Rozdział 1

Granice i ciągłość

W rozdziale tym Czytelnik w dalszym ciągu będzie miał do czynienia z materiałem szkoły średniej, ale pozna też parę nowych faktów. Oto plan:

- Ciągi liczbowe i ich zbieżność. Tu poznamy jedną z najważniejszych liczb w analizie.
- Następnie przeniesiemy pojęcia granicy na funkcje.
- Omówimy najważniejsze własności funkcji ciągłych

1.1 Ciągi liczbowe

Ciąg liczbowy a_n jest niczym innym jak odwzorowaniem zbioru liczb naturalnych $I\!N$ w zbiór liczb rzeczywistych, czyli $a : I\!N \mapsto I\!R$. Wartość tej funkcji w punkcie n, czyli n-ty wyraz ciągu, zamiast $a(n)$ zapisujemy jako a_n. Z reguły, do geometrycznego przedstawienia ciągu używamy jednej osi, traktując go jako „zbiór" punktów; stąd często ciąg zapisujemy w postaci $\{a_n\}$. W istocie ciąg to jednak coś więcej niż zbiór, bo mamy ustaloną kolejność wyrazów.

Najprostszy sposób zdefiniowania ciągu to podanie przepisu na jego n-ty wyraz. Np. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$, $c_n = (-1)^n$ itp. We wzorach tego typu często milcząco zakładamy, że $n \in \mathbb{N}$. Czasami podajemy kilka pierwszych wyrazów ciągu, licząc na to, że Czytelnik domyśli się jak otrzymać pozostałe wyrazy ciągu. Np. ciąg wyżej określony ciąg a_n można też opisać jako ciąg $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$, a ciąg c_n jako ciąg $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Jest oczywiste, że ten sposób „definiowania" jest dosyć niebezpieczny.

Natomiast całkowicie poprawna jest tzw. definicja *rekurencyjna*. Przykładowo definiujemy ciąg a_n następująco:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

Nie mamy tu bezpośredniego wzoru na n-ty wyraz ciągu, ale widać, że jest on jednoznacznie określony, i że jeśli tylko chcemy to możemy go obliczyć. Wiemy bowiem ile wynosi pierwszy wyraz, mamy wzór na drugi wyraz w zależności od pierwszego. Z tego samego wzoru obliczymy trzeci wyraz za pomocą drugiego etc.

A oto jeszcze jeden, nieco bardziej skomplikowany, przykład takiej definicji. Ciąg zdefiniowany następująco:

$$F_n = F_{n-1} + Fn - 2 \;\text{ dla }\; n \geq 2, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

nazywamy *ciągiem Fibonacciego*.

Przez otoczenie punktu a w $\mathbb{R}$ rozumiemy przedział otwarty postaci $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Mówimy czasem, że jest to otoczenie ε-owe lub, nieco żargonowo, ε-otoczenie.

Poniższa definicja jest kluczowa dla analizy matematycznej.

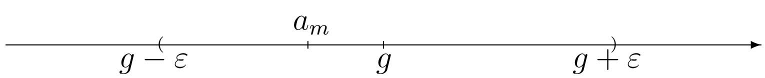
Definicja. Mówimy, że ciąg (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest zbieżny do granicy g jeżeli dla każdgo $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że dla każdego $n > n_0$ $|a_n - g| < \varepsilon$.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować głównie ciągami zbieżnymi, ale i wśród ciągów rozbieżnych są ważne dla nas ciągi. Mianowicie, chodzi tu o ciągi rozbieżne do nieskończoności.

Definicja. Mówimy, że ciąg (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest rozbieżny do $+\infty$ jeżeli dla każdgo $M > 0$ istnieje takie n_0, że dla każdego $n > n_0$ $a_n > M$.

Podobnie definiujemy ciągi rozbieżne do $-\infty$. Ale pamiętajmy

Ciągi zmierzające do plus lub minus nieskończoności są ciągami rozbieżnymi i **nie mają granicy**. Mówimy co prawda czasem, że ciąg taki ma granicę niewłaściwą, ale jest to tylko sposób mówienia i nie należy sądzić, że granice dzielą się na właściwe i niewłaściwe czy coś w tym stylu.



Rysunek 1.1: Wyraz a_m w otoczeniu g

Seria poniższych twierdzeń wynika wprost z definicji granicy ciągu.

Twierdzenie. Ciąg zbieżny ma (dokładnie) jedną granicę.

