Rozdział 5

Całka oznaczona

5.1 Definicja

Przypuśćmy, że mamy daną funkcję $f\colon [a,b] \mapsto I\!R$, której wykres przedstawiony jest na rysunku **??** i przypuśćmy, że naszym zadaniem jest obliczenie pola pod wykresem czyli pola kawałka płaszczyzny ograniczonego osią x-ów, wykresem funkcji oraz pionowymi prostymi o równaniach $x = a$ oraz $x = b$. Zagadnienie to jest punktem wyjścia do definicji tzw. **całki oznaczonej**. Należy jednak pamiętać, że obliczanie pól jest tylko jedną z możliwych interpretacji całki, która służy jedynie do tego, aby lepiej zrozumieć wprowadzane pojęcia.

Załóżmy, ża fukcja f jest ograniczona. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n „małych" przedzialików za pomocą punktów $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Oznaczmy przez Δx_i długość przedziału $[x_{i-1}, x_i]$. Największą z tych liczb nazywamy średnicą podziału i oznaczamy przez δ_n. Niech M_i oznacza kres górny funkcji f w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, a przez m_i kres dolny funkcji f w tym przedziale. Oba kresy istnieją bo funkcja jest z założenia ograniczona. Wreszcie, w każdym z przedzialików $[x_{i-1}, x_i]$ wybierzmy dowolny punkt ξ_i. Tworzymy teraz trzy sumy, zwane sumami Darboux[1]:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

[1]czytaj: darbu

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Ponieważ zawsze $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, to zachodzą następujące nierówności:

$$(*) \qquad s_n \leq \sigma_n \leq S_n$$

Miejmy nadzieję, że jasne jest także, że jeśli weźniemy drobniejszy podział, to sumy te będą lepiej przybliżać nasze pole. Stąd mamy następującą definicję:

Definicja. Jeżeli przy każdym ciągu coraz drobniejszych podziałów, suma σ_n dąży do tej samej granicy niezależnej od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy całką z funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy (najczęściej) przez

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

5.2 Funkcje całkowalne

Definicja całki oznaczonej wydaje się dosyć skomplikowana. Na całe szczęście z reguły nie stosujemy jej do obliczeń. W bieżącym podrozdziale poznamy też wystarczająco szeroką klasę funkcji całkowalnych (tzn takich, dla których całka istnieje). Warto może stwierdzić wyraźnie, że nie wszystkie funkje są całkowalne (przykład takiej funkcji podamy na końcu tego podrozdziału). Oznacza to, że nie zawsze istnieje granica ciągu σ_n. Natomiast zawsze istnieją granice ciągów s_n oraz S_n. Wynika to z tego, że pierwszy z nich jest rosnący, a drugi malejący jeśli rozważamy ciąg coraz drobniejszych przedziałow. Oba te ciągi są także ograniczone, pierwszy od góry (przez jakąkolwiek sumę górną), a drugi od dołu. Stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Całka $\int_a^b f(x)\, dx$ istnieje wtedy gdy różnica

$S_n - s_n$ jest dowolnie mała (przy odpowiednio drobnym podziale). Precyzyjniej, gdy

$$\forall \varepsilon \exists \delta \text{ że jeśli } \delta_n < \delta \text{ to } |S_n - s_n| < \varepsilon$$

Z powyższego kryterium łatwo wywnioskować podstawowe dla nas twierdzenie.

Twierdzenie. Funkcja ciągła na $[a, b]$ jest całkowalna.

Podajmy jeszcze dwa użyteczne twierdzenie.

Twierdzenie. Funkcja kawałkami ciągła na $[a, b]$ jest całkowalna.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$, a funkcja g różni się od f w skończonej ilości punktów przedziału $[a, b]$, to g też jest całkowalna i obie całki są równe.

