Laboratorium nr 1

Rozwiązywanie równań różniczkowych z niezerowymi warunkami początkowymi

1. Cele ćwiczenia

- zapoznanie się z metodami symbolicznego i numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych w Matlabie,
- wykorzystanie Simulinka do tworzenia modelu równania różniczkowego,
- archiwizacja otrzymanych rozwiązań

2. Wprowadzenie teoretyczne

2.1. Symboliczne rozwiązywanie równań różniczkowych – funkcja **dsolve()**

Rozwiązywanie symboliczne polega na obliczeniach wykonywanych na wyrażeniach matematycznych, a nie na liczbach (rozwiązanie numeryczne), w wyniku czego dostajemy również wyrażenie matematyczne. Przy pomocy zmiennych symbolicznych oraz przy wykorzystaniu funkcji **dsolve()** możliwe jest rozwiązanie równania różniczkowego dowolnego rzędu.

W rozwiązywaniu symbolicznym równań różniczkowych najważniejsza jest zmienna **D** (duże D), która określa pochodną pierwszego stopnia ($D = d/dt$), podobnie **D2** oznacza pochodną drugiego stopnia ($D2 = d^2/dt^2$) itd. Funkcja dsolve() domyślnie różniczkuje po czasie.

Za pomocą funkcji dsolve() możliwe jest również rozwiązywanie układu równań różniczkowych jak i określanie warunków początkowych. Kolejne równania podajemy po przecinkach, a po nich warunki początkowe, również oddzielone przecinkami:

```
dsolve('rownanie1' , 'rownanie2' , … , 'warunek 1' , 'warunek 2')% aktualna składnia
```

Przykład 1:

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad \text{przy war. pocz.} \quad x(0) = 0\,,\ \frac{dx}{dt}(0) = 2$$

wykorzystując funkcję dsolve().

```
% aktualna składnia

syms x y;       % zdefiniowanie zmiennych symbolicznych x, y
y = dsolve('D2x + 3*Dx + 2*x=0' , 'x(0)=0' , 'Dx(0)=2')      % rozwiązanie równania z warunkami początk.

% składnia obowiązująca w przyszłych wydaniach pakietu MATLAB (ten blok zastępuje powyższe dwie linie)

syms x(t) y(t)     % zdef. zmiennych symbolicznych x, y reprezentujących funkcję zmiennej niezależnej t
Dx = diff(x);      % przypisanie pierwszej pochodnej diff(x) do zmiennej Dx
D2x = diff(x,2);   % przypisanie drugiej pochodnej diff(x,2) do zmiennej D2x
y(t) = dsolve(D2x + 3*Dx + 2*x == 0, x(0) == 0, Dx(0) == 2)   % rozwiązanie równania z warunkami pocz.

% prezentacja rozwiązania

pretty(y);                    % wypisanie formuły rozwiązania w formie semigraficznej
t=0:0.01:9.99;                % zdefiniowanie wektora kolejnych chwil czasowych t
w=subs(y);                    % obliczenie wektora rozwiązania w przez podstawienie wektora czasu t
plot(t,w,'r');                % wyrysowanie wykresu w(t) linią o kolorze czerwonym ('r' jak ang. red)
xlabel('Czas [s]');           % etykieta osi odciętych
ylabel('Amplituda');          % etykieta osi rzędnych
title(`Rozwiazanie rownania rozniczkowego');    % nagłówek wykresu
grid;                         % siatka
```

2.2. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych – funkcja **ode()**

MATLAB zawiera funkcje rozwiązujące zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą np. par metod **Rungego-Kutty** rzędu 2 i 3 (funkcja ***ode23***) oraz rzędu 4 i 5 (funkcja ***ode45***).

