Rozdział 1

Zbiory, funkcje

W rozdziale tym Czytelnik przypomni sobie podstawowe fakty

- o zbiorach liczb; pozna oznaczenia: $I\!N$, $Z\!\!Z$, $I\!R$, $\mathbb{C}$ itp.
- o funkcjach, ich złożeniu i funkcjach odwrotnych,

1.1 Zbiory liczbowe

1.1.1 Liczby naturalne i zasada indukcji

Niewątpliwie ludzkość od zarania dziejów posługuje się liczbami naturalnymi. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy przez $I\!N$. Mamy więc $I\!N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Wiemy doskonale, że liczby naturalne możemy dodawać i mnożyć, i że działania te mają pewne własności, do których jesteśmy tak przyzwyczajeni, że nie ma potrzeby ich omawiać. Z innych własności liczb naturalnych najważniejsza jest tzw. *zasada indukcji*, która najczęściej formułowana jest następująco.

Zasada indukcji. Zakładamy, że podzbiór A zbioru $I\!N$ ma dwie własności:
1. $1 \in A$.
2. Jeśli liczba $n \in A$, to i liczba $(n + 1) \in A$.

Wtedy $A = N$.

Najczęściej zasada indukcji służy do dowodzenia, że jakaś własność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. Zbiór A jest wtedy definiowany jako zbiór tych liczb naturalnych, dla których zachodzi własność.

Przypomnijmy dwa ważne oznaczenia. Pierwsze z nich to *silnia*. Pamiętamy, że $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ oraz dodatkowo, że $0! = 1$. Drugie z nich to *symbol Newtona* $\binom{n}{k}$ (czytamy: n po k). Pamiętamy, że:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Zgodnie z definicją silni, $\binom{n}{k}$ ma sens o ile $0 \leqslant k \leqslant n$.

Symbol $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Symbol $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ jest skrótowym zapisem sumy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Na przykład:

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Doświadczenie wskazuje, że stosowanie tego symbolu stwarza pewne problemy. Dlatego już na początku zwróćmy uwagę na dwie rzeczy. Po pierwsze, że nie ma znaczenia jak oznaczymy wskaźnik sumowania. A zatem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

. Oba symbole oznaczają sumę perwszych n wyrazów ciągu. Warto także zauważyć, że

$$\sum_{k=1}^{n} = n,$$

gdyż jest to suma n jedynek. Zanim osiągniemy wprawę w posługiwaniu się tym symbolem dobrze jest, w razie wątpliwości, napisać sumę zarówno z użyciem symbolu sumy jak i bez.

Wzór dwumianowy Newtona. Dla dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dowód. Zastosujemy zasadę indukcji. Dla $n = 1$ wzór zachodzi bo

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1.$$

Przypuśćmy zatem, że wzór zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych od 1 aż do pewnego n włącznie. Pokażemy, że z tego faktu wynika prawdziwość wzoru także dla $n + 1$. Liczymy:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n) = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$(*) \qquad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

Zmieńmy wskaźnik sumowania w drugiej sumie we wierszu $(*)$ podstawiając $k + 1 = l$. Przyjmie ona wtedy postać

$$\sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n-l+1} b^l.$$

Zauważmy, że zmieniły się też granice sumowania. Ponieważ nie ma znaczenia jaką literą oznaczamy wskaźnik sumowania, wróćmy do litery k. Drugą sumę we wierszu $(*)$ możemy więc zapisać w postaci:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}.$$

Pierwszą sumę we wierszu $(*)$ możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k = a^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k$$