Dowód. Przypuśćmy, że ciąg ma dwie granice g_1 i g_2, $g_1 < g_2$. Weźmy ε mniejsze niż połowa odległości między g_1 i g_2,co oznacza, że przedzialiki $(g_1-\varepsilon, g_1+\varepsilon)$ i $(g_2-\varepsilon, g_2+\varepsilon)$ są rozłączne. W pierwszym z nich, na pdstawie definicji granicy, znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu. A zatem w drugim jest ich tylko skończona ilość. A zatem g_2 nie może być granicą, sprzeczność. ■

Twierdzenie o zachowaniu słabej nierówności. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do g i $a_n \leq M$, to także $g \leq M$.

Dowód. Przypuśćmy, że $g > M$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, aby $g < M-\varepsilon$. Wtedy prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w przedziale $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$, a więc nie mogą być mniejsze lub równe od M. Otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Twierdzenie o trzech ciągach. Jeśli zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to i ciąg b_n jest zbieżny do g.

Dowód. Wprost z definicji zbieżności. ■

Twierdzenie o iloczynie ciągów ograniczonego i zbieżnego do zera. Jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony a ciąg (b_n) jest zbieżny do zera, to i ciąg $a_n \cdot b_n$ jest zbieżny do g.

Dowód. Wprost z definicji zbieżności. ■

Twierdzenie. Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Dowód. Wprost z definicji zbieżności. ■

Poniższe twierdzenie jest jednym z najważniejszych w tym rozdziale. Wynika ono z zasady ciągłości.

Twierdzenie. Ciąg rosnący i ograniczony (od góry) jest zbieżny.

Dowód. Ponieaważ nasz ciąg, traktowany jako zbiór, jest ograniczony od góry, to, zgodnie z zasadą ciągłości, istnieje jego kres górny. Oznaczmy go przez g. Mamy więc $g = \sup\{a_n\}$. Pokażmy, że g jest także granicą naszego ciągu. Węźmy $\varepsilon > 0$ i rozpatrzmy przedział $g - \varepsilon, g + \varepsilon$. Przypuśćmy, że jakiś wyraz ciągu, np. a_m należy do tego przedziału. Wtedy wszystkie wyrazy a_n dla $n > m$ neleżą do tego przedziału, bo mamy $a_m \leq a_n \leq g$. Jeśli żaden z wyrazów ciągu a_n nie należy do naszego przedziału, to znaczy, że wszystkie one są nie większe niż $g - \varepsilon$, czyli g nie jest kresem górnyme — sprzeczność. ■

Twierdzenie o czterech działaniach na granicach ciągu.

Jeżeli ciąg $a_n \to a$, a $b_n \to b$ (przy $n \to \infty$), to ciągi $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ oraz $a_n \cdot b_n$ też są zbieżne i zachodzą wzory.

$$a_n + b_n \to a + b,$$

$$a_n - b_n \to a - b,$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b.$$

Jeśli ponadto $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$ to ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ też jest zbieżny i

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

Twierdzenie powyższe jest pierwszym z serii twierdzeń łączących operację przejścia do granicy z działaniami arytmetycznymi. Błędnie, choć często, wysławia się je np. mówiąc, że „granica sumy jest równa sumie granic". A to nieprawda. Prawdą jest natomiast, że przy pewnych założeniach istotnie tak jest.

1.1.1 Symbole nieoznaczone.

Jeżeli oba ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do zera, to z tego faktu nic nie wynika odnośnie granicy ciągu będącego ich ilorazem. Na przykład, jeśli $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{2}{n}$, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ jest zbieżny do 1/2, a ciąg $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ do 2.

Jeśli $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ jest zbieżny do zera, a ciąg $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ jest rozbieżny.

Sytuację tę opisujemy mówiąc, że $\dfrac{0}{0}$ jest symbolem nieoznaczonym. Podkreślmy raz jeszcze wyraźnie. Nie oznacza to, że nie potrafimy znaleźć granicy ilorazu dwóch ciągów zmierzających do zera; oznacza to jedynie, że musimy znać te ciągi aby tę granicę wyznaczyć. Zauważmy, że jeśli chodzi o iloczyn dwóch ciągów zmierzających do zera, to nie musimy ich znać, aby stwierdzić, że iloczyn ten zmierza do zera. Możnaby powiedzieć, że symbol $0 \cdot 0$ jest symbolem oznaczonym.

Symbol $\dfrac{0}{0}$ nie jest jedynym symbolem nieoznaczonym; znamy już takie jak $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ czy $\infty - \infty$. W dalszym ciągu poznamy następne.