Funkcje te rozwiązują zagadnienie początkowe dla układów równań zwyczajnych postaci:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

Składnia funkcji:

```
[T, X] = ode23 ('F(t, x)', [t0 tk], x0 ,[OPTIONS]);
[T, X] = ode45 ('F(t, x)', [t0 tk], x0 ,[OPTIONS]);
```

Kolejne parametry wejściowe oznaczają:

- pierwszym parametrem musi być łańcuch zawierający nazwę zdefiniowanej przez użytkownika funkcji zwracającej wartości F(t, x),
- t0, tk - granice przedziału czasu, w którym poszukiwane jest rozwiązanie,
- x0 - określa warunek początkowy - wektor kolumnowy zawierający wartość rozwiązania układu w chwili początkowej,
- OPTIONS - opcjonalny zestaw parametrów, w formacie struktury, zastępujących domyślne parametry całkowania, utworzony funkcją ODESET (patrz: help ODESET). Domyślna względna tolerancja błędu 'RelTol' to 1e-3 czyli 0.001.

Wartością omawianych funkcji jest macierz X zawierająca umieszczone wierszowo wektory reprezentujące wartości rozwiązania w punktach określonych odpowiednimi elementami wektora kolumnowego t, który jest jedną z wartości funkcji ode23 i ode45.

Przykład 2:

Rozwiązać równanie różniczkowe z przykładu 1 wykorzystując funkcję ode45.

Rozwiązanie: Do rozwiązania zadania przy pomocy funkcji ode45 wykorzystano dwa pliki. W pierwszym z nich (*funkcja.m)* zapisujemy postać równania – jako równania stanu:

```
function xdot=funkcja(t,x)

      % Układ rownan rozniczkowych

        xdot=zeros(2,1);
        xdot(1)=x(2);
        xdot(2)=(-2*x(1)-3*x(2));
```

a w drugim (*rozw2.m*) wprowadzamy parametry wejściowe, wywołujemy funkcję *ode45* i rysujemy wykres rozwiązania:

```
function rozw2

        t0=0;
       clc
       disp('Funkcja rozwiazuje rownanie rozniczkowe zwyczajne metoda ');
       disp('Rungego - Kutty i podaje jego interpretacje graficzna:');
       disp(' ');disp('Postac rownania:');disp(' ');
       disp('    x``+ 3•x`+ 2•x = 0');
        x01=input ('Podaj wartosc x01 = ');
        x02=input ('Podaj wartosc x02 = ');
        tk=input ('Podaj czas symulacji tk = ');
        x0=[x01 x02];
        [T, X]=ode45('funkcja', [t0 tk], x0);
```

```
plot(T, X(:, 1), 'g-.')
xlabel('czas [s]');ylabel('amplituda sygnalu');
title('Wykres rozwiazania rownania rozniczkowego');
grid;
```

Rozwiązanie równania różniczkowego, w postaci wykresu, otrzymujemy wywołując w oknie komend MATLABA funkcję >> *rozw2*

2.3. Rozwiązywanie równań różniczkowych przy pomocy pakietu Simulink

Przykład 3:

Rozwiązać równanie różniczkowe z przykładu 1 wykorzystując model zbudowany w Simulinku.

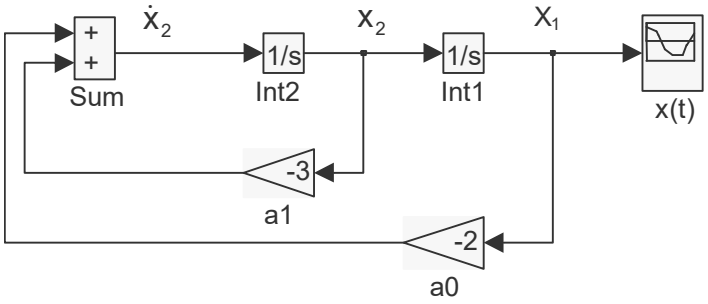
Rozwiązanie: Wprowadzając zmienne:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

