II. Nawiasy Poissona

1. Definicje i własności

Niech funkcje $f(q,p,t)$ i $g(q,p,t)$ będą zdefiniowane w przestrzeni fazowej.
Nawias Poissona jest zdefiniowany następująco:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

Własności:

1° $\{p_i, q_j\} = \sum_k \begin{vmatrix} \delta_{ik} & 0 \\ 0 & \delta_{jk} \end{vmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$

2°. $\{q_i, q_j\} = 0$ (q_i, q_j są niezależne → wsp. uogólnione)

3°. $\{p_i, p_j\} = 0$

4°. $\{q_i, f\} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{0}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = \sum_k \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$

5°. $\{p_i, f\} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{0}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

6.° $L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k$ (moment pędu: i-ta składowa)

$\{\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{L}\} = \ldots = -\vec{L}(\vec{a}\times\vec{b})$ $\quad$ $\vec{a},\vec{b}$ – dowolne stałe wektory

stąd: $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$

7°. $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (reguła antykomutacji)

8°. $\{p_i, f(\vec{r})\} = \sum_k \begin{vmatrix} \delta_{kj} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial r_k} \end{vmatrix} = \sum_k \delta_{ki}\frac{\partial f}{\partial r_k} = \frac{\partial f}{\partial r_i} = \vec{\nabla}_i f,$

bo $\frac{\partial f}{\partial r_i} = \frac{\partial r}{\partial r_i}\cdot\frac{df}{dr} = \frac{df}{dr}\cdot \hat{r}_i = \underline{\vec{\nabla}_i f}$

Nawias Poissona ze składową uogólnionego pędu działa jak gradient.

9°. $\{p_i, r^n\} = \frac{x_i}{r}\cdot n r^{n-1}$ (ćw.)

10°. Tożsamość Jacobiego: $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$