Rozdział 3

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

3.1 Definicja i podstawowe wzory

3.1.1 Pochodna funkcji w punkcie

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na przedziale otwartym I i niech $x_0 \in I$.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica

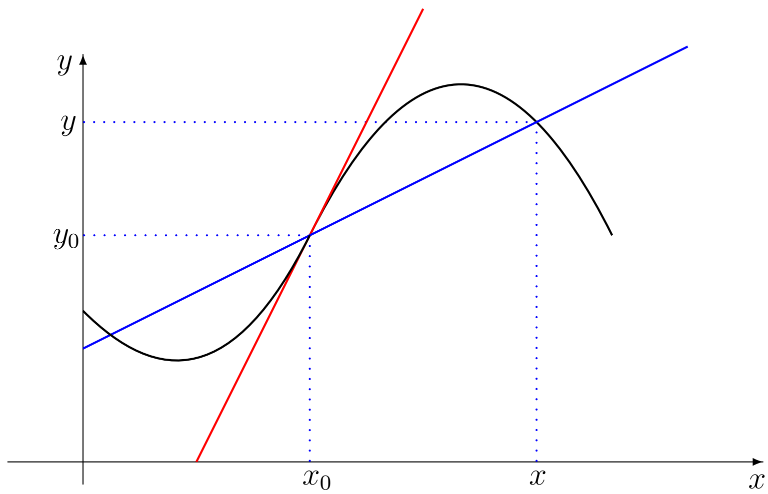
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.

Uwaga. Iloraz występujący w powyższej definicji nazywamy *ilorazem różnicowym*. Zapisujemy go czasem inaczej. Przykładowo, podstawiając $x = x_0 + h$, możemy granicę z definicji zapisać następująco:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jeśli oznaczymy $\Delta y \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0)$, a $\Delta x = \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$, to granica przyjmie



Rysunek 3.1: Wykres funkcji, siecznej i stycznej

postać

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Δx nazywamy *przyrostem* zmiennej x, a Δy, przyrostem zmiennej y.

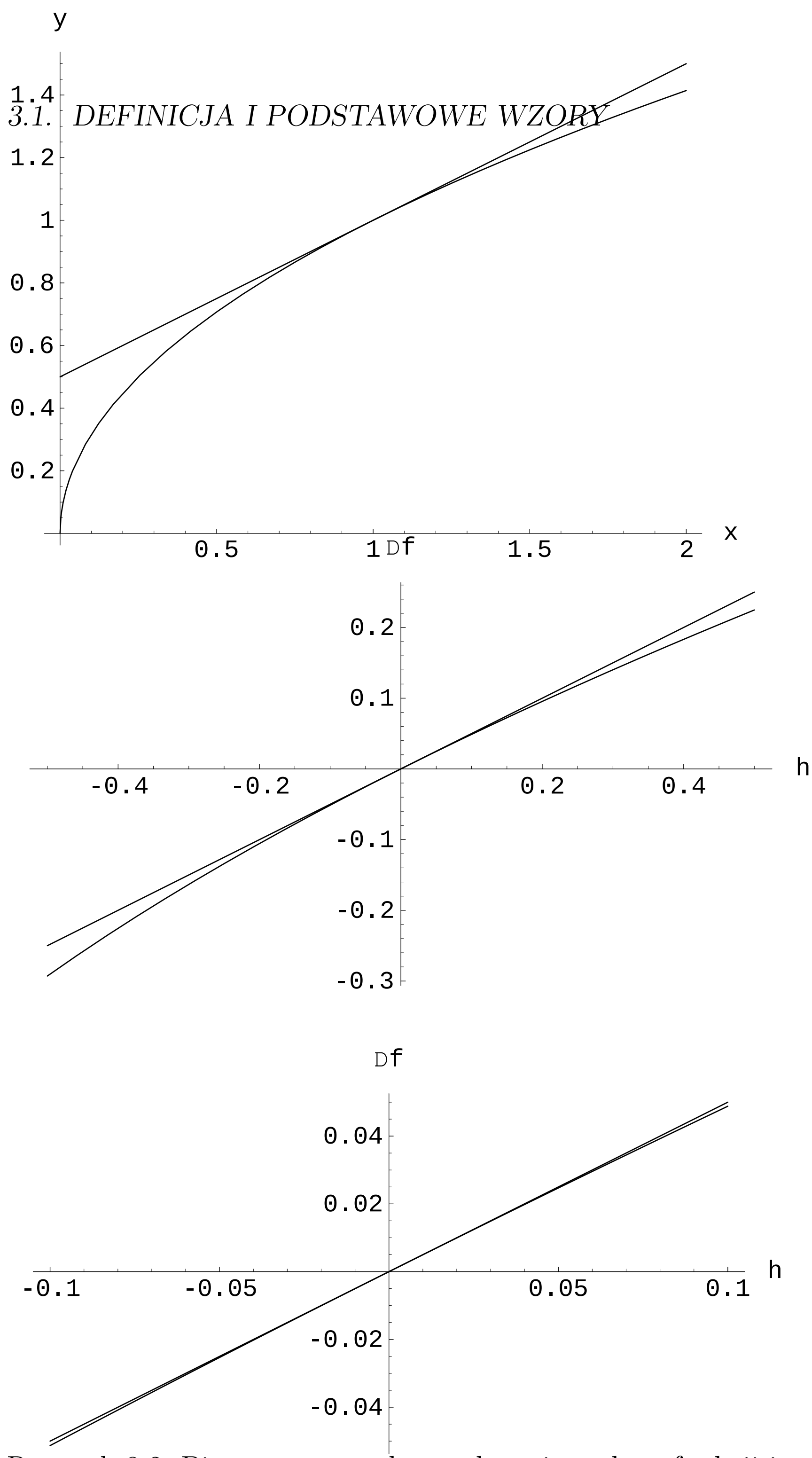
Wartość ww. granicy, czyli pochodna funkcji f w punkcie x_0 oznaczamy przez $f'(x_0)$ lub $\frac{df(x_0)}{dx}$. Możemy też napisać $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x\,=\,x_0}$.

Pochodna funkcji jako funkcja

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na przedziale otwartym I. Załóżmy, że w każdym punkcie przedziału I istnieje pochodna. Jak powiedzieliśmy wyżej, pochodna funkcji f w danym punkcie jest liczbą. Zatem wzór

$$I \ni x \longmapsto f'(x) \in I\!R$$

definiuje nową funkcję $I \mapsto I\!R$. Nazywamy ją *pochodną funkcji* f, a o samej funkcji f mówimy, że jest *różniczkowalna* (w przedziale I).