Dodając obie sumy z wiersza $(*)$ otrzymujemy

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1})a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1},$$

co można zapisać w postaci

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k.$$

Kończy to dowód naszego wzoru. ∎

1.1.2 Liczby całkowite i wymierne

Jeżeli ograniczylibyśmy się do liczb naturalnych, to proste operacje jak np. odejmowanie nie zawsze byłyby wykonalne. Powoduje to, że prościutkie równanie, przykładowo

$$3 + x = 2,$$

sformułowane przy użyciu liczb naturalnych nie ma rozwiązania w zbiorze liczb naturalnych. Aby zaradzić tej sytuacji musimy rozszerzyć zbiór liczb poprzez dodanie liczb ujemnych oraz zera. Powstaje w ten sposób zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Oznaczenie pochodzi od niemieckiego słowa „Zahl"(liczba). Mamy więc $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$. W zbiorze tym możemy dodawać i odejmować liczby bez ograniczeń. Podobnie jest z mnożeniem, ale już dzielenie nie zawsze jest wykonalne. Np. równanie

$$3x = 2$$

nie ma rozwiazania będącego liczbą całkowitą. Znowu musimy więc rozszerzyć nasz zbiór. Przez *liczby wymierne* rozumiemy liczby postaci $\frac{p}{q}$ gdzie obie liczby p, q są całkowite i ponadto $q \neq 0$. Tak określony zbiór oznaczamy przez $\mathbb{Q}$. Niestety, równanie

$$x^2 = 2$$

jest chyba najprostszym równaniem, które nie ma rozwiązań wymiernych. Fakt ten był znany już starożytnym Grekom. Dowód przdstawiony poniżej jest chyba pierwszym dowodem „nie wprost" w matematyce.

Twierdzenie. Liczba $\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

Dowód. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieją takie liczby naturalne p i q, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Możemy ponadto założyć, że ułamka $\frac{p}{q}$ nie można już „skrócić" (tzn. podzielić licznik i mianownik przez tę samę liczbę naturalną). W przeciwnym wypadku bowiem moglibyśmy go skracać tak długo jak byłoby to możliwe. Mamy zatem

$$\sqrt{2}q = p.$$

Stąd, podnosząc obie strony równania do kwadratu, otrzymujemy:

$$2q^2 = p^2.$$

Oznacza to, że p^2 jest liczbą parzystą, a więc i samo p też musi być parzyste. Można je zatem zapisać w postaci $p = 2a$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$. Ostatnie równanie można zapisać w postaci

$$2q^2 = 4p^2.$$

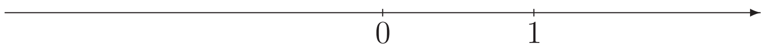
Stąd

$$q^2 = 2p^2.$$

Oznacza to, że q^2 jest liczbą parzystą, a więc i samo q też. Ostatecznie, zarówno p jak i q jest liczbą parzystą, co jest sprzeczne z założeniem, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny. A zatem nasze przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną doprowadziło nas do sprzeczności, co kończy dowód twierdzenia. ■

1.1.3 Liczby rzeczywiste i zasada ciągłości

Ścisła definicja liczb rzeczywistych nie jest nam do niczego potrzebna i nie będziemy jej przypominać, zwłaszcza, że jest nieco skomplikowana. W zupełności wystarczy, jeżeli Czytelnik ma intuicyjne wyobrażenie o liczbach rzeczywistych tzn. jeśli „czuje", że można je utożsamiać z punktami prostej zwanej „osią liczbową". Przez oś liczbową rozumiemy prostą (rysujemy ją poziomo) wraz z dwoma wyróżnionymi punktami. Jeden z nich oznaczamy przez 0 (zero), a drugi, leżacy na prawo od zera, przez 1 (jeden). Punkt zero dzieli oś na dwie półproste zwane półosiami: dodatnią i ujemną. Liczby wymierne dodatnie utożsamiamy z punktami półosi dodatniej, a ujemne z punktami półosi ujemnej. Oczywiście, liczbę $\frac{p}{q}$ (dla p, q naturalnych) utożsamiamy z punktem wyznaczonym następująco: wpierw odcinek 01 odkładamy p razy na półosi dodatniej, a następnie otrzymany odcinek dzielimy na q części. Zauważmy, że nie wszystkie punkty osi są liczbami wymiernymi. (np. jeśli zbudujemy kwadrat o boku 01, to jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$). Liczby, które nie są wymierne nazywamy *niewymiernymi*.