1.1.2 Ważne wzory.

Ważne granice. Niech liczba $a > 0$. Wtedy, przy $n \to \infty$ mamy

$$\sqrt[n]{a} \to 1,$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Załóżmy ponadto, że $a > 1$. Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{n^k}{a^n} \to 0.$$

Dowód. Łatwo widać, że wystarczy udowodnić pierwszy wzór dla $a > 1$. Zapiszmy $\sqrt[n]{a}$ w postaci $\sqrt[n]{a} = 1+\xi_n$. Wystarczy pokazać, że ciąg $\xi_n \to 0$. Ponieważ $a > 1$, to $\xi_n > 0$. Ze wzoru Newtona mamy

$$a = (1 + \xi_n)^n = 1 + n\xi_n + \ldots > n\xi_n.$$

Stąd

$$\xi_n < \frac{a}{n}.$$

Mamy więc

$$0 < \xi_n < \frac{a}{n}.$$

Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach, $\xi_n \to 0$.

Drugi wzór dowodzimy podobnie. Zapisujemy $\sqrt[n]{n}$ w postaci $\sqrt[n]{n} = 1+\xi_n$. Jak poprzednio, wystarczy pokazać, że ciąg $\xi_n \to 0$. Widać, że $\xi_n > 0$. Aby otrzymać oszacowanie w drugą stronę korzystamy ze wzoru Newtona. Wystarczy wypisać o jeden wyraz niż poprzednio. Mamy

$$n = (1 + \xi_n)^n = 1 + n\xi_n + \binom{n}{2}\xi_n^2 > \frac{1}{2}n(n-1)\xi_n^2.$$

Stąd

$$\xi_n < \frac{\sqrt{2}}{n-1}$$

. Mamy więc
$$0 < \xi_n < \frac{a}{n}$$
i, jak wyżej, nasz wzór wynika z twierdzenia o trzech ciągach.

Także w dowodzie trzeciego wzoru kluczową rolę odgrywa wzór Newtona. Poniżej przedstawimy dowód tego wzoru dla $k = 2$ pozostawiając przypadek ogólny jako ćwiczenie dla Czytelnika.

Połóżmy $a = 1 + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$. Ze wzoru Newtona
$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \binom{n}{3}\varepsilon^2 + \ldots > \binom{n}{3}\varepsilon^3 > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\varepsilon^3.$$
Zatem
$$\frac{n^2}{a^n} = \frac{n^2}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{n^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\varepsilon^3}.$$
Ciąg po prawej stronie zmierza do zera (przy $n \to \infty$), co kończy dowód. ■

Pierwszy z powyższych wzorów pokazuje dobitnie, że 1^∞ jest symbolem nieoznaczonym. Istotnie, ciąg $\sqrt[n]{a} \to 1$ dla każdego $a > 0$, natomiast ciąg $(\sqrt[n]{a})^n$, jako ciąg stały równy a zmierza oczywiście do a.

Twierdzenie. Ciąg
$$(1 + \frac{1}{n})^n$$
jest zbieżny.

Dowód. Pokażemy, że ciąg nasz jest rosnący i ograniczony. W tym celu przekształcimy wyraz ciągu do dogodnej postaci. Znowu naszym głównym narzędziem będzie wzór Newtona.
$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$
$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

Mamy więc

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

Stąd, zastępując n przez $n + 1$, otrzymujemy

$$a_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n}{n+1}).$$

Zauważmy, ostatnia suma ma o jeden składnik więcej niż suma poprzednia i że jest to składnik większy od zera. Porównują pozostałe składniki w obu sumach łatwo widać, że $a_{n+1} > a_n$. Nasz ciąg jest zatem rosnący.

To, że jest ograniczony wynika z następującego oszacowania.

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

W ostatniej sumie rozpoznajemy sume $n - 1$ wyrazów ciągu geometrycznego. Mamy więc

$$a_n < 2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{n-1})}{\frac{1}{2}} < 3.$$

■

Powyższe twierdzenie nadaja sens następującej definicji.

Definicja. Granicę ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$ oznaczamy przez e. Logarytm przy podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy przez ln.

1.1.3 Podciągi.

Definicja . Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczbowym. Weźmy pod uwagę ciąg liczb naturalnych

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

Definiujemy nowy ciąg $\{b_n\}$ kładąc:

$b_1 = a_{m_1}$, $b_2 = a_{m_2}$, $b_3 = a_{m_3}$ *etc.*

Można sobie wyobrażać, że nowy ciąg powstał z ciągu

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

w ten sposób, że „wymazujemy" wszystkie wyrazy z wyjątkiem tych o numerach $m_1, m_2, m_3, ...$ Tak zdefiniowany ciąg nazywamy *podciągiem* ciągu $\{a_n\}$ i oznaczamy często przez $\{a_{m_n}\}$.

Twierdzenie Bolzana-Weierstrassa.[1] Z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Oznacza to, że istnieją dwie liczby a_1, b_1 takie, że $a_1 \leq x_n \leq b_1$ dla każdego n. Połóżmy $x_{m_1} = x_1$.