Rysunek 3.2: Pierwszy rysunek przedstawia wykres funkcji i stycznej do wykresu w punkcie $(1, 1)$. Rysunek środkowy przedstawia powiększenie poprzedniego (gdzie początek ukadu został przesunięty do punktu $(1, 1)$). Dolny rysunek przedstawia jeszcze większe powiększenie

Pochodna a styczna

Zauważmy (por. rys.3.1), że tzw. sieczna, tj. prosta przechodząca przez punkty (x_0, y_0) oraz (x, y) ma tangens kąta nachylenia do osi x równy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kiedy $x \to x_0$ i $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, to styczna staje się styczną, a $f'(x_0)$ jest tangensem kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) do osi x.

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu

Twierdzenie. Niech funkcje u i v będą funkcjami różniczkowalnymi określonymi na przedziale I. Wtedy funkcje $u+v$, $u-v$ i $u \cdot v$ też są różniczkowalne. Jeśli $\forall x \in I, v(x) \neq 0$ to $\frac{u}{v}$ też jest różniczkowalna. Ponadto zachodzą wzory:

$$\boxed{\begin{gathered}(u+v)' = u' + v' \\ (u-v)' = u' - v' \\ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ (\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}\end{gathered}}$$

Warto zapamiętać osobno jeden szczególny przypadek. Ponieważ pochodną funkcji stałej jest funkcja identycznie równa zero, to ze wzoru na pochodną iloczynu wynika, że:

$$\boxed{(\alpha \cdot v)' = \alpha \cdot v'}$$

Wzór ten, wraz ze wzorem na pochodną sumy oznacza po prostu, że

operacja różniczkowania jest liniowa.

3.1.2 Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie. Rozważmy dwie funkcje, $x = g(t)$; $g : I_1 \mapsto I_2$ oraz $y = f(x)$; $f : I_2 \mapsto I_3$.

Jeżeli obie one są różniczkowalne, to i funkcja złożona $(f \circ g)(t)$; $f \circ g : I_1 \mapsto I_3$ też jest różniczkowalna i zachodzi wzór:

$$[(f \circ g)(t)]' = f'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Zapiszmy jeszcze raz powyższy wzór używają innych oznaczeń. Mamy więc

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x\,=\,g(t)} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Najbardziej sugestywna jest następująca postać tego wzoru:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.}$$

> Należy pamiętać, że wyrażenie postaci $\frac{dy}{dx}$ jest **jednym symbolem** a nie np. ilorazem. Ostatni wzór w ramce nie wynika więc z tego, że „ dx się skraca". Nie zmienia to faktu, że dobrze się go zapamiętuje właśnie z powodu tego „skracania".

3.1.3 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie. Niech $y = f(x)$; $f : I_1 \mapsto I_2$ będzie funkcją różniczkowalną, odwracalną i niech $f'(x) \neq 0$ dla $x \in I_1$. Wtedy funkcja odwrotna f^{-1} też jest różniczkowalna i zachodzi wzór:

$$(f^{-1})'(y)\Big|_{y = f(x)} = (f'(x))^{-1}.$$

Ostatni wzór piszemy też w formie

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\Big|_{y = y(x)}\right)^{-1}.}$$

Dowód. (szkic) Dla uproszczenia zapisu połóżmy $f^{-1} = g$. A zatem, jeśli $y = f(x)$, to $x = g(y)$. Niech $k = f(x+h) - f(x)$ będzie przyrostem zmiennej x. Wtedy

$$f(x+h) = f(x) + k = y + k.$$

Obliczając wartośś funkcji g dla $f(x+h)$ oraz $y+k$ otrzymujemy, że

$$h = g(y+k) - g(y).$$

Zauważmy, że $h \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \to 0$. A zatem

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{g(y+k) - g(y} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

■

3.1.4 Pochodne znanych funkcji

$(\mathrm{const})' = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ gdzie $n \in \mathbb{N}; x > 0$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ gdzie $\alpha \in \mathbb{R}; x > 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ gdzie

$(\operatorname{ctg})' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ gdzie

$(a^x)' = (\ln a)a^x$ gdzie $a > 0, a \neq 1$

$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)x}$ gdzie

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ gdzie

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ gdzie

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$(\operatorname{ctgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$

Dowody niektórych wzorów

Pokażemy przykładowo, że $(\sin x)' = \cos x$.

Niech $y = \sin x$. Iloraz różnicowy ma postać $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$	
$\Downarrow$	ze wzoru na sinus sumy
$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$.	
Drugi składnik zmierza do $\cos x$.	bo $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$
Pierwszy skadnik przekształcamy do postaci $\sin x \frac{-\sin^2(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$	ze wzoru na $\cos 2\alpha$
Łatwo widać, że to wyrażenie $\to 0$, gdy $h \to 0$.	bo $\frac{\sin h/2}{h/2} \to 1$, a $\sin(h/2) \to 0$.

Pokażemy teraz, że $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Niech $y = \arcsin x$. Oznacza to, że $y = y(x)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $x = x(y)$ odwzorowującą przedział $(-\pi/2, \pi/2)$ na przedział $(0, 1)$. Ponadto, $\frac{dx}{dy} = \cos y$ i jest $\neq$ dla $y \in (-1, 1)$	
$\Downarrow$	Z twierdzenia o różniczkowaości funkcji odwrotnej
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}\Big\vert_{x = \sin y}$	
$\Downarrow$	Przekształcenia z wykorzystaniem wzoru $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

3.1.5 Pochodna logarytmiczna

Niech $f : (a, b) \longmapsto I\!R$ będzie funkcją różniczkowalną i $f(x) > 0$. Wtedy funkcja $\ln f$ też jest różniczkowalna. Jej pochodną nazywamy *pochodną* *logarytmiczną* funkcji f. Zachodzi wzór:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wzór ten pozwala na wyrażenie pochodnej funkcji f za pomocą jej pochodnej logarytmicznej, co jest przydatne w sytuacji gdy ta ostatnia jest łatwa do obliczenia, mammy bowiem

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.}$$

Przykłady:

1. Dla $x \geq 0$, niech $f(x) = x^\alpha$ gdzie $\alpha \in I\!R$. Wtedy $f'(x) = x^\alpha(\ln x^\alpha)' = x^\alpha \alpha(\ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

2. Dla $x \geq 0$, niech $f(x) = x^x$. Wtedy $f'(x) = x^x(\ln x^x)' = x^x(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

3.2 Podstawowe twierdzenia. Ekstrema

Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \longmapsto I\!R$ ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ *maksimum (lokalne)* jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mamy $f(x) \leq f(x_0$.