Rysunek 1.1: Oś liczbowa

Zasada ciągłości. Jeżeli podzbór A zbioru $\mathbb{R}$ jest ograniczony od góry, to istnieje kres górny zbioru A tj. najmniejsza liczba ograniczająca A od góry.

Uwaga. Zauważmy, że zasada ciągłości nie jest prawdziwa w zbiorze $\mathbb{Q}$. Istotnie, niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych mniejszych od $\sqrt{2}$. Zbiór ten nie ma kresu górnego, który byłby liczbą wymierną.

1.1.4 Liczby zespolone

Niestety, nawet dysponując liczbami rzeczywistymi ciągle łatwo podać proste rownanie, jak np.

$$x^2 = -1,$$

które nie ma rozwiązań rzeczywistych. Stąd konieczność dalszego rozszerzenia zbioru liczb. Ukoronowaniem tego procesu są liczby zespolone, których definicję odłożymy jednak na później. Powiedzmy jedynie, że zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$ (od słowa *complex*). [1]

> Przedstawione powyżej krótkie zestawienie najważniejszych zbiorów liczbowych nie jest ujęciem historycznym. Tak naprawdę, to liczby wymierne pojawiły się w tym samym czasie co i liczby naturalne, a liczby zespolone niewiele później jak ujemne.

1.1.5 Inne zbiory

Zanim przypomnimy definicję iloczynu kartezjańskiego zbiorów podkreślmy wyraźnie różnicę między zbiorem $\{a, b\}$ mającym dwa elementy, a parą (a, b). W parze, jeden z elementów (ten, który stoi na pierwszym miejscu) jest pierwszy, a drugi jest drugi. W naszym przypadku a jest pierwszym elementem pary, a b drugim. W zbiorze $\{a, b\}$ oba elementy są „równouprawnione". W szczególności $\{a, b\} = \{b, a\}$, ale, z reguły $(a, b) \neq (b, a)$. Inaczej mówiąc w parze mamy ustalony porządek. Dla podkreślenia tego faktu mówi się czasem „para uporządkowana", ale nie jest to konieczne, bo „para" z definicji jest uporządkowana. Podobnie definiujemy trójki, czwórki, czy ogólnie n-tki jako uporządkowane zbiory o trzech, czterech czy n elementach.

[1] Autor wie, że w szkole średniej zbiory liczb całkowitych i zespolonych są oznaczane na odwrót.

Definicja. Iloczynem kartezjańskim $A \times B$ dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór par (a, b) gdzie $a \in A$, natomiast $b \in B$.

Jeśli $A = B$ to piszemy A^2 zamiast $A \times B$. Podobnie definiujemy iloczyn kartezjański trzech zbiorów (jako zbiór trójek), czy więcej zbiorów. Dla nas szczególnie interesujące będą zbiory $\mathbb{R}^n$. Dla $n = 1, 2, 3$ mają one oczywistą interpretację geometryczną. I tak zbiór $\mathbb{R}$ utożsamiamy z prostą, zbiór $\mathbb{R}^2$ z płaszczyzną, a zbiór $\mathbb{R}^3$ z przestrzenią.

Jeśli chodzi o prostą rzeczywistą to najczęściej będziemy mieć do czynienia z przedziałami. Niech a, b będą dwoma liczbami rzeczywitymi takimi, że $a < b$. Zbiór $\{x \in \mathbb{R}^1 : a \leqslant x \leqslant b\}$ nazywamy *przedziałem domkniętym* i oznaczamy przez $[a, b]$. Zbiór $\{x \in \mathbb{R}^1 : a < x < b\}$ nazywamy *przedziałem otwartym* i oznaczamy przez (a, b). Łatwo się domyśleć jak definiuje się przedział $(a, b]$ i $[a, b)$. Zbiór $\{x \in \mathbb{R}^1 : x \geqslant a\}$ oznaczamy przez $[a, +\infty)$. Jest to przykład przedziału nieskończonego. Definicję pozostałych przedziałów pozostawiamy Czytelnikowi. Korzystając z dopiero co wprowadzonych oznaczeń zbiór $\mathbb{R}$ piszemy czasem jako $(-\infty, +\infty)$.