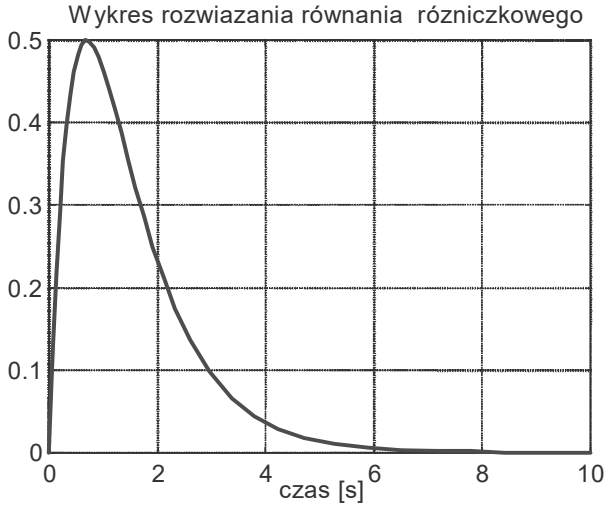
otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -3\dot{x} - 2x = -3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

na podstawie którego tworzymy poniższy model:



Ustalając warunki początkowe na obu integratorach (Int1 i Int2) oraz dobierając odpowiednie parametry symulacji, w wyniku otrzymujemy wykres rozwiązania:



Takie same wykresy rozwiązania równania różniczkowego można uzyskać w punktach 2.1 i 2.2

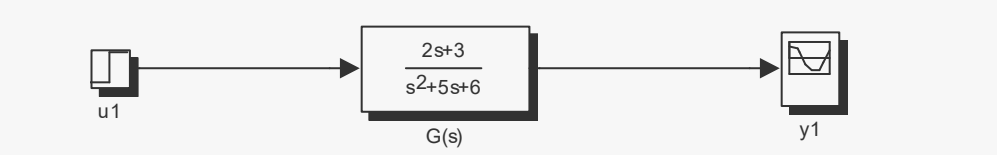
Przykład 4:

Skonstruować w Simulinku model równania różniczkowego

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=2\frac{du}{dt}+3u,\quad \text{dla war.pocz.}\quad y(0)=\dot{y}(0)=0$$

w postaci transmitancji operatorowej oraz w postaci równań stanu i równania wyjścia. Znaleźć odpowiedź skokową układu, gdy sygnałem wejściowym *u(t)* jest sygnał o amplitudzie równej jedności.

Rozwiązanie: Równaniu różniczkowemu (zapisanemu jako transmitancja) odpowiada schemat blokowy przedstawiony poniżej:

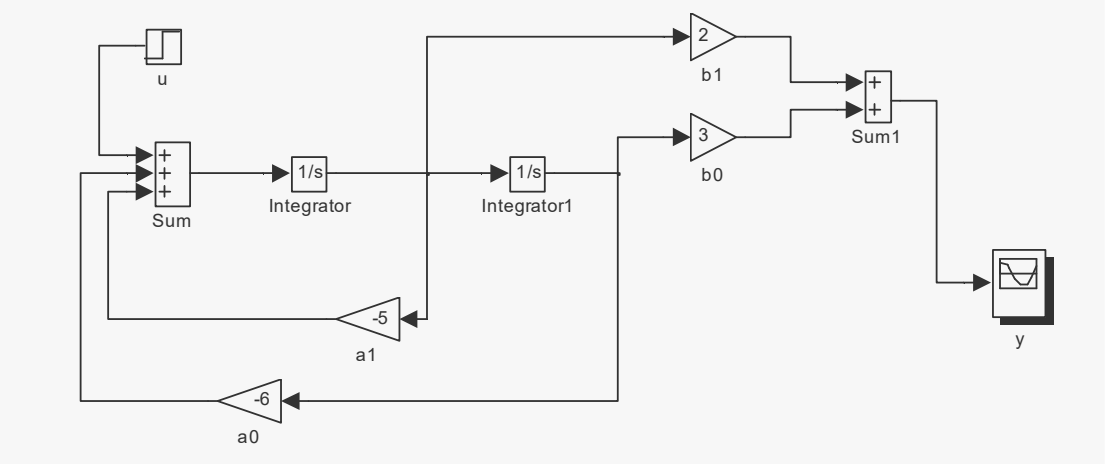


Przyjmując określone parametry symulacji otrzymujemy rozwiązanie w postaci wykresu.