Podobnie definiujemy minimum lokalne. Słowem *ekstremum* określamu maksimum lub minimum.

Twierdzenie Fermata (o warunku koniecznym dla ekstremum). Jeśli funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \longmapsto I\!R$ ma w punkcie $c \in (a, b)$ maksimum (lub minimum) lokalne to $f'(c) = 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że w c jest maksimum lokalne i rozważmy ułamek

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

W pewnym otoczeniu punktu c czyli w przedziale $(c-\delta, c+\delta)$ dla pewnego δ, licznik jest zawsze ≥ 0. Cały ułamek zatem jest ≥ 0 dla $h > 0$ i ≤ 0 dla $h < 0$. Nierówności te się *zachowają* gdy $h \to 0$, natomiast ułamek jako taki będzie zbieżny do $f'(c)$. Otrzymamy $f'(c) \geq 0$ oraz $f'(c) \leq 0$, a zatem $f'(c) = 0$. ■

Twierdzenie Rolle'a. O funkcji $f : [a, b] \longmapsto I\!R$ zakładamy, że:

1. f jest ciągła w $[a, b]$,
2. f jest różniczkowalna w (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Wtedy istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła, to z twierdzenia Weirestrassa w pewnym punkcie przyjmuje wartość największą, a w pewnym najmniejszą. Przypuśćmy, że jeden z nich (np. ten, w którym jest wartość największa) leży wewnątrz przedziału $[a, b]$. Nazwijmy go c. W punkcie c mamy oczywiście maksimum lokalne. Na podstawie twierdzenia Fermata $f'(c) = 0$.

Jeśli zarówno wartość największa jak i najmniejsza jest przyjmowana na krańcach przedziału, to oznacza, że funkcja nasza jest $\equiv$ const, a więc f' jest równa zero dla każdego punktu wewnątrz przedział $[a, b]$. ■

Jednym z najważniejszych twierdzeń rachunku różniczkowego jest niewątpliwie poniższe twierdzenie zwane twierdzeniem *Lagrange'a (o wartości średniej)*, którego szczególnym przypadkiem jest dopiero co udowodnione twierdzenie Rolle'a.

Twierdzenie Lagrang'a. Niech $f : [a, b] \longmapsto I\!R$ będzie funkcją ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wtedy istnieje takie $c \in (a,b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Połóżmy $\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Łatwo widać, że funkcja Φ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Niech c będzie punktem, w którym $\Phi'(c) = 0$. Wystarczy teraz obliczyć pochodną funkcji Φ. ■

Podobny chwyt stosuje się przy dowodzie twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej, które jest uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a.

Twierdzenie. Niech $f, g : [a,b] \longmapsto I\!R$ będą dwoma funkcjami ciągłymi w $[a,b]$ i różniczkowalnymi w (a,b). Ponadto, niech $g'(x) \neq 0$ w (a,b). Wtedy istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dowód. (szkic) Funkcja $\Psi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(x))$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. ■

Uwaga. Zauważmy, że kładąc $g(x) = x$ dostajemy twierdzenie poprzednie.

3.3 Reguła de l'Hospitala

Tzw. reguła de l'Hospitala[1] jest nadzwyczaj użytecznym narzędziem w obliczaniu granic funkcji. Stwarza jednak pewien kłopot „dydaktyczny" polegający na tym, że jej użycie wymaga rózniczkowania, czyli czegoś co zgodnie z logiką wykładu omawiamy później niż zajmujemy się granicami. A oto omawiana reguła.

[1]czyt: delopitala

Reguła de l'Hospitala. Przypuśćmy, że funkcje $u = u(x)$ i $v = v(x)$ są różniczkowalne w otoczeniu punktu a i ponadto $v(x)$ i $v'(x)$ są różne od 0 dla $x \neq a$. Jeżeli iloraz $\frac{u(x)}{v(x)}$ jest w punkcie $x = a$ (dopuszczamy $a = +\infty$ lub $a = -\infty$) symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ i ponadto istnieje granica $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, to istnieje też granica $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ i zachodzi wzór

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

Dowód. Udowodnimy jedynie przypadek, gdy iloraz $\frac{u(x)}{v(x)}$ jest w punkcie $x = a$ symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$.

Stosując twierdzenie Cauchy'ego do przedziału $[a, x]$ otrzymujemy

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0} = \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}$$

gdzie $\xi \in [a, x]$. Zatem, dla $x \to a$ także $\xi \to a$, co kończy dowód. ∎

Przykłady:

1. Zastosujmy powyższą regułe do obliczenia granicy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

W $+\infty$ jest to symbol $\frac{\infty}{\infty}$, a zatem rozważmy iloraz (pochodna licznika)/(pochodna mianownika) czyli

$$\frac{2x}{e^x}.$$

Dalej jest to symbol $\frac{\infty}{\infty}$, więc rozważamy iloraz

$$\frac{2}{e^x}.$$

To już nie jest symbolem $\frac{\infty}{\infty}$. Licznik dąży do 2, a mianownik do $+\infty$. Ułamek zatem dąży do zera. Na podstawie reguły de l'Hospitala także

$$\frac{2x}{e^x} \to 0.$$

Jeszcze raz stosując regułę de l'Hospitala mamy

$$\frac{x^2}{e^x} \to 0.$$

2. Podamy jeszcze przykład pokazujący jak sobie radzić z symbolem 1^∞. Obliczymy $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

   Jest to przykład symbolu 1^∞. Połóżmy $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ i zajmijmy się $\ln f$. Mamy

$$\ln f = \frac{1}{x}\ln\cos x = \frac{\ln(\cos x)}{x}.$$

   Obliczmy stosunek pochodnych licznika i mianownika. Mamy

$$\frac{(\ln(\cos x))'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1} \longrightarrow 0,$$

   przy $x \to$. Stąd wynika, na podstawie reguły de l'Hospitala oraz ciągłości logarytmu, że $f \to 1$.

3.4 Nieskończenie małe.

3.4.1 Nieskończenie małe. Symbol „o małe"

Nieskończenie małe

Jeżeli $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, to mówimy, że (wielkość) f jest *nieskończenie małą* w otoczeniu punktu a.
Uwaga. Używając tej obrazowej nomenklatury należy zwracać uwagę na dwa fakty:

- co jest zmienną,
- w otoczeniu którego punktu prowadzimy rozważania.