Na zakończenie przypomnijmy oznaczenia stosowane na kresy, dolny i górny, zbioru $A \subset \mathbb{R}$: $\inf A$, $\sup A$.

Teorie aksjomatyczne. Warto w tym miejscu powiedzieć dwa słowa o tym jak formalnie rzecz biorąc powinna wyglądać teoria. Otóż zaczynamy od pewnych *pojęć pierwotnych*, których nie definiujemy oraz od pewnych związków miedzy nimi, które uznajemy za prawdziwe z góry tzn. bez dowodu. Są to tzw. *aksjomaty*. Teoria są wszystkie *twierdzenia*, czyli zdania, których prawdziwość wynika z przyjętych aksjomatów i zasad logiki. Przykładowo, dla nas **zasada indukcji** oraz **zasada ciągłości** są aksjomatami.

1.2 Funkcje

Oznaczenie

$$f : A \longmapsto B$$

mówi, że funkcja f **każdemu** elementowi zbioru A przyporządkowuje jeden (i tylko jeden) element zbioru B. Piszemy też czasem

$$f : A \ni x \to f(x) \in B;$$

Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji f, a zbiór B – przeciwdziedziną. Zbiory te stanowią część definicji funkcji na równych prawach z „przepisem" na przyporządkowanie f. Jeżeli mówimy, że mamy daną funkcję, oznacza to, że wiemy jaka jest jej dziedzina, wiemy jak dla każdego elementu z dziedziny obliczyć wartość i wreszcie wiemy w jakim zbiorze tę wartość umieszczamy.

Zauważmy, że popularne zadania w stylu „znajdź dziedzinę funkcji f" formalnie rzecz biorąc są bez sensu. Jeśli bowiem mamy daną funkcję, to mamy też jej dziedzinę i nie mamy nic do szukania. W zadaniach tych mamy podaną nie tyle funkcję co „przepis" i chodzi o znalezienie największego możliwie zbioru, do którego ten przepis można by zastosować (por. także następną uwagę na marginesie).

Przykłady:

1.
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

2.
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f(A) = \{y \in B : y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in A\}$$

Zbiór ten nazywamy zbiorem wartości funkcji f

Definicja.

Funkcję $f : A \to B$ nazywamy *"na (zbiór)" (suriekcją)*, jeżeli $f(A) = B$.

Funkcję $f : A \to B$ nazywamy *różnowartościową (iniekcją)*, jeżeli dla $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ mamy $f(x_2) \neq f(x_2)$

Funkcję $f : A \to B$ nazywamy *bijekcją* jesli jest różnowartościowa i odwzorowuje A na B (czyli jest jednocześnie suriekcją i iniekcją).

1.2.1 Funkcje i równania

Jak wiadomo, bardzo dużo czasu w matematyce poświęca się na rozwiązywanie równań. Ogólna postać równania jest następująca:

$$f(x) = y \tag{$*$}$$

gdzie dana jest funkcja f oraz „prawa strona" y, a szukamy x. Podstawowe pytania dotyczą istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania i brzmią: czy równanie ma rozwiązanie? czy może mieć więcej niż jedno rozwiązanie? Odpowiedzi na te pytania są ściśle związane z własnościami funkji f. I tak fakt, że f jest suriekcją jest równoważny temu, że dla każdej prawej strony $y \in B$ równanie $(*)$ ma rozwiązanie. Z kolei fakt, że f jest iniekcją jest równoważny temu, że dla każdej prawej strony $y \in B$ równanie $(*)$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Jeśli f jest bijekcją to oznacza to, że dla każdej prawej strony równanie (*) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

