Rozdział 4

Całki nieoznaczone

4.1 Definicje i podstawowe wzory

4.1.1 Funkcja pierwotna

Przypuśćmy, że mamy daną funkcję

$$f\colon I \to \mathbb{R},$$

gdzie I jest przedziałem otwartym.

Definicja. Funkcję $F\colon I \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją *pierwotną* funkcji f, jeżeli F jest różniczkowalna i mamy:

$$F'(x) = f(x)$$

dla $x \in I$.

Funkcja pierwotna F zwana jest też *całką nieoznaczoną* funkcji f (lub krótko: całką) i oznaczana jest zazwyczaj symbolem

$$\int f(x)dx,$$

Zauważmy, że jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to także $F+\text{const}$ jest funkcją pierwotną funkcji f. Ten fakt często wyrażamy w ten sposób, że piszemy:

$$F = \int f(x)dx + \text{const}.$$

Często też, mówiąc „całka nieoznaczona", mamy na myśli cała rodzinę funkcji pierwotnych różniących się o stałą (zwaną *stałą całkowania*), a nie tylko jedną funkcję. Z reguły te rozbieżności w terminologii nie prowadzą do nieporozumień, jeżeli się pamięta, że tak czy owak symbol $\int f(x)dx$ nie jest jednoznaczny. Poniżej będziemy z reguły pomijać stałą całkowania. W najbliższym podrozdziale jednak ją piszemy.

4.1.2 Wzory podstawowe

Potęgi

Większość poniższych wzorów wynika natychmiast z odpowiednich wzorów dotyczących różniczkowania.

Oznaczmy przez c funkcję stała równą c. Mamy

$$\int c dx = cx + \text{const}$$

W szczególności

$$\int 0 dx = \text{const}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const}.$$

Ostatni wzór jest prawdziwy dla dowolnego wykładnika rzeczywistego α. Mamy bowiem

$$\boxed{\begin{aligned} &\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{const} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq -1 \\ &\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + \text{const} \end{aligned}}$$

Uwaga. Ostatni wzór w ramce wymaga pewnego komentarza. Otóż funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla dowolnego $x \neq 0$. Zgodnie z definicją funkcji pierwotnej, funkcję tę powinniśmy traktować **osobno** w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$. W każdym z nich (z osobna) zachodzi wzór $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + \text{const}$. W szczególności, w każdym z nich możemy mieć do czynienie z inną stałą.

Funkcje trygonometryczne

Bardzo łatwo uzasadnić następujące wzory:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + \text{const}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + \text{const}$$

Funkcje wykładnicze i cyklometryczne

Mamy oczywiście $\boxed{\int e^x\, dx = e^x + \text{const}}$. Stąd wzory na całki funkcji cyklometrycznych.

$$\int \sinh x\, dx = -\cosh x + \text{const}$$

$$\int \cosh x\, dx = -\sinh x + \text{const}$$

Inne ważne wzory

Warto także zapamiętać następujące wzory, które natychmiast wynikają z odpowiednich wzorów na różniczkowanie.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + \text{const}$$

Wreszcie, jako ostatni podamy wzór, który już nie jest tak natychmiastowy jak poprzednie, ale jest nadzwyczaj użyteczny. Warto więc go wciągnąć na listę wzorów znanych „na pamięć".

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + \text{const}}$$

4.2 Metody całkowania

4.2.1 „Liniowość"

Łatwo zauważyć wprost z definicji funkcji pierwotnej, że zachodzą wzory:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

Wzory te jednak nie oznaczają, że operacja $\int$ jest liniowa (stąd cudzysłów), gdyż wyrażają one pewne fakty „z dokładnością” do stałej.

Ze wzorów powyższych wynika, że potrafimy już wyznaczyć całkę dowolnego wielomianu, ponieważ jest on liniową kombinacją wyrażeń postaci x^n, a te potrafimy zcałkować.