Podzielmy przedział $[a_1, b_1]$ na dwie równe części. Przynajmniej w jednym z przedziałów

$$[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}], [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1]$$

jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

Przypuśćmy, że w lewym. Kładziemy wtedy: $a_2 = a_1$, b_2, $\frac{a_1+b_1}{2}$ a x_{m_2} jest którymkolwiek z nieskończonej liczby elementów ciągu $\{x_n\}$ o indeksie większym od m_1 leżących w przedziale $[a_2, b_2]$.

Podzielmy teraz przedział $[a_2, b_2]$ na dwie równe części. Przynajmniej w jednym z przedziałów

$$[a_2, \frac{a_2 + b_2}{2}], [\frac{a_2 + b_2}{2}, b_2]$$

jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

Przypuśćmy (dla odmiany), że w prawym. Kładziemy wtedy: $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$, $b_3 = a_2$ a x_{m_3} jest którymkolwiek z nieskończonej liczby elementów ciągu $\{x_n\}$ o indeksie większym od m_2 leżących w przedziale $[a_3, b_3]$.

Kontynuując tę konstrukcję otrzymamy ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$ oraz podciąg $\{x_{m_n}\}$ o następujących własnościach:

1. $\{x_{m_n}\} \in [a_n, b_n]$

[1] Bolzano (czyt: Bolcano) był Włochem, a Weierstrass (czyt: Wajersztras) Niemcem

2. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$

3. $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$

Ciąg $\{a_n\}$ jest więc rosnący i ograniczony od góry, a zatem jest zbieżny. Podobnie, $\{b_n\}$, jako ciąg malejący i ograniczony od dołu też jest zbieżny. Ponadto, oba ciągi zmierzają do tej samej granicy, nazwijmy ją g, gdyż różnica $a_n - b_n$ jest dowolnie mała. W konskwencji, na podstawie twierdzenia o trzech cigach, ciąg $\{x_{m_n}\}$ też jest zbieżny do g, co kończy dowód. ■

Dość oczywista jest poniższa równoważność.
Tw. $\lim a_n = g \iff$ każdy podciąg ciągu (a_n) zmierza do g. ■

1.1.4 Ciąg Cauchy'ego.

Definicja. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy *ciągiem Cauchy'ego* jeżeli ma następującą własność.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in I\!N$, że dla $n, m > n_0$ mamy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Mówiąc obrazowo, ciąg liczbowy (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego jeśli dostatecznie dalekie wyrazy są dowolnie blisko siebie.

Zachodzi następujące ważne twierdzenie

Twierdzenie. Ciąg (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny.

Dowód. Jak zwykle, dowód równoważności, czyli twierdzenia typu „wtedy i tylko wtedy" usyskujemy dowodząc dwóch implikacji, z prawej do lewej i na odwrót.

($\Leftarrow$). Mamy pokazać, że ciąg zbieżny (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego. Oznaczmy przez a granicę naszego ciągu. Weźmy $\varepsilon > 0$. Z definicji zbieżności ciągu, począwszy od pewnego n_0 mamy $|a_n - a| < \varepsilon$. Niech teraz $n, m > n_0$. Poniższa „sztuczka" jest bardzo często stosowana.

$$|a_n - a - m| = |(a_n - a) + (a - a - m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolne (w domyśle: dowolnie małe), oznacza to, że wyrażenie $|a_n - a_m|$ jest dowolnie małe dla dostatecznie dużych n i m.

($\Rightarrow$). Przypuśćmy, że ciąg (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego. Łatwo pokażać (ćwiczenie), że (a_n) jest ciągiem ograniczonym. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa ciąg (a_n) zawiera podciąg (a_{n_k}) zbieżny. Oznaczmy granicę tego ciągu przez g. Pokażemy, że cały ciąg (a_n) zmierza do g. Weźmy $\varepsilon > 0$. Od pewnego miejsca począwszy, $|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ (z definicji zbieżności). Zauważmy, że z pewnych technicznych powodów, które staną się oczywiste za chwilę, dobieramy „pewne miejsce" do $\frac{\varepsilon}{2}$ a nie do ε. Od pewnego miejsca począwszy, mamy także $|a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (z definicji ciągu Cauchy'ego). Jest jasne, że od pewnego miejsca zachodzą obie powyższe nierówności (wystarczy wziąć większe z tych dwóch „pewnych miejsc"). A zatem od pewnego miejsca począwszy mamy

$$|a_n - g| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - g)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Oznacza to, że ciąg (a_n) zmierza do g. ■

Zauważmy, że dzięki temu, że dobieraliśmy „pewne miejsca" w stosunku do $\frac{\varepsilon}{2}$ a nie do ε, to na końcu otrzymaliśmy wyjściowe ε a nie 2ε. Niektórzy uważają tak prowadzont dowód za bardziej elegancki.

