

ZESTAW 2

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fk_ft

Tematyka: promieniowanie ciała doskonale czarnego; korpuskularna natura światła.

Promieniowanie termiczne. Kryzys fizyki klasycznej i narodziny kwantów

2.1. *Wzór Rayleigha-Jeansa. Katastrofa w nadfiolecie* [To zadanie tylko skomentujemy, rozwiązanie na wykładzie]

- (a) [Baj IV.1., por. notatki do wykładu] Proszę rozważyć sześcienną wnękę rezonansową o boku L . Jaka jest liczba fal stojących o częstotliwości z przedziału $[\nu, \nu + d\nu]$ zamkniętych we wnęcie? Założyć sztywne warunki brzegowe (znikanie fal na ściankach).
- (b) Na podstawie punktu (a) znaleźć gęstość energii promieniowania (czyli radiancję) we wnęcie (chodzi o wzór Rayleigha-Jeansa). Średnia energia fotonu dana jest zasadą ekwipartycji energii ($\bar{\epsilon} = k_B T$, k_B – stała Boltzmanna). Jaka jest idea katastrofy w nadfiolecie?

2.2. *Rozkład Plancka dla ciała doskonale czarnego (c.d.cz.)*

- *(a) [Baj IV.2.] Proszę przyjąć, że energia fali jest skwantowana ($E = nh\nu$) i znaleźć wyrażenie na średnią liczbę kwantów promieniowania o częstotliwości ν , przy założeniu, że prawdopodobieństwo powstania we wnęcie fali stojącej dane jest rozkładem Boltzmanna $P(E) \propto e^{-E/k_B T}$, k_B – stała Boltzmanna (będziemy oznaczać też przez k). Chodzi o wzór $\bar{n} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$, który znajdujemy stosując statystyczną definicję wartości oczekiwanej zmiennej n podlegającej (nieunormowanemu) rozkładowi prawdopodobieństwa o gęstości $P(E)$.
- (b) Korzystając z powyższego 2.2.a (lub wykładu) oraz z rozwiązania zad. 2.1.b, podać rozkład Plancka dla c.d.cz. (wzór: $\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$ na radiancję c.d.cz.). Jaka jest rola temperatury?
- (c) [Irodow2 1.15.] Proszę dokonać przejścia między wyrażeniem na zdolność emisyjną c.d.cz. w funkcji częstotliwości i długości fali promieniowania.
- (d) [Irodow2 1.14.] Zbadać asymptotykę rozkładu Plancka w granicy małych i dużych częstotliwości fali. Czy katastrofa w nadfiolecie nadal ma miejsce? Podać rozkład Wiena.
- (e) Wyprowadzić prawo Wiena (wzór na długość fali λ_{max} o maksymalnej mocy promieniowania), nazywane też prawem przesunięć Wiena. Równanie, które się dostanie, będzie nieanalityczne – chodzi tylko o pokazanie zależności $\lambda(T)$. Można spróbować rozwiązać problem graficznie i znaleźć mniej więcej wartość stałej Wiena.
- (f) [Irodow2 1.17.] Obliczyć za pomocą wzoru Plancka, ile razy wzrosło widmowe natężenie promieniowania o długości fali $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$, gdy T wzrasta od 2000 K do 2300 K.

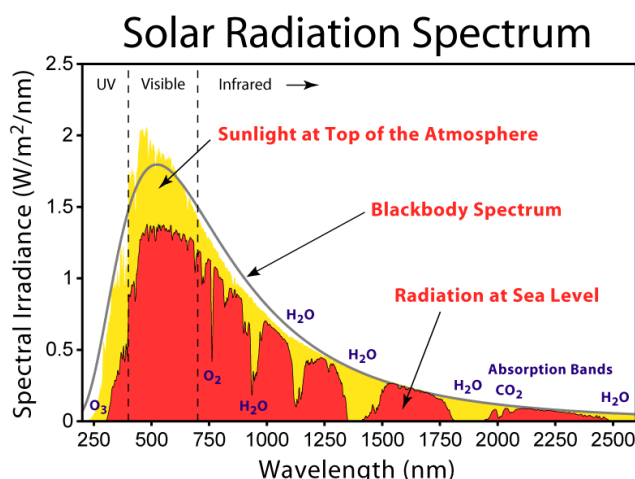
2.3. *Prawo Stefana-Boltzmanna*

- *(a) [Irodow2 1.1.] Udowodnij związek między zdolnością emisyjną (inaczej: całkowitą mocą promieniowania) c.d.cz. $R_T(\nu)$ z gęstością energii $\rho_T(\nu)$, daną rozkładem Plancka: $R_T(\nu)d\nu = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)d\nu$.
- (b) Wyprowadź prawo Stefana-Boltzmanna, czyli zależność całkowitej zdolności emisyjnej c.d.cz. od temperatury $R_T = \sigma T^4$. W szczególności oblicz wartość stałej σ . W rachunkach pojawiają się całki nieanalityczne, których rozwiązania proszę odnaleźć w tablicach całek.
- (c) W ścianie promieniującej wnęki o temperaturze 6000 K wywiercono otwór o średnicy 10 mm. Oblicz moc wychodzącego przez ten otwór promieniowania o długościach fal z zakresu 5500-5510 Å.