Porównywanie nieskończenie małych

Przypuśćmy, że f i g są nieskończenie małe w otoczeniu punktu a i $g(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$.

Mówimy, że nieskończenie mała f jest *rzędu wyższego* niż nieskończenie mała g jeżeli

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Mówimy, że nieskończenie mała f jest *rzędu niższego* niż nieskończenie mała g jeżeli

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

Mówimy, że nieskończenie mała f jest *tego samego rzędu* co nieskończenie mała g jeżeli

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{const} \neq 0$$

Mówimy, że nieskończenie małe f i g są *(asymptotycznie) równoważne*, jeżeli

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Piszemy wtedy

$$f \sim g$$

Symbole „o"

Przypuśćmy, że nieskończenie mała f jest rzędu wyższego niż nieskończenie mała g w otoczeniu punktu a. Piszemy wtedy $f = o(g)$ (otoczeniu punktu a). Ogólnie, **dowolną** nieskończenie mała rzędu wyższego niż g będzimy oznaczać przez $o(g)$.

Uwaga. Bardzo wygodny symbol $o(g)$ jest jednak dość niebezpieczny w użyciu. Przykładowo, jeśli $f = o(g)$ i $h = o(g)$, to w ogólności f nie jest równe h. Wiemy jednak, że zachodzi następująca równoważność.

Fakt. Mamy dane dwie nieskończenie małe f i g. Jeżeli $f \sim g$, to

$$f - g = o(g)$$

Uwaga. Często pomijamy wyrażenie „w otoczeniu punktu a" jeżeli wiadomo, o który punkt chodzi.

Nieskończnie duże. Równoważność asymptotyczna

Podobne określenia jak w przypadku nieskończenie małych stosujemy też w przypadku nieskończenie dużych (tj. wielkości dążcych do $+\infty$ c(lub $+\infty$). W szczególności mówimy, że f i g są *(asymptotycznie) równoważne*, jeżeli

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Piszemy wtedy

$$f \sim g$$

(przy $x \to a$)

Jak już wiemy, wzór Stirlinga mówi, że

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

(dla $n \to \infty$) tzn., że nieskończenie duże $n!$ oraz $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ są asymptotycznie równoważne.

3.4.2 Różniczka

Fakt, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, możemy zapisać teraz w postaci

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \text{ gdy } h \to 0.$$

Stąd, oznaczając przyrost $f(a+h) - f(a)$ przez Δf, a przyrost h przez Δx mamy

$$\Delta f - f'(a)\Delta x = o(\Delta x).$$

Odwzorowanie liniowe $\Delta x \mapsto f'(a) \cdot \Delta x$, nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie a* i oznaczamy przez $d_a f$.

Zauważmy, że różniczka funcji jest jednoznacznie wyznaczona przez jej pochodną (i na odwrót). W dalszym ciągu posługujemy się wyłącznie pojeciem pochodnej.

3.5 Wnioski z tw. Lagrange'a

.

Wnioski z tw. Lagrange'a

1. Jeśli w (a, b) pochodna $f' \equiv 0$, to funkcja $f \equiv \text{const}$,

2. Jeśli w (a, b) pochodna $f' \equiv g'$, to funkcja$f \equiv g + \text{const}$,

3. Jeśli w (a, b) pochodna $f' \geq 0$, to funkcja f jest (słabo) rosnąca, a jeśli w (a, b) pochodna $f' \leq 0$, to funkcja f jest (słabo) malejąca.

4. Jeśli w (a, b) pochodna $f' > 0$, to funkcja f jest (ściśle) rosnąca, a jeśli w (a, b) pochodna $f' < 0$, to funkcja f jest (ściśle) malejąca.

Dowód.

ad 1. Przypuśćmy, że f nie jest stała. Istnieją zatem dwa różne punkty x_1 i x_2 takie, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wtedy iloraz $\frac{f(x_2) \neq f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$. Na podstawie twierdzenia Lagrange'a istnieje ξ, $x_1 < \xi < x_2$ takie, że $f'(\xi) = \frac{f(x_2) \neq f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, sprzeczność.

ad 2. Wynika z 1.

ad 3. Przypuśćmy, że f nie jest rosnąca, mimo tego, że $f' \geq 0$. Istieją zatem dwa różne punkty x_1 i x_2 takie, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$. Wtedy iloraz $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. Na podstawie twierdzenia Lagrange'a istnieje ξ, $x_1 < \xi < x_2$ takie, że $f'(\xi) < 0$, co jest sprzeczne z założeniem.

ad 4. Analogicznie jak w punkcie 3. ■

Przytoczmy jeszcze tzw. *nierównościową wersję* twierdzenia Lagrange'a. Dowód wynika natychmiast z wersji podstawowej.

Twierdzenie o przyrostach skończonych. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale I, to dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in I$, $(x < y)$, zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

gdzie $M = \sup\{|f'(c)| : c \in [x; y]\}$. ■

3.6 Wzór Taylora

3.6.1 Pochodne wyższych rzędów

Niech $= f(x)$ będzie funkcj różniczkowalną w przedziale otwartym I. Wtedy funkcja f' też jest określona w przedziale I, i jeśli jest różniczkowalna, to można mówić o jej pochodnej $(f')'$. Funkcję tę nazywamy pochodną drugiego rzędu (drugą pochodną) funkcji f i oznaczamy przez f'' (czytamy: ef bis). Inne oznaczenia to y'' lub $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Podobnie definiujemy pochodne wyższych rzędów. Pochodną rzędu trzeciego oznaczamy jeszcze przez f''', ale pochodną rzędu czwartego oznaczamy już przez $f^{(4)}$.

Często będziemy zakładać, że funkcja f ma nie tylko pochodne do rzędu n włącznie, ale że ponadto, te pochodne są funkcjami ciągłymi. (W istocie, to dodatkowe założenie jest potrzebne tylko w odniesieniu do ostatniej pochodnej czyli $f^{(n)}$, ciągłość pozostałych wynika z faktu istnienia pochodnej wyższego rzędu). Mówimy wtedy, że funkcja f jest klasy C^n (w przedziale I). Jeśli f ma w I wszystkie pochodne, to jest klasy C^∞.