Przykład funkcji niecałkowalnej

Najbardziej klasycznym przykładem funkcji niecałkowalnej jest następująca funkcja zwana funkcją Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

5.3 Własności całek

Definicja całki oznaczonej wydaje się dosyć skomplikowana. Na całe szczęście z reguły nie stosujemy jej do obliczeń.

Liniowość

Niech f, g będą funkcjami całkowalnymi w przedziale $[a, b]$. Wtedy funkcje $f + g$ oraz αf są też całkowalne. Ponadto operacja ćałkowania jest liniowa tzn.

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b \alpha f\, d = \alpha \int_a^b \alpha f\, d \\ \int_a^b f + g\, d = \int_a^b f\, d + \int_a^b g\, d\end{gathered}}$$

Addytywność względem przedziału

Przypuśćmy, że $f : [a, b] \mapsto I\!R$ jest funkcją ciągła i niech $c \in [a, b]$. Wtedy

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.}$$

Pewne nierówności

Zachodzą następujące nierówności

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$$

Jeżeli f jest całkowalna na $[a, b]$ i $f \geq 0$, to $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$,
Jeżeli f i g są całkowalne na $[a, b]$ i $f \geq g$, s to $\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$.

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Twierdzenie o wartości średniej

Przypuśćmy, że $f : [a, b] \mapsto I\!R$ jest funkcją ciągła. Wtedy istnieje ζ takie, że $a < c < b$ i zachodzi wzór

$$\boxed{f(\zeta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Twierdzenie podstawowe

Przypuśćmy, że $f : [a,b] \mapsto I\!R$ jest funkcją ciągła. Wtedy funkcja F zdefiniowana wzorem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jest klasy C^1 oraz $F'(x) = f(x)$.

Dowód. Rozważmy różnicę

$$R = F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

Korzystając z addytywności względem przedziału mamy

$$R = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h \cdot f(\zeta), \quad \text{gdzie} \;\; x \le \zeta \le x+h.$$

A zatem iloraz róznicowy funkcji F w punkcie x wynosi

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\zeta).$$

Niech teraz $h \longrightarrow 0$. Wtedy $\zeta \longrightarrow x$, a skoro funkcja f jest ciągła, to prawa strona zmierza do $f(x)$. A więc i lewa strona, będąca pochodną funkcji F, zmierza do $f(x)$. Otrzymujemy zatem

$$F'(x) = f(x).$$

Zauważmy, że wykazaliśmy tym samym istnienie pochodnej, a skoro pochodna jest ciągła, to funkcja F jest klasy C^1. ∎

Inaczej mówiąc, wykazaliśmy, że funkcja ciągła f na przedziale $[a, b]$ ma funkcję pierwotną. Jedną z funkcji pierwotnych jest właśnie funkcja F, zwana *funkcją górnej granicy całkowania*. Przypuśćmy, że Φ jest inną funkcją pierwotną funkcji F. Wówczas

$$F = \Phi + \text{const.}$$

Stałą tę można sprecyzować podstawiając $x = a$. Jest oczywistym, że $F(a) = 0$. Mamy więc $0 = F(a) = \Phi(a) + \text{const}$, a zatem $\text{const} = -\Phi(a)$. Czyli

$$F = \Phi - \Phi(a).$$

A zatem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór zwany *podstawowym wzorem rachunku całkowego*:

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),\\ \text{gdzie } \Phi \text{ jest dowolną}\\ \text{funkcją pierwotną funkcji}\\ f.\end{array}}$$

5.4 Obliczanie całek

Dzięki dopiero co wykazanemu twierdzeniu, obliczanie całek oznaczonych sprowadza się do wyznaczania funkcji pierwotnych czyli całek nieoznaczonych. Warto jednak na dwóch przykładach zobaczyć, jak to się najczęściej robi w praktyce.

