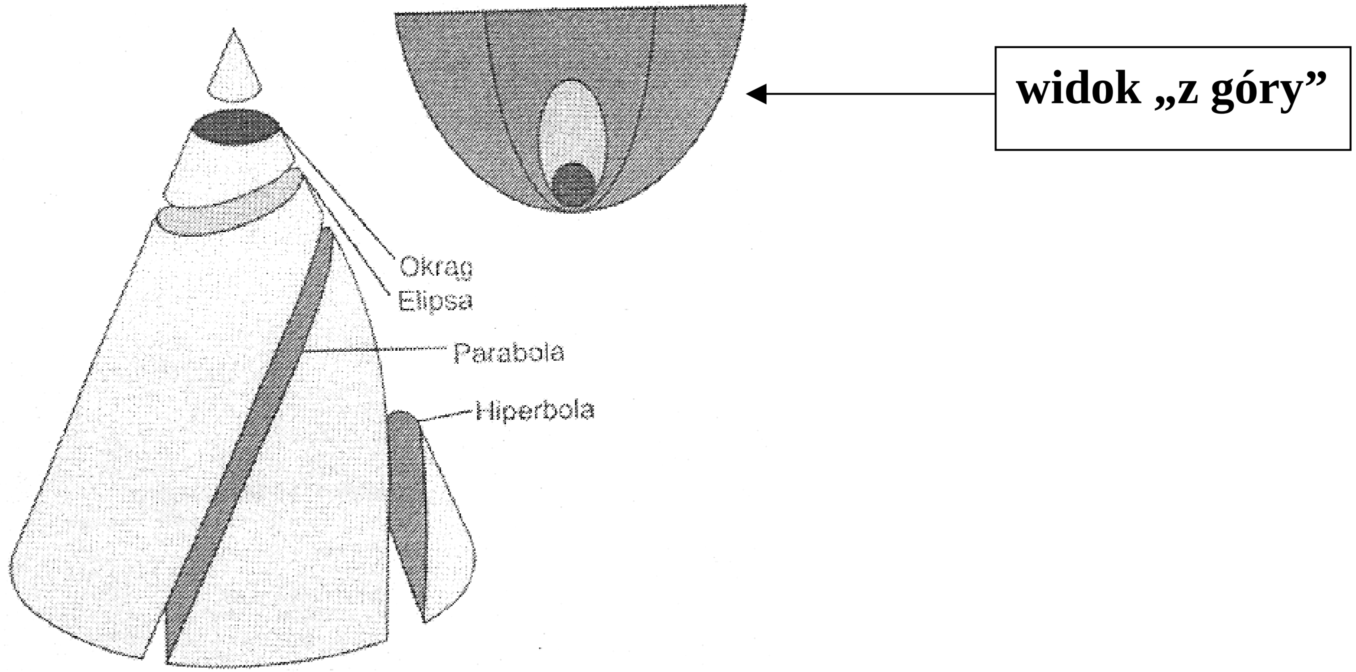
Związek praw Keplera z prawem grawitacji Newtona

Pierwsze prawo Keplera

Można ogólnie udowodnić (na podstawie praw Newtona), że jedyne możliwe trajektorie punktu materialnego w polu grawitacyjnym to krzywe stożkowe: elipsa, parabola, hiperbola (szczególny przypadek: prosta).
Dowód jest trudny.



Krzywe stożkowe

Drugie prawo Keplera

$$\boxed{\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta \mathbf{t}} = const}$$

Wynika z prawa zachowania momentu pędu. Moment pędu jest zachowany, ponieważ moment siły jest równy zeru.

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{m\,M_S}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

M_S **- masa Słońca**

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \left(-G\frac{m\,M_S}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\right) = 0$$ **bo $\vec{\mathbf{r}}$ i $\vec{\mathbf{F}}$ są równoległe**

stąd: $\vec{\mathbf{l}} = \mathbf{const}$

Obliczmy ten moment pędu:

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times (m\vec{\mathbf{v}}) = m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = m\,\vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})$$

przypomnienie:

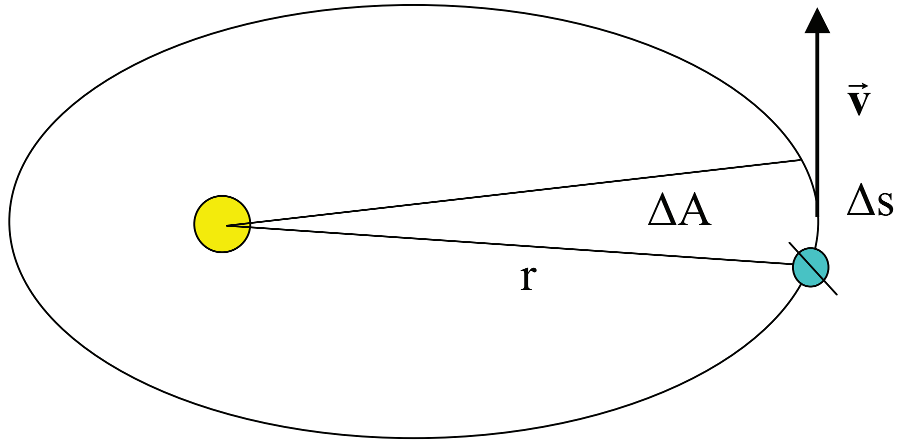
$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}} - (\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}$$

wykorzystanie:

$$\vec{\mathbf{l}} = m(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\boldsymbol{\omega}} - m(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}})\vec{\mathbf{r}} = mr^2\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\left|\vec{\mathbf{l}}\right| = mr^2\omega$$

Obliczmy teraz prędkość polową



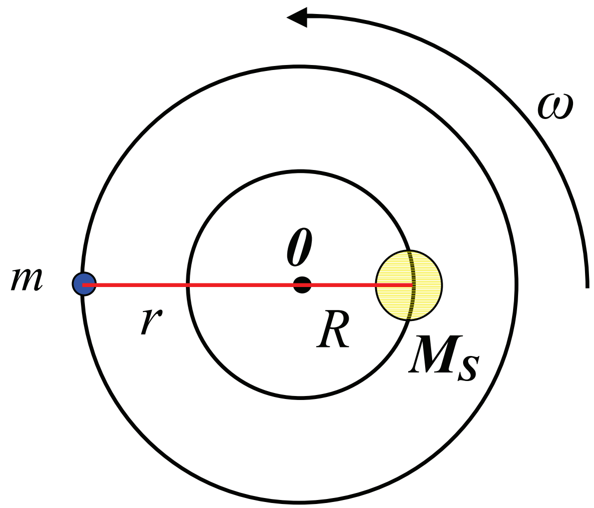
$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r \Delta s = \tfrac{1}{2} r v \Delta t = \tfrac{1}{2} r (\omega r) \Delta t = \tfrac{1}{2} r^2 \omega \Delta t$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \tfrac{1}{2} r^2 \omega = \frac{|\vec{\mathbf{l}}|}{2m} = const \qquad \textbf{cbdo}$$

Trzecie prawo Keplera

$$\boxed{\frac{\mathbf{T}^2}{\mathbf{a}^3} = const}$$

Wyprowadzimy je dla orbit kołowych.



z definicji środka masy:

$$m\,r = M_S\,R$$

$$m\,\omega^2 r = M_S\,\omega^2 R$$

$$m\,\omega^2 r = \frac{G\,m\,M_S}{(r+R)^2}$$

dla Słońca $R \approx 0$**, więc**

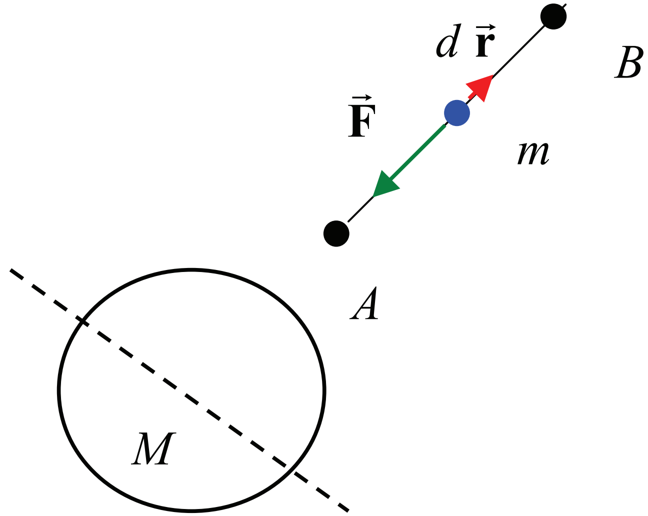
$$\omega^2\,r^3 = GM_S$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad = \mathrm{const}$$ **cbdo**