3.6.2 Wzór Taylora z resztą Peana

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto I\!R$, gdzie I jest przedziałem otwartym i niech $x \in I$. Jeżeli f jest funkcją klasy C^n w I to zachodzi wzór

$$f(x+h) = f(x)+\frac{h}{1!}f'(a)++\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+o(h^n).$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $n = 3$ mając nadzieję, że Czytelnik bez trudu potrafi uogólnić ten szczególny przypadek. Zgodnie z definicją symbolu $o(h^n)$, mamy pokazać, że

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1!}f'(x) - \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x)}{h^3} \to 0 \text{ gdy } h \to 0.$$

Jest to wyrażenie $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala. Różniczkując licznik i mianownik względem h otrzymujemy

$$\frac{f'(x+h) - f'(x) - \frac{2h}{2!}f''(x) - \frac{3h^2}{3!}f'''(x)}{3h^2}.$$

Ponownie otrzymujemy wyrażenie $\frac{0}{0}$, więc jeszcze raz stosujemy regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\frac{f''(x+h) - \frac{2}{2!}f''(x) - \frac{3\cdot 2\cdot h}{3!}f'''(x)}{6h}.$$

Ponownie otrzymujemy wyrażenie $\frac{0}{0}$, więc jeszcze raz stosujemy regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{6}.$$

Licznik zmierza 0 (bo funkcja f''' jest ciągła, a mianownik do 6. A zatem całe wyrażenie zmierza do zera (gdy $h \to 0$). Na podstawie reguły de l'Hospitala także wszystkie powyższe wyrażenia też zmierzają do zera, co kończy dowód. ■

3.6.3 Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

Poniższa wersja wzoru Taylora jest użyteczna w obliczeniach przybliżonych wartości funkcji f. Dowód twierdzenia można znaleźć np. w [1].

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto I\!R$, gdzie I jest przedziałem otwartym i niech $x \in I$. Jeżeli f jest funkcją klasy C^n w I to zachodzi wzór

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

gdzie $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$. ■

Szczególny przypadek, gdy $x = 0$, jest na tyle ważny, że nosi osobną nazwę.

Twierdzenie. (Wzór Maclaurina) Jeżeli f jest funkcją klasy C^n w otoczeniu zera, to zachodzi wzór

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

gdzie $R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$, $0 < \theta < 1$.

3.6.4 Zastosowania twierdzenia Taylora do obliczeń przybliżonych

Podamy tylko jeden przykład. Ze wzoru Maclaurina, wstawiając $x = 1$, otrzymujemy

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}$$

gdzie $1 < e^\theta < 3$.

W szczególności, dla $n = 6$ otrzymujemy $e \approx 2,718$ (z błędem mniejszym niż $0,0006$).

3.6.5 Wzór Maclaurina (z resztą Peana) dla kilku funkcji

Należy znać na pamięć tzw. rozwinięcia dla funkcji wykładniczej, sin, cos, $\ln(1 + x)$ oraz $(1 + x)^\alpha$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\ln(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

Dwie uwagi odnośnie powyższych wzorów.

Uwaga. W rozwinęciu funkcji sin występuje „ostatni” wyraz $\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ a po nim $o(x^{2k+2})$, zamiast spodziewanego $o(x^{2k+1})$. Gdybyśmy napisali $o(x^{2k+1})$ to wzór oczywiście dalej byłby prawdziwy, choć nieco „słabszy”. Ten „mocniejszy” wzór wynika z faktu, że rozwinięcie w istocie jest dla $n = 2k+2$, ale wyraz z tą potęgą nie występuje we wzorze, bo pochodna rzędu $2k+2$ jest równa zero. Podobnie jest z rozwinięciem funkcji cos.

Uwaga. Symbol $\binom{\alpha}{k}$ jest nam dobrze znany, gdy α jest liczbą naturalną. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy go jako

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

3.7 Zastosowania pochodnych

3.7.1 Ekstrema

Twierdzenie Fermata mówi, że jeżeli funkcja różniczkowalna $f : I \mapsto I\!R$ ma w punkcie a leżącym wewnątrz przedziału I ekstremum, to $f'(a) = 0$. Zerowanie się pochodnej jest zatem warunkiem koniecznym istnienia ekstremum. Warunek ten nie jest jednak wystarczający, jak można się łatwo przekonać rozważając funkcję $y = x^3$ np. w przedziale $[-2, 2]$. Jej pochodna zeruje się dla $x = 0$, 0 oczywiście leży wewnątrz przedziału, ale w punkcie tym nie ma ani maksimum, ani minimum.

Poszukując zatem wewnątrz przedziału punktów, w których funkcja f ma ekstremum musimy brać pod uwagę punkty, w których pochodna f' się zeruje, zdając sobie jednak sprawę z faktu, że takie punkty są zaledwie „podejrzane". Aby stwierdzić, że rzeczywiście w punkcie takim jest ekstremum musimy zrobić jakiś dodatkowy wysiłek. Poniższe dwa twiedzenia dają nam do ręki odpowiednie narzędzia.

Uwaga. Jeśli poszukujemy ekstremum funkcji w przedziale domkniętym $[a, b]$, to oprócz punktów wewnętrznych, dla których $f' = 0$, podejrzane są także końce przedziału.

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto I\!R$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że I jest przedziałem otwartym i niech $a \in I$

1.Jeśli $f'(a) = 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x < a$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x > a$, to w a jest minimum lokalne.

2. Jeśli $f'(a) = 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x < a$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > a$, to w a jest maksimum lokalne.

Dowód. Dowód twierdzenia jest niemal oczywisty. Przykładowo (w 1), z założeń wynika, że funkcja maleje na lewo od a, a rośnie na prawo od a. Stąd teza. ∎

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto I\!R$ będzie funkcją klasy C^2. Załóżmy, że I jest przedziałem otwartym i niech $a \in I$.

1. Jeśli $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$, to w punkcie a jest minimum lokalne.
2. Jeśli $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$, to w a jest maksimum lokalne.

Dowód. Dowiedziemy 1. Z twierdzenia Taylora (z resztą Peana), pamiętając, że $f'(a) = 0$, mamy

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2) = \left(\frac{f''(a)}{2} + \frac{o(h^2)}{h^2}\right)h^2.$$

Dla dostatecznie małych $|h|$ prawa strona jest dodatnia (bo f'' jest ciągła). A zatem i lewa strona jest dodatnia w pewnym otoczeniu a, co kończy dowód. ■

Przykłady:

1. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = (6-2x)^2 x$ w przedziale $[0, 3]$.

   Zacznijmy od obliczenia wartości na krańcach przedziału.

