczne cząstki poruszającej się w polu centralnym o energii potencjalnej oscylatora harmonicznego:

$$U = \frac{kr^2}{2}.$$

3.5. Model Bohra-Sommerfelda, poprawka na eliptyczne orbity, poprawka relatywistyczna¹

Rozszerzeniem modelu Bohra na przypadek orbit eliptycznych (jak w grawitacji) jest poprawka zaproponowana przez Sommerfelda (1916 r.). Podał on uogólniony postulat kwantowania w postaci (q_i to współrzędna uogólniona, a p_i – odpowiadający jej pęd uogólniony):

$$\oint_{\Gamma} p_i dq_i = n_i \cdot h$$

- (a) Oblicz powyższą całkę dla współrzędnych $q_i = \theta$ (współrzędna kątowa, wtedy $p_{\theta} \equiv L = I\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$, odpowiadająca liczba kwantowa: n_{θ}) oraz $q_i = r$ (współrzędna radialna, wtedy $p_r = m \frac{dr}{dt}$, odpowiadająca liczba kwantowa: n_r). Załóż równanie toru w postaci krzywej stożkowej: $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$, gdzie p, ϵ – parametry.
- (b) Zapisz energię całkowitą w polu centralnym (po krzywej stożkowej): $E = -\frac{Z^2 k^2 m e^4}{2L^2} (1 - \epsilon^2)$ z użyciem liczb kwantowych n_{θ} i n_r , aby otrzymać uogólniony wzór na energię elektronu w atomie na orbicie eliptycznej. Pokaż, że wzór redukuje się do wzoru Bohra dla orbity kołowej ($n_{\theta} = 0$).

W powyższym wyprowadzeniu użyliśmy wzoru klasycznego (nierelatywistycznego) na energię. Gdyby zastosować wzór relatywistyczny: $E = c\sqrt{p_r^2 + \left(\frac{p_{\theta}}{r}\right)^2} + (mc)^2 - mc^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, po bardziej złożonych rachunkach dostalibyśmy w przybliżeniu do pierwszej poprawki relatywistycznej (rzędu $(v/c)^2$) wzór Bohra-Sommerfelda:

$$E_{n,l} = -\frac{Z^2 mc^2 \alpha^2}{2n^2} \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

gdzie $\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ to tzw. stała struktury subtelnej; n/l – główna/orbitalna liczba kwantowa.

- (c) Oblicz wielkość poprawki relatywistycznej do energii (w eV) dla orbit głównych (tj. dla różnych n , ale $l = 0$) atomów: wodoru, krzemu, złota, uranu.
- (d) Podaj strukturę subtelną wodoru dla trzech pierwszych n (i wszystkich możliwych l), tj. wypisz energie $E_{10}, E_{20}, E_{21}, E_{30}, E_{31}, E_{32}$. Podaj wielkość rozszczepienia $\frac{1}{\lambda} = \frac{E}{\hbar c}$ (w cm^{-1}) między stanami o skrajnych l na drugiej i trzeciej orbicie.

¹Zajmiemy się tym zadaniem, jeżeli będzie czas