Na zakończenie podrozdziału o ciągach podamy (bez dowodu) jeszcze jeden wzór, który jest często użyteczny przy wyznaczaniu granic. Wzór Stirlinga mówi, że dla dużych n

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \cdot \theta_n,$$

gdzie $\theta_n \to 1$ dla $n \to \infty$.

Przypuśćmy, że mamy dane dwa ciągi (a_n) i (b_n) takie, że $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ przy $n \to \infty$. Mówimy wtedy, że ciągi te są *asymptotycznie równoważne* i piszemy $a_n \sim b_n$ (przy $n \to \infty$). Wzór Stirliga mówi zatem, że

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

(przy $n \to \infty$).

1.2 Granica funkcji.

1.2.1 Granica funkcji

Definicja granicy funkcji w punkcie

Niech $f : D \mapsto I\!R$ będzie funkcją określoną na pewnym zbiorze $D \subset I\!R$. Jak mówiliśmy, najczęściej będziemy mieli do czynienia z przedziałami, ale nie ma potrzeby ograniczać się w definicji. Niech x_0 będzie *punktem skupienia* zbioru D tzn., z definicji, że istnieje ciąg x_n o następujących własnościach:

$$x_n \to x_0,$$

$$x_n \neq x_0,$$

$$x_n \in D.$$

Zauważmy, że sam punkt x_0 nie musi należeć do D.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g jeżeli dla każdego ciągu x_n takiego, że $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ i $x_n \in D$ ciąg $f(x_n) \to g$.

A oto inne, równoważne i równie klasyczne sformułowanie definicji granicy funkcji w punkcie w języku $\varepsilon - \delta$.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Przykłady:

1. Zacznijmy od funkcji *signum* zdefiniowanej następująco

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \geq \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ta funkcja nie ma granicy w zerze; jeśli wyrazy ciągu x_n są dodatnie (gdy np. $x_n = \frac{1}{n}$, to wartość wynosi 1 i przy $n \to \infty$ $f(x_n) \to 1$, jeśli jednak wyrazy ciągu x_n są ujemne (gdy np. $x_n = -\frac{1}{n}$, to wartość wynosi -1 i przy $n \to \infty$ $f(x_n) \to -1$. A zatem **nie jest prawdą**, że **dla każdego** ciagu mamy tę samą granicę.

Granice jednostronne

Przydatne jest pojęcie granic jednostronnych. Podamy poniżej jedynie definicję granicy prawostronnej w punkcie, licząc na to, że Czytelnik sam sformułuje wersję lewostronną.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę prawostronną* g jeżeli dla każdego ciągu x_n takiego, że $x_n \to x_0$ z prawej strony (tzn., że $x_n > x_0$ i $x_n \in D$ ciąg $f(x_n) \to g$.

Twierdzenie. Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę wtedy i tylko wtedy gdy f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną i lewostronną i granice te są sobie równe.

Dowód. Wprost z definicji granicy oraz granic jednostronnych. ■

1.2.2 Granica niewłaściwe

Mówimy, że funkcja f zmierza do $+\infty$ przy x zmierzającym do x_0 jeżeli dla każdego ciągu x_n takiego, że $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ i $x_n \in D$, ciąg $f(x_n) \to +\infty$. Piszemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

.

Jeżeli w powyższej definicji ograniczymy się tylko do ciągów zmierzających do zera z prawej strony, to będziemy mieli do czynienia z granicą jednostronną. Piszemy wtedy

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = +\infty$$

Mamy nadzieję, że Czytelnik bez trudu potrafi powiedzieć co oznacza, że

$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = +\infty$$

czy też przykładowo, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

.

1.2.3 Granice w $+\infty$ i $-\infty$

Do opisu zachowania się funkcji wygodne są jeszcze dwa pojęcia.

Mówimy, że funkcja f zmierza do g przy x zmierzającym do $+\infty$ jeżeli dla każdego ciągu x_n takiego, że $x_n \to +\infty$ i $x_n \in D$, ciąg $f(x_n) \to g$. Piszemy wtedy:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$$

.

Przykład:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

1.3 Działania na granicach funkcji.

Wprost z definicji granicy funkcji wynika tw. o czterech działaniach arytmetycznych na granicach funkcji. Nie będziemy go tu formułować bo jest analogiczne do odpowiedniego twierdzenia dla ciągów, z którego zresztą łatwo wynika. Podobnie jest z twierdzewniem o trzech funkcjach.