   Mamy: $f(0) = 0$ oraz $f(3) = 0$.

   Znajdziemy teraz punkty „podejrzane” wewnątrz przedziału. Mamy

   $$f'(x) = 2(6-2x)(-2)x + (6-2x)^2 = (6-2x)(6-6x) = 12(3-x)(1-x).$$

   A zatem $f' = 0$ dla $x = 3$ oraz $x = 1$, ale tylko $x = 1$ leży wewnątrz interesującego nas przedziału.

   Musimy teraz sprawdzić czy w punkcie $x = 1$ mamy ekstremaum.

   Sposób I. Badamy znak I pochodnej w otoczeniu $x = 1$, co jest o tyle łatwe, że wykresem funkcji f' jest parabola. Stwierdzamy więc natychmiast, że f' jest dodatnia na lewo od $x = 1$, a ujemna na prawo. Funkcja f ma więc w $x = 1$ maksimum lokalne. Ponieważ wartość $f(1) = 16$, to jest to także wartość największa w całym przedziale, bo w innych podejrzanych punktach funkcja się zeruje.

Sposób II. Badamy znak II pochodnej w punkcie $x = 1$.

Mamy $f''(x) = 24(x - 2)$. Stąd $f''(1) = -24$. Funkcja f ma więc w $x = 1$ maksimum lokalne.

Sposób III. Zauważmy, że w tym przypadku w ogóle nie musimy stosować żadnego z ww. sposobów. Skoro f zeruje się na krańcach przedziału, a wewnątrz jest dodatnia (co widać!), a ponadto tylko jeden punkt wewnątrz przedziału wchodzi w grę, to jest oczywiste, że w punkie tym musi być maksimum.

3.7.2 Wypukłość funkcji

Ważną cechą charakterystyczną funkcji, a dokładniej jej wykresu, jest tzw. wypukłość. Jest wiele różnych definicji tego pojęcia. Oto jedna z nich, najbardziej odpowiednia dla naszych celów.

Definicja. Niech $f : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 w przedziale otwartym I. Mówimy, że funkcja f jest *wypukła ku dołowi* w punkcie $a \in I$, jeżeli w pewnym otoczeniu punktu a, wykres funkcji f leży powyżej wykresu stycznej do wykresu w punkcie a.

Mówimy, że funkcja f jest *wypukła ku górze* w punkcie $a \in I$, jeżeli w pewnym otoczeniu punktu a, wykres funkcji f leży poniżej wykresu stycznej do wykresu w punkcie a.

Założenie, że f jest klasy C^2 w przedziale otwartym I nie jest konieczne aby postawić powyższą definicję, ale jest przydatne w poniższym kryterium.

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 w przedziale otwartym I i niech $a \in I$.

Jeśli $f''(a) > 0$, to jest wypukła ku dołowi w punkcie a.

Jeśli $f''(a) < 0$, to jest wypukła ku górze w punkcie a.

Dowód.

Przypuśćmy, że $f''(a) > 0$. Ze wzory Taylora mamy

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2) = \left(\frac{f''(a)}{2} + \frac{o(h^2)}{h^2}\right)h^2.$$

Czyli

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = \left(\frac{f''(a)}{2} + \frac{o(h^2)}{h^2}\right)h^2.$$

Dla dostatecznie małych $|h|$ prawa strona jest dodatnia (bo f'' jest ciągła). A zatem i lewa strona jest dodatnia w pewnym otoczeniu a, co oznacza, że

$$f(a+h) > f(a) + f'(a)h$$

Pamiętając, że $x = a + h$ dostajemy, że $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$. Czyli wykres f leży powyżej wykresu funkcji $f(a) + f'(a)(x - a)$, będącej wykresem stycznej w punkcie a. ■

Uwaga. Punkt, w którym zmienia się wypukłość funkcji nazywamy *punktem przegięcia*. Dla funkcji klasy C^2, druga pochodna jest równa zero w punkcie przegięcia. Wykresy funcji $y = x^3$ oraz $y = x^4$ świadczą o tym, że zerowanie się f'' nie jest jednak warunkiem wystarczającym na to, aby dany punkt był punktem przegięcia.

Pouczający jest też przykład funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w przedziale np. $(-1, 1)$. Funkcja ta jest wypukła ku górze na lewo od 0, wypukła ku dołowi na prawo 0, ma zatem punkt przegięcia w 0. Jej pierwsza pochodna w zerze wynosi 1.

3.7.3 Asymptoty wykresu funkcji; asymptota ukośna

Fakt, że $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{const}$ oznacza, że punkty leżące na wykresie funkcji, dla dostatecznie dużych wartości x, są dowolnie blisko prostej o równaniu $y = \text{const}$. Prostą tę nazywamy *asymptotą* funkcji f, a dokładniej *asymptotą poziomą*.

Podobnie, fakt, że np. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ oznacza, że punkty leżące na wykresie funkcji, dla wartości x dostatecznie bliskich a (ale większych od a), są dowolnie blisko prostej o równaniu $x = a$. Prostą tę nazywamy *asymptotą pionową*.

Ogólnie, prostą o równaniu $y = ax + b$ nazwiemy *asymptotą ukośną* funkcji f (w $+\infty$), jeżeli dla dostatecznie dużych wartości x, punkty leżące na wykresie funkcji są dowolnie blisko prostej.

Twierdzenie. Niech f będzie funkcją określoną na pewnym przedziale postaci $(x_0, +\infty)$. Prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną funkcji f (w $+\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją **dwie** granice:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b.$$

Dowód. Jest niemal oczywisty. Załóżmy wpierw, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f. Oznacza to, że

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

Wtedy tym bardziej

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0, \text{ bo } x \to +\infty.$$

Czyli $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x} - a) = 0$.

Na odwrót, przypuśćmy, że istnieją obie ww. granice. Pierwsza z nich musi istnieć, aby istniała druga. Istnienie drugiej oznacza, że prosta jest asymptotą. ∎

Może się zdarzyć, że istnieje pierwsza granica, a druga nie. Wtedy funkcja nie ma asymptoty, jednak istnienie pierwszej granicy coś jednak mówi o zachowaniu funcji w nieskończoności.

Przykłady:

1. Rozważmy funkcję $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $(0, +\infty)$. Łatwo widać, że
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$
a zatem f ma w 0 (z prawej strony) asymptotę pionową o równaniu $x = 0$. Zbadajmy teraz zachowanie f gdy $x \to +\infty$. Mamy
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$
oraz
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$
A zatem prosta o równaniu $y = x$ jest asymptotą f w $+\infty$.