4.2.2 Bardzo ważny wzór

Bardzo łatwo wyznaczyć całkę z ułamka, gdy w liczniku mamy pochodną mianownika. Wtedy bowiem

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|}$$

Przykłady:

1. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}(x)\,dx = \ln|f(x)|$

2. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1)}\,dx$. Pochodna mianownika wynosi $2x$, a my mamy tylko x w liczniku. Prosta „sztuczka" użyta poniżej będzie jeszcze bardzo często stosowana. Piszemy

$$\int \frac{x}{x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

4.2.3 Całkowanie przez części

Przypomnijmy wzór na pochodną iloczynu: $(fg)' = f'g + fg'$. Zapiszmy go w postaci:

$$f'g = (fg)' - fg'.$$

Stąd, oraz z definicji całki wynika natychmiast wzór

$$\boxed{\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx,}$$

który stanowi podstawę metody całkowania zwanej *całkowaniem przez części.* Polega ona na zapisaniu funkcji podcałkowej w postaci iloczynu $f'g$ i zastosowaniu powyższego wzoru.

Przykłady:

1. $\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$

2. $\int \ln x\,dx = \int (x)' \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x.$

   W tym przykładzie funkcję podcałkową $\ln x$ potraktowaliśmy wpierw jako iloczyn $1 \cdot \ln x$, a następnie 1 zapisaliśmy w postaci $(x)'$.

Spróbujmy zrobić jeszcze raz przykład 1 przyjmując, że to x jest pochodną. Mamy zatem:

$$\int xe^x\,dx = \int (\frac{x^2}{2})' e^x\,dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x\,dx.$$

Wzór ten jest wprawdzie prawdziwy, ale nie ma z niego większego pożytku, bo całka po prawej stronie bynajmniej nie jest prostsza od całki po lewej stronie. Wynika stąd, że całkowanie przez części nie zawsze jest skuteczne.

4.2.4 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie. Załóżmy, że funkcja g ma funkcję pierwotną i niech funkcja f będzie klasy C^1. Wówczas

$$\boxed{\int g(f(x))\frac{df(x)}{dx}\,dx = \int g(y)'\,dy\Big|_{y\,=\,f(x)}\,.}$$

Dowód. Niech $G(y)$ będzie funkcją pierwotną funkcji $g(y)$. Wtedy prawą stronę powyższej równości możemy zapisać jako $F(x) = G(f(x))$. Obliczmy pochodną funkcji F (względem x). Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dG}{dy}\Big|_{y\,=\,f(x)} \cdot \frac{df}{dx} = g(y)\Big|_{y\,=\,f(x)} \cdot \frac{df}{dx} = g(f(x))\frac{df(x)}{dx}.$$

Otrzymaliśmy funkcję podcałkową lewej strony co kończy dowód. ■

Przykłady:

1. Obliczymy całkę $\displaystyle\int \cos(4x-5)\,dx$. Podstawienie będzie postaci $y = 4x-5$. Aby móc zastosować powyższy wzór brakuje nam po lewej stronie $\frac{dy}{dx} = 4$. Mnożąc i dzieląc przez 4 otrzymujemy

$$\int \cos(4x-5)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(4x-5)\cdot 4\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos y\,dy = \frac{1}{4}\sin y = \frac{1}{4}\sin(4x-5).$$

2. W praktyce postępujemy szybciej stosując pewne reguły mnemotechniczne. Powtórzmy jeszcze raz ostatni przykład. Mamy obliczyć całkę $I = \displaystyle\int \cos(4x-5)\,dx$. Podstawiamy $y = 4x-5$. Stąd

$$dy = 4dx.$$

Czyli postępujemy tak jakbyśmy lewą stronę rózniczkowali po y, a prawą po x. Dalej stosujemy zwykłe reguły podstawiania; za $4x-5$ podstawiamy y, a za $4dx$ podstawiamy dy. Otrzymujemy jak poprzednio $I = \frac{1}{4}\int \cos y\,dy$ i tak dalej.