5.4.1 Całkowanie przez części

Obliczymy całkę $I = \displaystyle\int_0^\pi x \sin x\,dx$. Mamy

$$I = -\int_0^\pi x(\cos x)'\,dx = -(x\cos x)\big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,dx = -(-\pi - (\sin x)\big|_0^\pi) = \pi.$$

5.4.2 Całkowanie przez podstawienie

Oto wersja „oznaczona" twierdzenia o zmianie zmiennych.

Twierdzenie. Niech f będzie funkcją ciągła na $[a,b]$, a $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ funkcją klasy C^1 (definiującą zmianę zmiennych). Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Przykładowo, całkę $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ liczymy jak następuje: Podstawiamy

$$x = \sin t,$$

gdzie $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Mamy zatem $dx = \cos t\,dt$. Więc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt$$

Czyli

$$I = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Nie jest to wynik zaskakujący; całka powyższa może być interpretowana jako pole ćwiartki koła o promieniu jeden.

Uwaga o granicach całkowania

Przyjmujemy następującą konwencję:

$$\int_a^b f\,d = -\int_b^a f\,d$$

5.5 Zastosowania całek

5.5.1 Pole obszaru

Związek pola z całką wystąpił już w definicji całki.

Przypuśćmy, że $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ są dwoma funkcjami ciągłymi takimi, że $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$.

Niech D będzie obszarem ograniczonym wykresami obu funkcji oraz pionowymi prostymi o równaniach $x = a$ oraz $x = b$. Wówczas pole $|D|$ wynosi

$$|D| = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Obliczmy przykładowo pole obszaru D ograniczonego elipsą o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (krótko, choć trochę nieformalnie: pole elipsy). Łatwo widać, że chodzi tu o całkę

$$\int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Wykorzystując fakt, że przedział całkowania i funkcja podcałkowa są symetryczne względem osi y-ów możemy naszą całkę zapisać w postaci

$$4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Podstawienie $x = at$ sprowadzi ją do całki rozważanej powyżej. Ostatecznie otrzymujemy

$$\boxed{\text{Pole elipsy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ wynosi } \pi ab}$$

5.5.2 Długość łuku

Załóżmy, że łuk krzywej K opisany jest równaniami parametrycznymi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

gdzie $t \in [\alpha, \beta]$. O funkcjach φ i ψ zakładamy, że są klasy C^1. Wtedy długość $|K|$ wyraża się wzorem

$$|K| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\frac{d\varphi}{dt})^2 + (\frac{d\psi}{dt})^2}\,dt.$$

Dowód. Podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ na n części za pomocą punktów $\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$. Odpowiada to podziałowi łuku na n części za pomocą punktów P_i o współrzędnych $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Jest intuicyjnie oczywiste, że długość łuku można przybliżać za pomocą długości łamanej $P_0P_1P_2 \dots P_n$, i że przybliżenie to jest tym lepsze im mniejsze są przedzialiki podziału odcinka $[\alpha, \beta]$ czyli im mniejsze, w konsekwencji, są odcinki łamanej. Długość łamanej dla podziału na n części wynosi

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})^2}.$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a do funkcji φ i ψ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2(\Delta t_i)^2 + (\psi'(\eta_i))^2(\Delta t_i)^2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2}\Delta t_i.$$

Jeżeli teraz weźmiemy ciąg coraz drobniejszych podziałów, to suma powyższa będzie coraz bliższa całki (por. uwaga poniżej)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}\, dt.$$

■

Bardzo często równania parametryczne łuku zapisujemy w postaci $x = x(t)$, $y = y(t)$ unikając w ten sposób wprowadzania zbyt wielu lsymboli. Nasz wynik można więc zapisać następująco w postaci wzoru w ramce.