2. Niech $f(x) = x + \sin x$. Łatwo widać, że $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, czyli pierwsza granica istnieje, ale $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \sin x$ **nie istnieje**. Funkcja nie ma więc asymptoty. Wykres funnkcji $f(x)$, mimo, że nie zbliża się dowolnie blisko do prostej $y = x$, to jednak pozstaje w jej pobliżu; waha się między prostymi $y = x + 1$ i $y = x - 1$.

3.7.4 Badanie funkcji. Wykresy

Przez badanie funkcji rozumiemy badanie różnych aspektów, które mają na celu w miarę dokładne określenie przebiegu funkcji i pozwalające na w miarę dokładne naszkicowanie jej wykresu. Warto to robić w sposób systematyczny, np. wg schematu, który przedstawiamy poniżej.

Schemat badania funkcji w trzech etapach.

Etap I. Jeżeli znamy jedynie „przepis na funkcję” czyli wyrażenie $y = f(x)$, to zaczynamy od **sprecyzowania dziedziny** funkcji. Często polega to na znalezieniu największego zbioru zmiennej x, aby wyrażenie $f(x)$ miało sens. Dziedziną funkcji z reguły jest jakiś przedział lub suma przedziałów. Kiedy wiemy już o jaką funkcję chodzi, badamy czy funkcja nie ma własności, które pozwoliłyby nam na ograniczenie się tylko do części dziedziny. Przykładowo, jeśli **funkcja jest parzysta lub nieparzysta**, to wystarczy ograniczyć nasze badania do $x \geq 0$, gdyż wykres dla $x \leq 0$ otrzymamy przez symetrię osiową lub środkową. Podobnie postępujemy, jeśli **funkcja jest okresowa**. Ważne informacje dotyczą też **punktów przecięcia z osiami układu**. Dla znalezienia punktu przeciecia z osią y wystarczy znaleźć wartość $f(0)$ (co często jest dość łatwe), natomiast dla znalezienia punktów przeciecia z osią x należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$ (co często jest dość trudne). Warto znaleźć też **inne punkty leżące na wykresie**, zwłaszcza jeśli nie sprawia to większych kłopotów.

Główną czynnością na wstępnym etapie jest znalezienie **wartości (lub granic)** funkcji na krańcach przedziałów dziedziny. Chodzi tu w szczególności o granice w $+\infty$ i $+\infty$ (jeśli dziedzina obejmuje przedziały nieskończone), a także $\lim_{x\to a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a^-} f(x)$, jeśli f jest określona w otoczeniu a, ale z wyjątkiem samego a.

Zauważmy, że obliczając wskazane wyżej granice znajdziemy **asymptoty poziome i pionowe** funkcji (o ile istnieją). Można także, już na tym etapie, sprawdzić, czy funkcja ma **asymptotę ukośną**. (Ta czynność czasami jest wykonywana na końcu procesu.)

Na końcu etapu I warto już naszkicować **wstępny wykres** funkcji, który następnie będzie precyzowany i korygowany po kolejnych etapach.

Etap II. Etap ten polega na obliczeniu f', a następnie wyznaczeniu punktów dla których $f'(x) = 0$ oraz przedziałów gdzie f' jest większa lub mniejsza od zera. Po tym etapie powinniśmy wiedzieć gdzie funkcja jest **rosnąca**, gdzie **malejąca**, gdzie ma **ekstrema** i jakie.

Etap III. Etap ten polega na obliczeniu f'', a następnie wyznaczeniu punktów dla których $f''(x) = 0$ oraz przedziałów gdzie f'' jest większa lub mniejsza od zera. Po tym etapie powinniśmy wiedzieć gdzie funkcja jest **wypukła ku dołowi**, gdzie **wypukła ku górze**, gdzie ma **punkty przegięcia**.

Przykłady:

1. Naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x).$$

Będziemy postępować zgodnie z opisanym wyżej schematem.

Wpierw ustalamy więc, że dziedziną funkcji jest całe $\mathbb{R}$, czyli przedział $(-\infty, +\infty)$.

Funkcja jest wielomianem trzeciego stopnia, nie jest więc ani okresowa, ani parzysta. Widać też od razu, że nie jest nieparzysta.

Wartość w punkcie 0 wynosi 0, a punkty przecięcia z osią x są pierwiastkami równania

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0.$$

Bez trudu znajdujemy te pierwiastki, gdyż

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2).$$

Mamy zatem $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (pierwiastek podwójny).

Na krańcach przedziału obliczamy granice:

$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} = -\infty.$$

Funkcja nie ma więc ani asymptot poziomych, ani pionowych. Nie ma też asymptoty ukośnej, bo wyrażenie $\frac{f(x)}{x}$ jest asyptotycznie równoważne z $\frac{x^2}{3}$ (zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$).

Zauważmy ponadto, że łatwo możemy stwierdzić, gdzie nasza funkcja jest dodatnia, a gdzie ujemna (z postaci iloczynowej znalezionej przy okazji szukania pierwiastków.) Wiemy więc, że $f(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (0,3) \cup (3, +\infty)$.

Z tego wynika, że gdzieś między 0 a 3 funkcja ma maksimum lokalne, a w 3 jest z pewnością minimum lokalne.

Na podstawie tych informacji warto narysować wstępną wersję wykresu.

Przystępujemy do etapu drugiego czyli do badanie pierwszej pochodnej. Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 12x + 9) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Mamy więc $f'(x) = 0$ dla $x = 1$ oraz $x = 3$, $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 3)$. A zatem, patrząc od lewej, funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, 1)$, w 1 ma maksimum lokalne (co potwierdza nasze wcześniejsze wnioski), następnie maleje w przedziale $(1, 3)$ (osiągając w 3 minimum lokalne), a na prawo od 3 już tylko rośnie. Obliczamy $f(1) = \frac{4}{3}$. To, że $f(3) = 0$ już wiemy.

Na podstawie tych kolejnych informacji warto poprawić wstępną wersję wykresu. Zauważmy, że nasza funkcja jest z pewnością wypukła ku górze w 1 oraz wypukła ku dołowi w 3. Gdzieś między 1 a 3 funkcja ma punkt przegięcia. Znajdziemy go na etapie III badając f''.