3. Obliczymy całkę $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Podstawiamy $x = \sin t$. A zatem $dx = \cos t dt$. Stąd

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt.$$

Całka $\int \cos^2 t\,dt$ (a także $\int \sin^2 t\,dt$) będzie pojawiać się dosyć często w naszych przykładach. Najprostszym sposobem jej obliczenia jest zastosowanie poniższego wzoru z trygonometrii:

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t.$$

A zatem

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t.$$

Musimy teraz wrócić do zmiennej x, pamiętając, że $x = \sin t$. Proste wyliczenia prowadzą do wzoru

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Rachunki te wymagają jednak kilku komentarzy. Jak pamiętamy, cały czas milcząco zakładamy, że funkcje, którymi operujemy określone są w pewnym przedziale. W przypadku całki I, największy przedział jaki wchodzi w grę to przedział $[-1, 1]$ (dla x). Precyzując, podstawienie $x = \sin t$ możemy traktować zatem jako funkcję zmiennej t gdzie $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. W przedziale tym cosinus jest dodatni; Dlatego m.in. mogliśmy napisać $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. Z tego samego powodu, z faktu że $x = \sin t$ wynika, że $t = \arcsin x$.

4.2.5 Wzór rekurencyjny

Kolejna metoda całkowania polega na wyrażeniu jednych całek przez inne. Jako przykład wyprowadzimy ważny dla nas wzór rekurencyjny.

Oznaczmy przez I_n całkę $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Zachodzi następujący wzór (dla $n \geq 2$):

Wzór.

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}}$$

Zauważmy, że ponieważ wiemy, iż $I_1 = \operatorname{arc\,tg} x$, to powyższy wzór pozwala nam istotnie wyliczyć I_n dla dowolnego n naturalnego.
Dowód. Liczymy:

$$(*) \qquad I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right)' = ((1+x^2)^{1-n})' = (1-n)(1+x^2)^{-n}(2x) = -(n-1)\frac{2x}{(1+x^2)^n}.$$

Korzystając z tego związku, możemy ostatnią całkę z $(*)$ zapisać w postaci nadającej się do całkowania przez części. Mamy zatem

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2(n-1)} \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right)' x\,dx =$$

$$= \frac{-1}{2n-2}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{n-2}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx.\right.$$

Wzór $(*)$ możemy więc zapisać w postaci

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

co, po dodaniu, kończy dowód wzoru. ■.

4.3 Całkowanie funkcji wymiernych

4.3.1 Dwa twierdzenia z algebry

W dalszym ciągu będziemy korzystać z następujących twierdzeń z algebry, których dowody pomijamy.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki. Wielomian zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynu stałej, jednomianów postaci $(x-a)$ oraz wielomianów stopnia drugiego (tzn. trójmianów kwadratowych) o „delcie" ujemnej czyli postaci $(x-p)^2+q^2$.

Przez funkcję wymierną rozumiemy funkcję postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć ponadto, że stopień wielomianu P jest mniejszy od stopnia wielomianu Q (gdyż w przeciwnym przypadku moglibyśmy podzielić P przez Q).

Twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste. Każda funkcja wymierna o stopniu licznika mniejszym od stopnia mianownika daje się przedstawić jako suma *ułamków prostych* tj. wyrażeń typu:

$$\frac{A}{x-a} \text{ i ogólniej } \frac{A}{(x-a)^k}$$

oraz

$$\frac{Cx+D}{(x-p)^2+q^2} \text{ i ogólniej } \frac{Cx+D}{((x-p)^2+q^2)^k},$$

wg. następujących reguł:

jeśli w rozkładzie wielomianu Q na czynniki występuje czynnik $(x-a)^k$, to w rozkładzie funkcji $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste występuje suma

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

jeśli w rozkładzie wielomianu Q na czynniki występuje czynnik $((x-p)^2+q^2)^k$, to w rozkładzie funkcji $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste występuje suma

$$\frac{C_1x+D_1}{((x-p)^2+q^2)}, \frac{C_2x+D_2}{((x-p)^2+q^2)^2}, \ldots, \frac{C_kx+D_k}{((x-p)^2+q^2)^k}.$$

gdzie A_i, C_i, D_i są pewnymi stałymi. ■

Aby powyższe twierdzenie istotnie umożliwiało nam całkowanie funkcji wymiernych, musimy rozwiązać dwa problemy: po pierwsze pokazać jak całkować ułamki proste, a po drugie, jak praktycznie wyznaczać rozkład funkcji wymiernej.