> Powiedzmy sobie wyraźnie, że w dalszym ciągu nie będziemy zbyt rygorystycznie przestrzegać omawianych tu zasad wysławiania się, gdyż inaczej tekst stałby się mało czytelny. Nie oznacza to bynajmniej, że wypowiedzi nasze będą nieścisłe. Oznacza to jedynie, że pewne rzeczy będą przemilczane; bądź dlatego, że są w danym momencie nieistotne, bądź dlatego, że są łatwe do odgadnięcia. Umawiamy się w szczególności, że jeśli mówiąc o funkcji podajemy tylko przepis f to znaczy, że dziedziną funkcji jest największy zbiór jaki się na to nadaje, a zbiór wartości zawarty jest w $I\!\!R$. Przykładowo, mówiac o funkcji $f(x) = x^2$ mamy na myśli, że $f : I\!\!R^1 \mapsto I\!\!R$, natomiest wyrażenie funkcja $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ oznacza funkcję $g : [-1,1] \mapsto I\!\!R$.

1.2.2 Składanie funkcji. Funkcja odwrotna

Podstawową operacją jaką można wykonywać na funkcjach jest ich składanie. Dwa przykłady powinny przypomnieć Czytelnikowi o co tu chodzi.

$$\begin{tikzcd} I\!\!R \arrow[r, "\sin"] \arrow[dr, "\sin^2 x"'] & I\!\!R \arrow[d, "()^2"] \\ & I\!\!R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\!\!R \arrow[r, "()^2"] \arrow[dr, "\sin x^2"'] & I\!\!R \arrow[d, "\sin"] \\ & I\!\!R \end{tikzcd}$$

Jeżeli $f : A \mapsto B$ jest bijekcją, to można wówczas zdefiniować funkcję $g : B \mapsto A$ następująco:

$$g(y) = x \quad \text{wtedy i tylko wtedy} \quad f(x) = y.$$

Funkcję g nazywamy *funkcją odwrotną* do f i oznaczamy f^{-1}. Zauważmy, że funkcją odwrotną do f^{-1} jest funkcja f. Mamy więc $(f^{-1})^{-1} = f$. Wprost z definicji mamy:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \quad \text{oraz} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

Z trzech funkcji omawianych wyżej o przepisie $y = f(x) = x^2$ jedynie funkcja $f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ jest bijekcją. Funkcja odwrotna do niej to nic innego jak pierwiastek kwadratowy.

O pierwiastkach w ogóle. Z pierwiastkami są kłopoty. Po pierwsze biorą się one stąd, że słowa „pierwiastek" używa się w różnych znaczeniach. Jednym z nich jest *pierwiastek z liczby*. Pamiętamy ze szkoły, że „pierwiastkiem kwadratowym z liczby dodatniej b nazywamy taką liczbę a, że $a^2 = b$" oraz oznaczenie $\sqrt{b}$. W tym sensie pierwiastek jest więc funkcją. Inaczej

$$\sqrt{\ } \ : \ [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty).$$

A zatem pierwiastek z czterech wynosi dwa. Słowo pierwiastek może także oznaczać *pierwiastek równania*. Mówimy przykładowo, że równanie

$$x^2 = 4$$

ma dwa pierwiastki, 2 oraz -2. Liczba -2 **nie jest** jednak pierwiastkiem z czterech.