Równaniu różniczkowemu zapisanemu jako

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-6x_1-5x_2+u\\ y=3x_1+2x_2\end{cases}$$

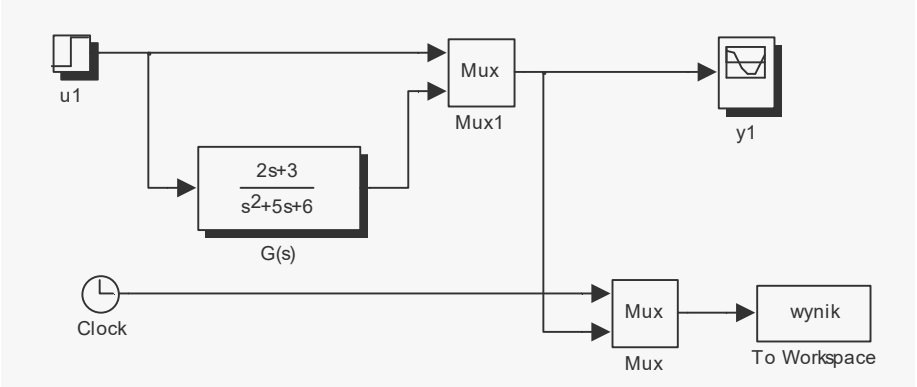
odpowiada poniższy schemat blokowy:



Ustalając zerowe warunki początkowe na integratorach oraz dobierając odpowiednie parametry symulacji otrzymujemy rozwiązanie w postaci wykresu, jak poprzednio.

2.4. Archiwizacja uzyskanych rozwiązań równań różniczkowych na dysku

Dla równania z przykładu 4 tworzymy poniższy schemat blokowy:



W przestrzeni roboczej Matlaba utworzona zostanie macierz o nazwie *wynik*, zawierająca trzy wektory zmiennych: czas symulacji, wymuszenie oraz odpowiedź skokowa układu. Aby zapisać tą macierz na dysku należy wykonać instrukcję:

```
>> save wynik -ascii
```

Poleceniem *clear* czyścimy przestrzeń roboczą a następnie wprowadzamy macierz *wynik* ponownie do przestrzeni roboczej z dysku:

```
>> load wynik -ascii
```

Ponowne wykreślenie uzyskanego rozwiązania równania z przykładu 4 można uzyskać po wpisaniu następujących instrukcji:

```
>> t = wyniki(:,1)   % Wektor czasu
>> u = wyniki(:,2)   % Wektor wymuszenia
>> y = wyniki(:,3)   % Wektor odpowiedzi
>> plot( t, u, 'r', t, y, 'g')
>> grid
```

3. Przebieg ćwiczenia

Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+4y=0,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=0, \dot{y}(0)=-1$

b) $2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=6,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=1 \text{ i } \dot{y}(0)=-2$

c) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+3y=0,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=1, \dot{y}(0)=0$

d) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+5y=0,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=3, \dot{y}(0)=0$

e) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+2y=4,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=1 \text{ i } \dot{y}(0)=0$

f) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+13y=0,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=1, \dot{y}(0)=0$

g) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+9y=0,\ \text{dla war.pocz. } y(0)=0, \dot{y}(0)=1$

wykorzystując funkcję **dsolve**, funkcję **ode45** oraz model równania przygotowany w Simulinku. Wykreślić przebieg funkcji y(t) otrzymanej w każdym z trzech rozwiązań i porównać otrzymane wyniki na jednym wykresie.

4. Sprawozdanie z przebiegu ćwiczenia

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń należy przygotować sprawozdanie, które powinno zawierać rozwiązania wybranego równania różniczkowego z punktu 3, wykorzystujące metodę symboliczną, numeryczną oraz model równania w Simulinku. Podać wnioski końcowe.

Literatura

[1] Brzózka J., Ćwiczenia *z Automatyki w MATLABIE i SIMULINKU*, Wydawnictwo Mikon, Warszawa 1997
[2] Tomera M., *Wprowadzenie do MATLABA*, http://www.am.gdynia.pl/~tomera/teoria_ster.htm, 2004
[3] Zalewski A., Cegieła R., *MATLAB: obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1996