4.3.2 Całkowanie ułamków prostych

Całkowanie ułamków prostych postaci $\frac{A}{(x-a)^k}$ nie nastręcza żadnych problemów. Dla $k=1$ mamy

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a|,$$

a dla $k>1$ mamy

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

Jeżeli w mianowniku występuje trójmian kwadratowy, to całkowanie jest nieco bardziej pracochłonne. Sposób postępowania w tym przypadku omówimy na przykładzie.

Obliczymy $I = \int \frac{x+3}{x^2-2x+9}dx$. Wyróżnik Δ jest ujemny, a więc istotnie mamy do czynienia z ułamkiem prostym. Najbliższy cel jest następujący: przedstawimy ułamek pod całką w postaci sumy dwóch ułamków tak, aby w pierwszym z nich licznik był pochodną mianownika, a w drugim stałą. Pochodna mianownika wynosi $2x-4$. Piszemy więc:

$$\frac{x+3}{x^2-2x+9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4+10}{x^2-2x+9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-2x+9} + \frac{5}{x^2-2x+9}.$$

A zatem

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-2x+9}dx + \int\frac{5}{x^2-2x+9}dx$$

Pierwsza z całek wynosi $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+9)$. Pozostaje do obliczenia druga całka. Oznaczmy ją przez I_2. Zacznijmy od sprowadzenia mianownika do postaci kanonicznej. Mamy

$$x^2-2x+9=(x-2)^2+5.$$

Celem jest teraz uzyskanie całki postaci $\int\frac{1}{1+t^2}$. Przekształcajmy więc.

$$I_2=\int\frac{5}{x^2-2x+9}dx=\int\frac{5}{(x-2)^2+5}dx=\int\frac{5}{5[\frac{(x-2)^2}{5}+1]}dx=$$

$$=\int\frac{1}{(\frac{x-2}{\sqrt{5}})^2+1}dx.$$

Podstawiając $\frac{x-2}{5}=t$; $\frac{1}{\sqrt{5}}dx=dt$; otrzymujemy:

$$I_2=\sqrt{5}\int\frac{dt}{1+t^2}=\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}t=\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}(\frac{x-2}{5}).$$

Ostatecznie

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+9)+\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}(\frac{x-2}{5}).$$

Uwaga. Podobnie (tj. przez sprowadzenie trójmianu do postaci kanonicznej), możemy każdy ułamek prosty z trójmianem kwadratowym w mianowniku doprowadzić do postaci $\int\frac{1}{(1+t^2)^k}$. Dla $k>1$ stosujemy wzór rekurencyjny omawiany w poprzednim podrozdziale.

4.3.3 Jak znaleźć rozkład?

Podamy tylko jeden przykład.
Przykłady:

1. Rozłożymy na ułamki proste funkcję $\frac{1}{x^2+x-2}$.

   Rozkładamy wpierw mianownik na czynniki. Mamy $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. A zatem, z twierdzenia o rozkładzie na ułamki proste, istnieją takie stałe A,B, że zachodzi równość:

   (∗). $$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1)}+\frac{B}{x+2}$$

Stąd, mnożąc obie strony przez mianownik, otrzymujemy

$$(**) \qquad 1 = A(x+2) + B(x-1)$$

Uwaga. O ile równość $(*)$ zachodzi dla wszystkich x z wyjątkiem $x = 1$ i $x = -2$, to równość $(**)$ zachodzi już dla każdego x, co wynika z ciągłości funkcji wielomianowych.

Sposób I (uniwersalny).

Grupujemy po prawej stronie wyrazy tak, aby uwypuklić współczynniki przy poszczególnych potęgach zmiennej x. Otrzymujemy

$$1 = (A+B)x + 2A - B.$$

Korzystamy teraz z faktu, że dwa wielomiany są sobie równe (tożsamościowo) jeśli współczynniki przy tych samych potęgach są sobie równe. Mamy zatem

$$A + B = 0,$$
$$2A - B = 1.$$

Jest to układ dwóch równań o dwóch niewiadomych. Bez trudu znajdujemy, że $A = \frac{1}{3}$, a $B = -\frac{1}{3}$.