1.2.3 Funkcje cyklometryczne.

Zacznijmy od definicji funkcji *arcus sinus*. Funkcja sinus rozpatrywana na całym zbiorze $I\!R$ czyli $\sin : I\!R^1 \mapsto I\!R$ nie jest oczywiście bijekcją. Jeżeli jednak zawęzimy dziedzinę do przedziału $[-\pi/2, \pi/2]$, a przeciwdziedzinę do zbioru wartości czyli do przedziału $[-1, 1]$, to tak określona funkcja już jest bijekcją. Funkcję odwrotną do niej nazywamy arcus sinus i oznaczamy arc sin. Mamy więc:

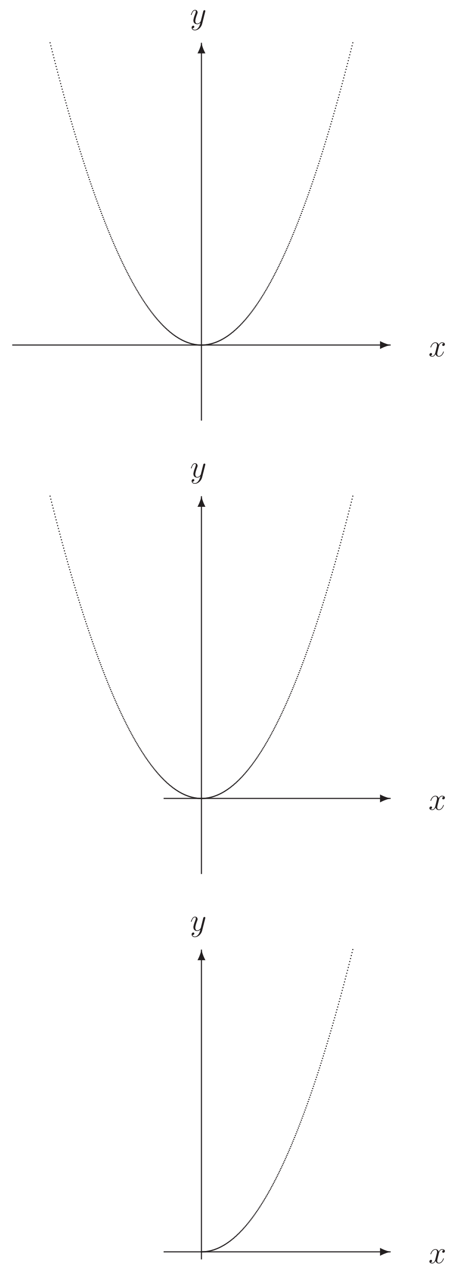
$$\text{arc}\sin : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$$

Podobnie definiujemy trzy inne funkcje, które wszystkie nazywamy funkcjami cyklometrycznymi. A zatem:

Arc cos jest funkcją odwrotną do funkcji $\cos : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$.

Arc tg jest funkcją odwrotną do funkcji $\cos : [-\pi/2, \pi/2] \mapsto I\!R$.

Arc ctg jest funkcją odwrotną do funkcji $\cos : [0, \pi] \mapsto I\!R$.

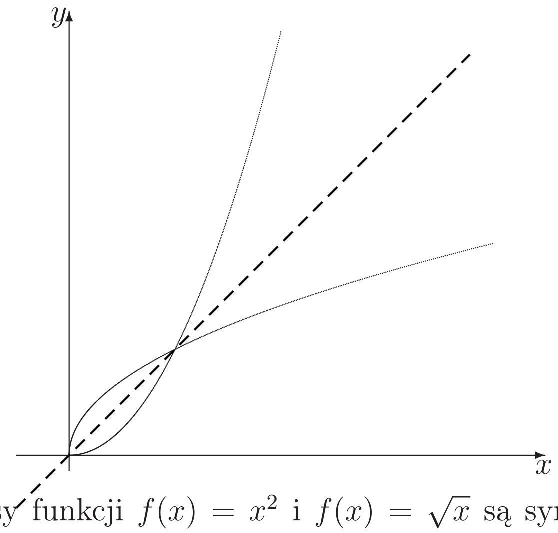


$$f : (-\infty, +\infty) \mapsto (-\infty, +\infty)$$

$$f : (-\infty, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$$

$$f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$$

Rysunek 1.2: Trzy różne funkcje, choć ten sam przepis



Rysunek 1.3: Wykresy funkcji $f(x) = x^2$ i $f(x) = \sqrt{x}$ są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$