1.4 Ważne granice.

Pokażemy, że dla $a > 0$ mamy

$$\boxed{\lim_{x\to 0} a^x = 1}$$

Dowód. Załóżmy wpierw, że $x > 0$ i dobierzmy n tak, aby

$$\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}.$$

A zatem

$$\sqrt[n+1]{a} \leq a^x \leq \sqrt[n]{a}.$$

Jeśli $x \to 0$ to $n \to +infty$. Wzór wynika zatem z faktu, że $\sqrt[n]{a} \to 1$ (a więc i $\sqrt[n+1]{a} \to 1$) oraz z twierdzenia o trzech ciągach. Dla $x < 0$ zauważmy, że $a^x = \frac{1}{a^{|x|}}$. ■

Podobnie, można pokazać (choć dowód jest nieco bardziej uciążliwy), że ze wzoru definiującego liczbę e wynika, że

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Wypiszmy dla porządku jeszcze jedną ważną znaną granicę

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Napiszmy ją jeszcze raz w postaci

$$\boxed{\lim_{\Box\to 0}\frac{\sin\Box}{\Box} = 1.}$$

Uwaga. $\Box$ ma przypominać o fakcie, że może tam stać cokolwiek, byle zmierzało do zera.

Wyprowadzenie wzoru można znaleźć np. w książce F. Leji, Rachunek różniczkowy i całkowy, ...

1.5 Ciągłość.

1.5.1 Definicja

Ciągłość w punkcie

Rozważamy funkcję $f : D \mapsto \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie a jeżeli spełnione są następujące trzy warunki:

- Punkt a należy do dziedziny D
- istnieje granica $\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

A oto inne, równoważne i równie klasyczne sformułowanie definicji ciągłości funkcji w punkcie x_0 w języku $\varepsilon - \delta$.

Definicja. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|x-x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Twierdzenia o czterech działaniach na funkcjach ciągłych w danym ounkcie są łatwe do sformułowania i wynikają z odpowiednich twierdzeń dotyczących granic.

Ciągłość funkcji

Rozważamy funkcję $f : D \mapsto I\!R$, gdzie $D \subset I\!R$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny D.
Uwaga. Funkcja $f : D \mapsto I\!R$, gdzie $D = I\!R \setminus \{0\}$ a f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

jest funkcją ciągłą.

Ciągłość jednostronna

Jeżeli zamiast granic rozważamy granice jednostronne, to można mówić o ciągłości jednostronnej.

Np. funkcja „ część całkowita" dana wzorem

$$f(x) = [x]$$

jest prawostronnie ciągła (ale (!) nie jest oczywiście ciągła)

1.5.2 Własności funkcji ciągłych

Twiedzenie o lokalnym zachowaniu znaku

Niech $f : D \mapsto I\!R$, gdzie $D \subset I\!R$. będzie funkcję ciągłą i niech $x_0 \in D$ będzie takim punktem, że $f(x_0) > 0$.

Wtedy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $f(x) > 0$ dla $x \in U$.■
Uwaga. Przez otoczenie rozumiemy tu zbiór postaci $D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon)$ dla pewnego (małego) ϵ.

Dowód można znaleźć np. w książce F. Leji, Rachunek różniczkowy i całkowy, ...

Własność Darboux

Twierdzenie. Niech $f : I \mapsto \mathbb{R}$ gdzie I jest przedziałem, będzie funkcję ciągłą.

Przypuśćmy, że $x_1 \in I$ oraz $x_2 \in I$ oraz, że $f(x_1) = a$, a $f(x_2) = b$. Załóżmy, że $x_1 < x_2$ i $a < b$.

Niech c będzie dowolną wartością pośrednią między a i b tzn. $a \leq c \leq b$.

Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in [x_1, x_2]$, że $f(\xi) = c$.

Uwaga. Twierdzenie Darboux (czyt: dar'bu) jest prawdziwe dla dowolnego przedziału (skończonego lub nie, domkniętego lub nie).

Uwaga. Twierdzenie Darboux nazywamy też *twierdzeniem o przyjmowaniu wartości pośrednich*. Własność polegająca na tym, że funkcja przyjmująca dwie wartości przyjmuje też wszystkie wartości pomiędzy nimi nazywamy *własnością Darboux*.

Dowód twierdzenia Darboux łatwo wynika z następującego twierdzenia, będącego jego bardzo szczególnym przypadkiem.

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcję ciągłą.

Przypuśćmy, że $f(a) < 0$, a $f(b) > 0$.

Wtedy istnieje taki punkt $c \in [a, b]$, że $f(c) = 0$.

Dowód. Niech $\xi = \frac{a+b}{2}$. Wtedy albo $f(\xi) < 0$, albo $f(\xi) = 0$ albo $f(\xi) > 0$. Jeśli $f(\xi) = 0$, to kładziemy $c = \xi$ co kończy dowód. Jeśli $f(\xi) < 0$, to kładziemy $a_1 = \xi$ a $b_1 = b$, natomiast jeśli $f(\xi) > 0$, to kładziemy $b_1 = \xi$ a $a_1 = a$. W obu przypadkach dostajemny o połowę mniejszy przedział $[a_1, b_1]$, taki, że na lewym końcu wartość funkcji jest ujemna, a na prawym dodatnia (czyli tak jak na $[a, b]$).