Ostatecznie mamy

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1)} - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| = \frac{1}{3} ln \frac{|x-1|}{|x+2|}.$$

Sposób II.

W tożsamości $(**)$ podstawiamy wpierw $x = -2$, a następnie $x = 1$. Otrzymujemy natychmiast $B = -\frac{1}{3}$ oraz $A = \frac{1}{3}$. Sposób ten jest szczególnie przydatny w sytuacji, gdy w rozkładzie mianownika występują głównie czynniki postaci $(x - a)$ w pierwszej potędze.

Uwaga. Sposób I zawsze doprowadza o układu k równań liniowych z k niewiadomymi gdzie k jest liczbą szukanych stałych. Układ ten zawsze ma rozwiązanie i to dokładnie jedno Zauważmy, że k jest stopniem mianownika.

4.4 Całkowanie funkcji z sinusami i cosinusami

4.4.1 Podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Oznaczmy przez $R(u, v)$ funkcję wymierną zmiennych u i v. Jeżeli za u podstawimy $\cos x$, a za v $\sin x$, to otrzymamy funkcję, której całkę przez pewne podstawienie jesteśmy w stanie wyrazić za pomocą całki z funkcji wymiernej. Tym uniwersalnym podstawieniem jest podstawienie

$$\boxed{\operatorname{tg}\tfrac{x}{2} = t.}$$

A oto, jak wyrażają się funkcje trygonometryczne za pomocą t. Wzory te wynikają z wzorów trygonometrycznych. Przykładowo, wzór na $\sin x$ można wyprowadzić następująco:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}.$$

Dzieląc licznik i mianownik przez $\cos^2\frac{x}{2}$ wyrazimy $\sin x$ za pomocą t.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \end{array}}$$

Ponadto, ponieważ $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} t$, mamy

$$\boxed{dx = \tfrac{2\,dt}{1+t^2}.}$$

Uwaga. Podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, jak mówiliśmy, jest podstawieniem uniwersalnym w tym sensie, że zawsze otrzymujemy funkcję wymierną zmiennej t. Jak to często bywa z narzędziami uniwersalnymi, w pewnych przypadkach inne podstawienia mogą się okazać lepsze.

Przykłady:

1. Niech $I = \int \frac{dx}{\sin x}$. Podstawiając $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ otrzymujemy
$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \ln|t| = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|$$

2. Obliczmy całkę $I = \int \cos^2 x \sin x\, dx$. Podstawienie $\cos x = t$; $-\sin x\, dx = dt$, daje
$$I = -\int t^2\, dt = -\frac{t^3}{3} = -\frac{1}{3}\cos^3 x.$$
Polecamy Czytelnikowi obliczenie tej całki za pomocą podstawienia uniwersalnego.

4.4.2 Iloczyny sinusów i cosinusów

Chodzi tu o funkcje postaci $\sin ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$ i $\sin ax \cos bx$. Funkcje tego typu są bardzo ważne w zastosowaniach. Pokażemy sposób postępowania w pierwszym przypadku. Opiera się on na następującym wzorze z trygonometrii
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$$

A zatem
$$\int \sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\int \sin(a+b)x + \frac{1}{2}\int \sin(a-b)x =,$$
$$= \frac{-1}{2(a+b)}\cos(a+b)x + \frac{1}{2(b-a)}\cos(a-b)x$$

W pozostałych przypadkach postępujemy podobnie, korzystając z analogicznych wzorów z trygonometrii.

W szczególności, zauważmy, że $\sin^k x$ oraz $\cos^k x$ można zawsze zapisać w postaci sumy sinusów i cosinusów wielokrotności x, a więc w konsekwencji łatwo zcałkować. Przykładowo, niech $f(x) = \sin^3 x$. Wiemy, że $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. A zatem

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos 2x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x + \sin x).$$

W takiej formie, funkcja f jest już łatwa do zcałkowania.

4.5 Inne rodziny funkcji „łatwo” całkowalnych

Pokażemy tu kilka kolejnych rodzin funkcji, których całki, przez stosowną zmianę zmiennych możemy doprowadzić do całek z funkcji wymiernych.