Mamy $f''(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

A zatem istotnie, w punkcie 2 funkcja ma punkt przegięcia. Na lewo od 2 jest wypukła ku górze, na prawo od 2 jest wypukła du dołowi. Wartość funkcji w punkcie $x = 2$ wynosi $\frac{2}{3}$.

Wykres funkcji zawiera rysunek 3.3.

2. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

   Ustalamy, że dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, czyli zbiór $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

   Łatwo widać, że funkcja f nieparzysta, więc ograniczymy się tylko do przedziału $(0, +\infty)$.

   Wykres funkcji nie przecina osi układu; dla $x = 0$ funkcja nie jest określona; nie przecina też osi x, bo równanie $x+\frac{1}{x} = 0$ nie ma rozwiązania. Wartości funkcji w rozważanym przedziale są dodatnie.

   Na krańcach przedziału $(0, +\infty)$ obliczamy granice:

$$\lim_{x\to 0^+} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty$$

.

   Funkcja ma więc asymptotę pionową o równaniu $x = 0$. Sprawdzamy, czy ma asymptotę ukośną. Obliczamy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1$$

   oraz

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}) = 0.$$

A zatem funkcja ma asymptotę ukośną o równaniu $y = x$.

Na podstawie tych informacji warto narysować wstępną wersję wykresu.

Przystępujemy do etapu drugiego czyli do badanie pierwszej pochodnej. Mamy

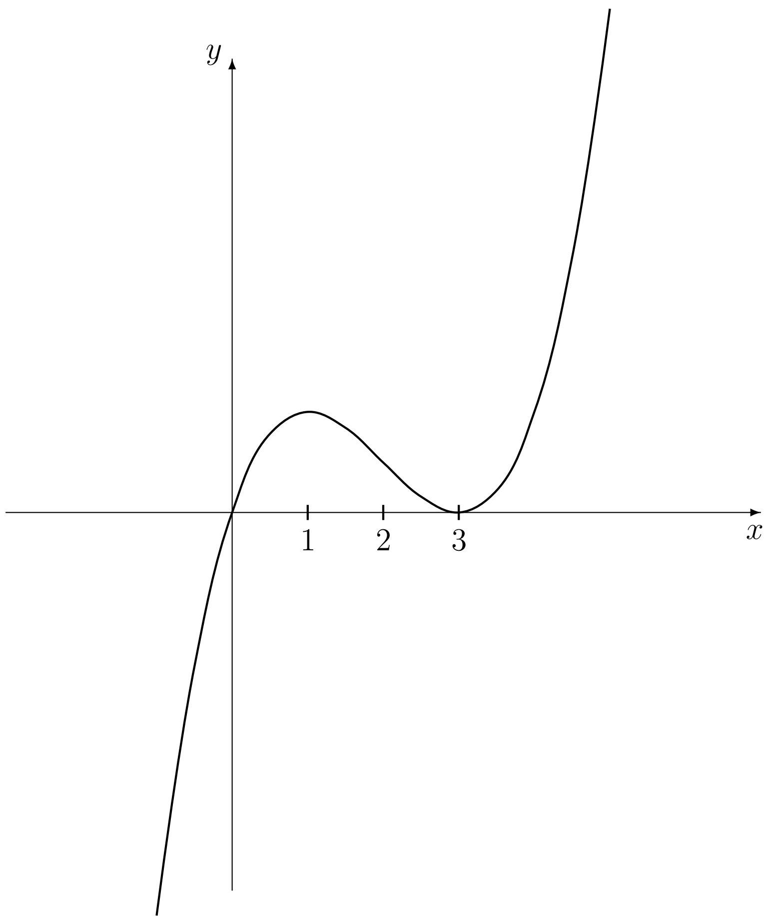
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

W interesującym nas przedziale $f'(x) = 0$ tylko dla $x = 1$. Ponadto, $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (1, +\infty)$. A zatem, patrząc od lewej, funkcja maleje w przedziale $(0, 1)$, w 1 ma minimum lokalne $(= 2)$, a następnie rośnie w przedziale $(1, +\infty)$.

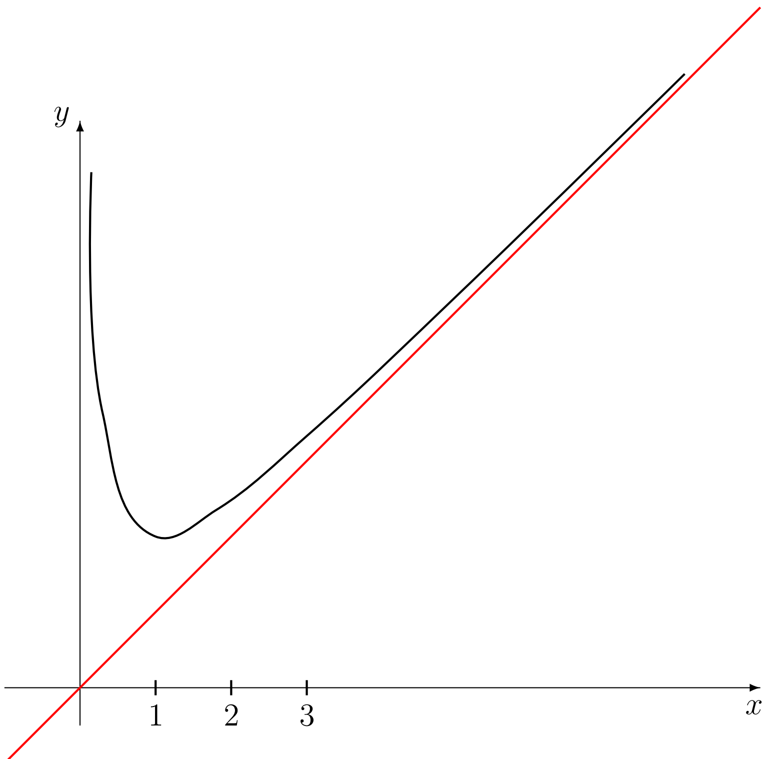
Wreszcie, mamy $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Funkcja w badanym przedziale jest cały czas wypukła du dołowi.

Wykres funkcji przedstawia rysunek 3.4.

3. Dalsze przykłady można znaleźć m.in. w książkach [1] lub [2], a także w internecie.



Rysunek 3.3: Wykres funkcji $y = f(x) = \frac{1}{3}(x^3 = 6x^2 + 9x)$



Rysunek 3.4: Wykres funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $(0, +\infty)$ i jej asymptota ukośna

Bibliografia

[1] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1969.

[2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom I*, PWN, Warszawa 1962.