Teraz definiujemy $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ i postępujemy jak poprzednio.

Kontynuując tę konstrukcję otrzymamy ciąg coraz mniejszych przedziałów $[a_n, b_n]$ o następujących własnościach:

1. $f(a_n) < 0$, $f(b_n) < 0$,

2. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$
3. $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$

Ciąg $\{a_n\}$ jest więc rosnący i ograniczony od góry, a zatem jest zbieżny. Podobnie, $\{b_n\}$, jako ciąg malejący i ograniczony od dołu też jest zbieżny. Ponadto, oba ciągi zmierzają do tej samej granicy, nazwijmy ją c, gdyż różnica $a_n - b_n$ jest dowolnie mała. W konskwencji, na podstawie twierdzenia o zachowaniu nierówności w granicy mamy: $f(c) \leq 0$ oraz $f(c) \geq 0$. A zatem $f(c) = 0$. ■.

Dowód twierdzenia Darboux wynika z zastosowania powyższego twierdzenia do funkcji $g : I \mapsto I\!R$ danej wzorem $g(x) = f(x) - c$. ■

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie. Niech $f : [a, b] \mapsto I\!R$ będzie funkcję ciągłą. Wtedy zbiór wartoci funkcji $f([a, b])$ jest ograniczony oraz istnieje najmniejsza m i największa M wartość funkcji f w przedziale $[a, b]$.

Ponadto, istnieją punkty $x_0 \in [a, b]$ oraz $x_0' \in [a, b]$, że $f(x_1) = m$, a $f(x_2) = M$.

Uwaga. Twierdzenie Weierstrassa pozostaje prawdziwe jeśli przedział $[a, b]$ zastąpimy np. sumą kilku takich przedziałów. Wszystkie one muszą być domknięte i ograniczone.

Uwaga. Twierdzenie Weierstrassa nazywamy też *twierdzeniem o przyjmowaniu wartości najmniejszej i największej w przedziale domkniętym i ograniczonym.*

Dowód. (szkic) Pokazujemy wpierw, że funkcja f jest ograniczona na $[a, b]$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że tak nie jest. Wtedy, dla każdego n istnieje $x_n \in [a, b]$ takie, że $|f(x_n)| \geq n$. W twierdzenia Bolzana-Weierstrassa, z ciągu x_n można wybrać podciąg zbieżny x_{n_m}, zbieżny dpo pewnego x_0, które też należy do $[a, b]$. Ponieważ funkcja f jest ciągła, to $f(x_{n_m}) \to f(x_0)$, co jest sprzeczne z faktem, że $|f(x_{n_m})| \to +\infty$.

Z zasady ciągłości wynika, że istnieje $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, czyli kres górny wartoci funkcji. Stąd wynika, że istnieje ciąg (x_n) taki, że

$f(x_n) \to M$. Podobnie jak wyżej pokazujemy, że można z niego wybrać podcig x_{n_m} zbieżny dpo pewnego x_0', które też należy do $[a, b]$. Wtedy jednak $f(x_{n_m}) \to f(x_0')$. Zatem $f(x_0') = M$. Kres górny zbioru M należy do zbioru $f([a, b])$, czyli jest jego wartością największą.

Dowód dla $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ jest analogiczny. ■

Twierdzenie(. o ciągłości funkcji odwrotnej).

Niech $f : [a, b] \mapsto I\!R$ będzie funkcję ciągłą. Funkcja f ma funkcję odwrotną f^{-1} wtedy i tylko wtedy, gdy$f$ jest ściśle monotoniczna.

W takim przypadku, $f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$, gdzie $f(a) = c$, a $f(b) = d$.

Ponadto, f^{-1} jest ciągła. ■

Uwaga. Dowód można znaleźć np. w książce F. Leji, Rachunek różniczkowy i całkowy, ...

Twierdzenieo. ciągłości funkcji złożonej. Niech $f : [a_1, b_1] \mapsto [a_2, b_2]$ oraz $g : [a_2, b_2] \mapsto [a_3, b_3]$ będą funkcjami ciągłymi. Wtedy funkcja $h = g \circ f$, $h : [a, b_1] \mapsto [a_3, b_3]$ też jest funkcją ciąg/la.

Dowód. jest (prawie) oczywisty. ■.