4.5.1 Funkcje zawierające e^{ax}

Niech $R(u)$ będzie funkcją wymierną zmiennej u. Wtedy całkę z funkcji postaci $R(e^{ax})$ można łatwo sprowadzić do całkowania pewnej funkcji wymiernej za pomocą podstawienia $e^{ax} = t$. Zobaczmy jak to działa na przykładzie.

Przykłady:

1. Obliczymy $I = \int \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$.

   Podstawiając $e^x = t$ dostajemy $x = \ln t$ czyli $dx = \frac{1}{t} dt$. A zatem

$$I = \int \frac{1-t}{(1+t)t} dt = \int \frac{1}{t} dt - 2\int \frac{1}{(1+t)} dt =$$

$$= \ln t - 2\ln(1+t) = x - 2\ln(1+e^x).$$

4.5.2 Funkcje zawierające pierwiastki

Załóżmy, że w przepisie funkcji f występują różne potęgi zmiennej x, w tym także ułamkowe czyli pierwiastki. Przykładowo rozważmy całkę

$$I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$$

Podstawienie $x = t^6$ pozwala na pozbycie się wszystkich pierwiastków, a ponieważ wtedy $dx = 6t^5 dt$, to otrzymujemy pod całką funkcję wymierną.

Podobne podstawienie może być stosowane także gdy zamiast x występuje wyrażenie postaci $\frac{ax+b}{cx+d}$. Przykładowo rozważmy całkę

$$I = \int \frac{1}{x}\sqrt[2]{\frac{1+x}{x}}.$$

Podstawienie $\frac{1+x}{x} = z^2$ pozwala na pozbycie się pierwiastka, a ponieważ wtedy, jak łatwo wyliczyć, $x = \frac{1}{z^2-1}$, co daje $dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$, to otrzymujemy pod całką funkcję wymierną.

4.5.3 Funkcje zawierające $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Przez odpowiednie podstawienie możemy zawsze sprowadzić $\sqrt{ax^2+bx+c}$ do jednej z trzech prostszych postaci:

- $\sqrt{1-y^2}$
- $\sqrt{y^2-1}$
- $\sqrt{1+y^2}$

W pierwszym przypadku, przedział zmienności y nie wykracza poza $[-1,1]$. Podstawiając $y = \sin t$, $\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ otrzymamy $\sqrt{1-y^2} = \cos t$.

W drugim przypadku, niech $y \geq 1$. Właściwym podstawieniem będzie zatem $y = \cosh t$, $t \geq 0$. Wtedy $\sqrt{y^2-1} = \sinh t$

W trzecim przypadku, po podstawieniu $y = \sinh t$ otrzymamy $\sqrt{1+y^2} = \cosh t$.

Zobaczmy kilka przykładów użycia ww. podstawień.

Przykłady:

1. Niech $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Zgodnie z sugestią, podstawiamy $x = \sin t$; $dx = \cos t\,dt$. Mamy

$$I = \int \cos t \cdot cost\,dt = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

2. Niech $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Zgodnie z sugestią, podstawiamy $x = \sinh t$; $dx = \cosh t\,dt$. Mamy

$$I = \int \frac{\cosh t\,dt}{\cosh t} = \int 1\,dt = t = \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru na funkcję odwrotną do sinusa hiperbolocznego. Całkę tę zresztą powinniśmy znać na pamięć, bo występuje na naszej liście całek podstawowych.

Uwaga. W przypadku funkcji zawierających $\sqrt{ax^2+bx+c}$ za klasyczne można uznać często stosowane tzw. podstawienia Eulera (por. poniższa uwaga odnośnie literatury).
Uwaga. Znacznie więcej na temat całkowania czyli znajdowania funkcji pierwotnych można znaleźć w podręcznikach [1][1], [2], [3] i wielu innych.