Energia potencjalna i potencjał pola grawitacyjnego

Energia potencjalna



$$\int_A^B -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\cos\angle\left(\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{r}}\right) = \cos\pi = -1$$

$$E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_A^B F\, dr =$$

$$= \int_A^B G\frac{mM}{r^2}\, dr = GmM\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GmM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$E_p(B) - E_p(A) = \left(-\frac{GmM}{r_B}\right) - \left(-\frac{GmM}{r_A}\right)$$

definicja energii potencjalnej:

$$E_p(r) = -\frac{GmM}{r}$$

potencjał:

$$U(r) = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Prędkości kosmiczne

I prędkość kosmiczna

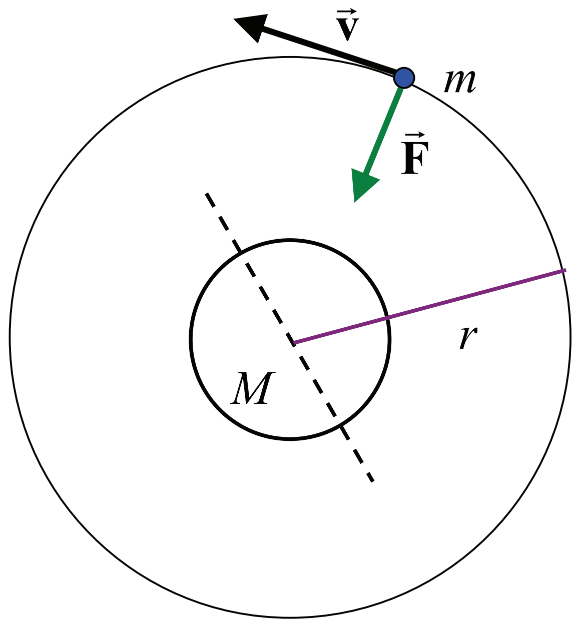
jest to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać ciału, aby mogło ono krążyć wokół Ziemi (lub innego ciała kosmicznego) po orbicie kołowej.

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{do\acute{s}}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{graw}}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



dla Ziemi $M = M_Z$
dla satelitów bliskich $r \approx R_Z$
po wstawieniu wartości liczbowych

$$\boxed{v_I \approx 8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}$$

Satelita telekomunikacyjny

musi być geostacjonarny (tzn. nieruchomy względem obracającej się Ziemi);

jego prędkość kątowa

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \text{ godziny}}$$

promień orbity z III prawa Keplera

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_Z}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}}$$

po wstawieniu

$$r \approx 42000 \text{ km}$$

to jest około 36000 km nad powierzchnią Ziemi.

Prędkość takiego satelity

$$v \approx 3 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

II prędkość kosmiczna

II prędkość kosmiczna (zwana też prędkością ucieczki), jest to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać ciału, aby ciało to pokonało przyciąganie Ziemi i zostało satelitą Słońca.

Inne sformułowanie problemu: należy nadać mu taką prędkość, aby odleciało „do nieskończoności”

$$E_k + E_p = const$$

w nieskończoności

$$E_k = 0, \quad E_p = 0, \qquad \textbf{więc } const = 0$$

na powierzchni Ziemi także

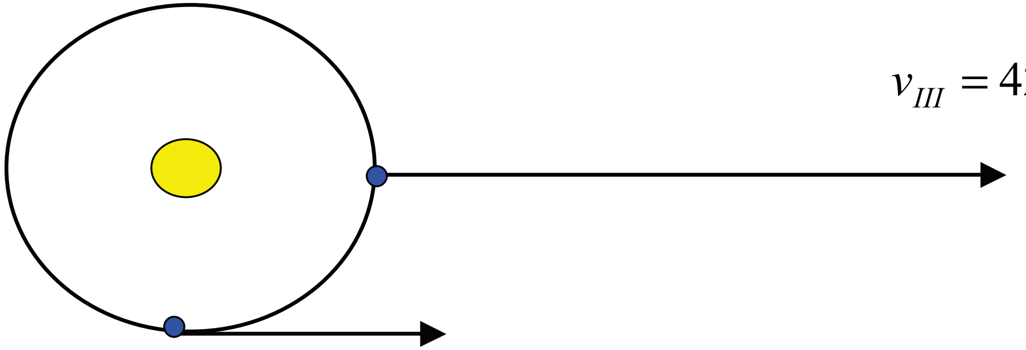
$$E_k + E_p = 0$$

$$\frac{m\,v^2}{2} - G\frac{mM_Z}{R_Z} = 0$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = v_I\sqrt{2} = 11{,}2\,\frac{km}{s}$$

III prędkość kosmiczna

jest to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać ciału, aby ciało to pokonało przyciąganie Ziemi i Słońca i opuściło Układ Słoneczny.



$$v_{III} = 42\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{III} = 16{,}7\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Wartość zależy od warunków początkowych.

$\mathbf{v_I}$	$\Rightarrow$ **I sztuczny satelita Ziemi**	**1957 rok,**	**pierwszy człowiek na orbicie 1961 rok**
$\mathbf{v_{II}}$	$\Rightarrow$ **I lot (bezzałogowy) na Księżyc**	**1959 rok,**	**załogowy 1969 rok**
$\mathbf{v_{III}}$	$\Rightarrow$ **I sonda kosmiczna wysłana poza Układ Słoneczny**		**1977 rok**