1.6 Przykłady funkcji ciągłych.

1.6.1 Funkcje elementarne

Ciągłość funkcji $f(x) = x$ jest oczywista i wynika wprost z definicji. Twierdzenia dotyczące operacji arytmetycznych na funkcjach ciągłych implikują natychmiast ciągłość **wielomianów** oraz **funkcji wymiernych** (czyli ilorazów wielomianów).

Z kolei, z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej wynika ciągłość **pierwiastków** tj. funkcji postaci $f(x) = \sqrt[n]{x}$, określonych dla $x \geq 0$ jeśli n jest parzyste, a dla dowolnego x, jeśli n jest nieparzyste.

Ciągłość **funkcji wykadniczych** tj. funkcji postaci $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, wynika ze wzoru $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ (który w istocie mówi, że funkcja wykładnicza jest ciągła w zerze). Mamy bowiem

$$\lim_{h\to 0} a^{x+h} = \lim_{h\to 0} a^x a^h = a^x \lim_{h\to 0} a^h = a^x.$$

A zatem, z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej, także **funkcje logarytmiczne** są ciągłe.

Aby udowodnić ciągłość **funkcji trygonometrycznych** wystarczy udowodnić ten fakt dla funkcji $f(x) = \sin x$. Funkcję $f(x) = \cos x$ możemy bowiem traktować jako funkcję złożoną funkcji liniowej i funkcji sinus jako że $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, a tangens i cotangens są ilorazami funkcji sinus i cosinus. Dla funkcji sinus, korzystając ze wzoru na sinus sumy mamy:

$$\lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \lim_{h\to 0}(\sin x \cos h + \cos x \sin h) =$$
$$= \sin x \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x.$$

Korzystamy tu z tego, że $\sin h \to 0$ gdy $h \to 0$, a $\cos h \to 1$ gdy $h \to 0$. Równości te mówią, że funkcje sin i cos są ciągłe w zerze. Pierwsza z nich wynika z faktu, że że dla $0 < h < \frac{\pi}{2}$ mamy $0 < \sin h < h$, dla gdy $h \to 0$. Dla $h < 0$ korzystamy z tego, że $\sin(-h) = \sin h$. Druga równość wynika z faktu, że dla $0 < h < \frac{\pi}{2}$ mamy $1 - \sin h < \cos h < 1$.

Z ciągłości funkcji trygonometrycznych, poprzez twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej, wynika ciągłość **funkcji cyklometrycznych** czyli funkcji funkcji odwrotnych do trygonometrycznych (stosownie zacieśnionych).

Wyprowadzimy teraz wzór, który będzie bardzo użyteczny w następnym rozdziale. Będziemy korzystać z ciągłości funkcji $x \mapsto \ln x$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

Podstawmy $a^h - 1 = x$. Oczywiście, warunek $h \to 0$ pociąga za sobą warunek $x \to 0$. Zauważmy także, że podstawienie można też zapisać w postaci

$$h \ln a = \ln(1+x).$$

Naszą granicę możemy więc zapisać jako

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \ln a}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \ln a.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że funkcja ln jest ciągła w punkcie e.

1.6.2 Funkcje hiperboliczne i odwrotne ($area$)..

Funkcjami *hiperbolicznymi* nazywamy cztery funkcje: cosinus hiperboliczny, sinus hiperboliczny, tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny, które są zdefiniowane poniżej. Jak widać, w definicjach tych występuje funkcja exponens. Tłumaczy to dlaczego nie mogliśmy podać tych definicji wcześniej.

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \mathrm{tgh}(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \mathrm{ctgh}(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \end{aligned}}$$

Wyprowadzimy teraz wzór na funkcję odwrotną do funkcji $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ traktowanej jako funkcja z $I\!R$ w $I\!R$. Będzie to jednocześnie dowód istnienia funkcji odwrotnej do sinh. Mamy

$$y = sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Stąd
$$2y = e^x - e^{-x}.$$
Mnożąc obie strony przez e^x otrzymujemy
$$2ye^x = (e^x)^2 - 1.$$
Stąd, podstawiając $e^x = a$. mamy po przekształceniach
$$a^2 - 2ya - 1 = 0.$$
Zauważmy, że delta tego trójmianu jest zawsze dodatnia. Mamy więc dwa pierwiastki równania kwadratowego
$$a_1 = \frac{2y + 2\sqrt{1+y^2}}{2}, \quad a_2 = \frac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2}$$

Ale $a = e^x$ jest zawsze dodatnie. Drugi pierwiastek zatem odpada i zostaje
$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}.$$
Ostatecznie, logarytmując obie strony dostajemy
$$x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$
Ponieważ jesteśmy przyzwyczajeni jednak bardziej do funkcji zapisanych w postaci $y = y(x)$ niż $x = x(y)$ zapiszmy zatem:

> Funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = \sinh x$ jest funkcja
> $$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$