4.6 Związek całki nieoznaczonej z polem

Niech $f : [a,b] \mapsto I\!R$ będzie funkcją ciągłą i niech $f(x) > 0$ w przedziale $[a,b]$. Dla $x \in [a,b]$, oznaczmy przez $S(x_0)$ pole[2] obszaru ograniczonego pionowymi prostymi o równaniach $x = a$, $x = x_0$, osią x oraz wykresem funkcji f (por. rysunek 1.1). Jest jasne, że $S(a) = 0$. Jeśli $x_0 + h$ także należy do $[a,b]$, to łatwo widać, że różnica pól $S(x_0+h)$ i $S(x_0)$ spełnia nierówności

$$m \cdot h \le S(x_0+h) - S(x_0) \le M \cdot h,$$

[1] Dostępna w internecie
[2] Formalna definicja pola będzie podana w następnym rozdziale.

gdzie m i M oznaczają najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $[x_0, x_0 + h]$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, to istnieją takie liczby $\zeta, \xi \in [a, b]$, że $f(\zeta) = m$, a $f(\xi) = M$. Dzieląc obie strony powyższej nierówności przez h, dostajemy

$$f(\zeta) \leq \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} \leq f(\xi).$$

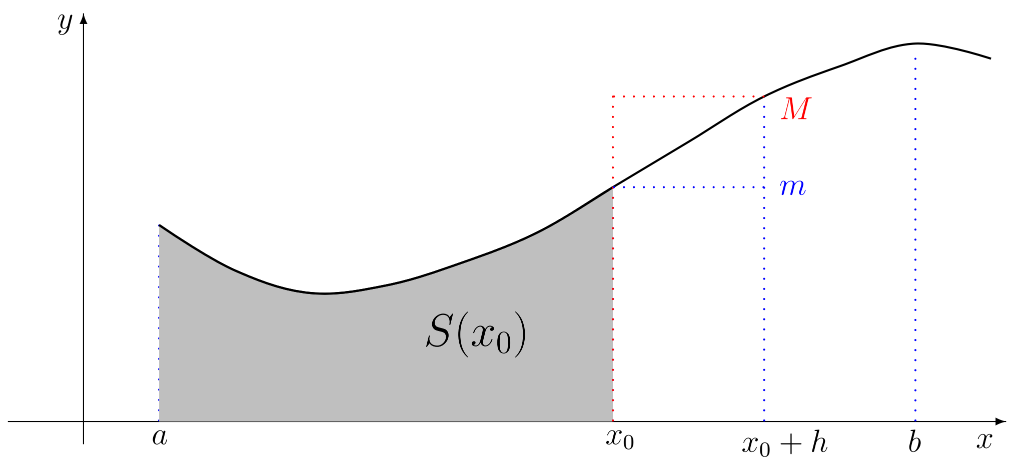
Z ciągłości f wynika, że zarówno ζ jak i ξ dążą do x_0, a zatem $f(\zeta)$ jak i $f(\xi)$ dążą do tej samej granicy równej $f(x_0)$ (przy $h \to 0$). Oznacza to, że funkcja $S = S(x)$ jest różniczkowalna w x_0 oraz $S'(x_0) = f(x_0)$. Inaczej mówiąc, funkcja S jest funkcją pierwotną funkcji f, czyli $F = \int f$.

Zauważmy, że pole obszaru pod wykresem f w przedziale $[a, b]$ (oznaczmy je P) wyraża się wzorem $P = S(b)$. Niech F będzie teraz dowolną funkcją pierwotną funkcji f. Mamy $F = S + \text{const}$. Stąd, $P = S(b) - S(a) = F(b) - F(a)$. Ostatecznie, możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek. Niech $f : [a, b] \mapsto I\!R$ będzie funkcją ciągłą i niech $f(x) > 0$ w przedziale $[a, b]$. Oznaczmy przez P pole obszaru ograniczonego pionowymi prostymi o równaniach $x = a$, $x = b$, osią x oraz wykresem funkcji f. Niech ponadto funkcja $F = \int f$ będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji f. Wtedy

$$P = F(b) - F(a).$$

■



Rysunek 4.1: Pole pod wykresem funkcji f na odcinku $x_0, x_0 + h$ jest między mh a Mh.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy II*, Książnica Atlas, Lwów - Warszawa, 1929.

[2] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom II*, PWN, Warszawa 1962.

[3] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1969.