2.4. *Temperatura powierzchni Słońca*

- (a) Znając stałą słoneczną ($S = 1368 \text{ W/m}^2$), odległość Ziemi od Słońca (149,6 mln km), średnicę kątową Słońca widzianego z Ziemi (ok 32') oraz stałą Stefana-Boltzmanna (zad. 2.3.b), obliczyć temperaturę powierzchni Słońca. Założyć, że widmo promieniowania słonecznego jest widmem c.d.cz..
- *(b) Na rysunku poniżej (Rysunek 1) można znaleźć rozkład widmowy promieniowania słonecznego docierającego do Ziemi (ponad atmosferą i na poziomie oceanu). Proszę na podstawie kilkunastu punktów odczytanych z rysunku odtworzyć kształt rozkładu i zrobić dopasowanie krzywej Plancka z temperaturą jako parametrem dopasowania – w ten sposób odnaleźć temperaturę powierzchni Słońca. Rozważyć 2 serie danych: z wykresu dla poziomu oceanu oraz ponad atmosferą. Dla tej pierwszej serii wziąć pod uwagę długości fal niezaabsorbowane przez atmosferę. Stałe w liczniku wzoru Plancka można także potraktować jako parametr (drugi, i wtedy potraktować jednostki na osi pionowej wykresu jako arbitralne). Dopasowania można dokonać w dowolnym programie typu Origin, Matlab itp. Proszę porównać otrzymaną wartość teoretyczną z wartością

otrzymaną w punkcie (a) oraz wartością rzeczywistą (znalezioną np. w internecie). *Ciekawostka. Proszę zauważyć, jak duże jest pochłanianie w atmosferze promieniowania o określonych długościach fali.*



Rysunek 1: Rysunek do zad. 2.4.b.

Korpuskularna natura światła. Rozwój koncepcji fotonu

2.5. Zjawisko fotoelektryczne

- Praca wyjścia dla miedzi wynosi 4,65 eV. Proszę obliczyć częstotliwość progową i graniczną długość fali dla zjawiska fotoelektrycznego. Jeśli na płytkę miedziową pada promieniowanie o długości fali 1,54 Å, to ile wynosi napięcie hamowania, maksymalna energia kinetyczna i prędkość fotoelektronów? (Czy elektrony są jeszcze „klasyczne”?)
 - Wyjaśnij zasadę działania fotokomórki. Na stronie [LINK](#) dostępny jest aplet PhET (Uniwersytet Colorado), przy pomocy którego można zasymulować fotoprąd w fotokomórce w funkcji natężenia fotonów dla różnych metali. Proszę oszacować graniczną długość fali dla zjawiska i wielkość pracy wyjścia dla pięciu dostępnych metali: Na, Zn, Cu, Pt, Ca i porównać ją z wartościami tablicowymi (dostępnymi np. w artykule na Wikipedii [LINK](#)). Proszę oszacować maksymalną energię fotoelektronów dla tych materiałów przy długości fali padającego promieniowania o ok. 10% większej niż graniczna, i sprawdzić, że rzeczywiście nie zależy ona od natężenia światła (strumienia fotonów) padającego na materiał. Na koniec proszę spróbować odgadnąć, z jakiego materiału wykonana jest płytka fotokomórki oznaczona w aplecie symbolem '?????'.
- * (c) [Baj IV.25.] Na powierzchnię metalu w jednostce czasu pada N_f fotonów o energii $E = h\nu$, przekazując całą swą energię elektronom (nie jest to w próżni). Prawdopodobieństwo, że foton, który dotarł do metalu, będzie „wykorzystany” na wybitie elektronu, wynosi $P(h\nu)$. Elektron, by wyjść z metalu, musi pokonać barierę potencjału o wysokości równej pracy wyjścia W z metalu. Zakładając, że rozkład kierunków pędu wzbudzonych elektronów jest izotropowy oraz że elektrony mogą wyjść z metalu tylko przez powierzchnię oświetloną (poruszające się w innych kierunkach elektrony szybko tracą swoją energię wskutek zderzeń), obliczyć liczbę elektronów wychodzących z metalu w jednostce czasu.

2.6. Granica krótkofalowa widma promieniowania X

- W lampie rentgenowskiej promieniowanie X jest produkowane w procesie hamowania elektronów na tarczy (antykatodzie). Obliczyć jaka jest najkrótsza możliwa emitowana długość fali, jeśli napięcie przyspieszające elektrony ma wartość 20 kV (jaka jest prędkość takich elektronów?)
- [Irodow2 1.36] Obliczyć prędkość elektronów docierających do antykatody (anody) lampy rentgenowskiej, jeśli długość granicy krótkofalowej ciągłego widma rentgenowskiego wynosi $\lambda_{gr} = 0,157 \text{ Å}$.
- [Irodow 4.223.] Wiązka promieni rentgenowskich pada na monokryształ NaCl. Najmniejszy kąt ugięcia, dla którego można jeszcze obserwować odbicie wiązki od układu płaszczyzn atomowych w kryształcie o odległości między płaszczyznami $d = 2,8 \text{ Å}$ równy jest $\theta = 4,1^\circ$. Obliczyć napięcie przyłożone do lampy rentgenowskiej.

2.7. Zjawisko Comptona

- Proszę wyprowadzić wzór na długość fali rozproszonego promieniowania. Następnie proszę przekształcić ten wzór do postaci na energię rozproszonych fotonów. Ile wynosi tzw. *komptonowska długość fali*?
- Foton γ o długości fali 5 pm rozprasza się na elektronie tak, że ten uzyskuje prędkość $v = 0,5c$. Obliczyć zmianę długości fali fotonu i kąt rozpraszania.
- Jaką energię kinetyczną uzyskuje elektron w zjawisku Comptona (wyprowadzić wzór)? Jaką maksymalną energię uzyska elektron, na którym rozprasza się promieniowanie o długości fali $\lambda = 0,84 \text{ Å}$?