> Jężeli łuk K jest opisany jest równaniami parametrycznymi klasy C^1
> $x = x(t)$, $y = y(t)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$, to jego długość wyraża się wzorem
>
> $$|K| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Wypiszmy osobno szczególny przypadek, gdy łuk L jest wykresem funkcji $y = y(x)$ klasy C^1 dla $x \in [a, b]$. Traktując ten opis jako opis względem parametru x, czyli

$$x = x, \quad y = y(x), \quad x \in [a, b]$$

mamy

> Jężeli łuk L jest jest wykresem funkcji $y = y(x)$ klasy C^1 dla $x \in [a, b]$, to
>
> $$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Obliczmy dla przykładu długość okręgu o promieniu r. Jeżeli umieścimy jrgo środek w początku układu, to można go opisać równaniami

$$x = r \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\varphi,$$

gdzie $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ponieważ $x'(\varphi) = -r \sin\varphi$, a $y'(\varphi) = -r \cos\varphi$, to długość okręgu wyraża sie całką

$$\int_0^{2\pi} r\, d\varphi = 2\pi r.$$

Uwaga.

5.5.3 Objętość bryły o znanych polach przekrojów

Twierdzenie. Przypuśśmy, że V jest bryłą przestrzenna ograniczoną, leżącą między płaszczyznami o równaniach $x = a$ i $x = b$. Przypuśćmy, że dla każdego punktu x leżacego między a i b znamy pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadła do osi x-ów i przechodząca x. Oznaczmy je przez $P(x)$ i załóżmy ponadto, że $P(x)$ jest funkcją ciągłą..

Wtedy objętość bryły $|V|$ wyraża się wzorem

$$|V| = \int_a^b P(x)\, dx.$$

Dowód. (szkic). Niech $x \in [a, b]$. Oznaczmy przez $V(x)$ objętość kawałka bryły od płaszczyzny prostopadłej do osi x-ów i przechodzącej przez a do równoległej płaszczyzny x. Załóżmy, że $P(x)$ jest funkcją rosnącą zmiennej x. Łatwo widać, że objętość części bryły między plaszczyznami przechodzącym przez x i przez $x+h$ równa się $V(x+h)-V(x)$. Z drugiej strony, skoro przekroje są coraz większe, to

$$P(x) \cdot h \leq V(x+h) - V(x) \leq P(x+h) \cdot h = P(\xi) \cdot h,$$

gdzie istnienie $\xi \in [x, x+h]$ wynika z twierdzenia Lagrange'a. Dzieląc obie strony przez h otrzymujemy

$$P(x) \leq \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leq P(\xi).$$

Przechodząc z h do granicy równej 0 otzrymujemy

$$V'(x) = P(x),$$

co oznacza, że $V(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $P(x)$. Ponieważ $V(a) = 0$, to z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego wynika, że $V(x) = \int_a^x P(t)\, dt$. Stąd $|V| = V(b) = \int_a^b P(t)\, dt$. ■

Powyższy wzór jest szczególnie przydatny w sytuacji gdy bryła V jest bryłą obrotową, gdyż wtedy łatwo obliczyć pola przekrojów. Niech, przykładowo na płaszczyźnie Oxy będzie dana funkcja ciągła $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, której wykres obracamy dokoła osi x-ów. Nasza bryła V jest ograniczona powstałą w ten sposób powierzchnią oraz płaszczyznami $x = a$ i $x = b$, prostopadłymi do osi obrotu. Każdy przekrój taką płaszczyzną jest kołem. Stosując oznaczenie jak w dowodzie wyżej mamy $P(x) = \pi(f(x))^2$. Ostatecznie otrzymujemy następujący wzór.

Objętość bryły Vpowstałej z obrotu wykresu funkcji ciągłej $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ wokol osi x-ów wynosi

$$|V| = \int_a^b \sqrt{1 + f^2(x)}\, dx.$$

Dla przykładu obliczmy objętość elipsoidy trójosiowej. Przez elipsoidę rozumiemy zarówno powierzchnię jak i bryłę przz nią ograniczoną. Przypuśćmy, że elipsoida jest opisana równiem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ustalmy x. Można tę operację traktować jako przecięcie elipsoidy płaszczyzną prostopadłą do osi x-ów i przechodzącą przez ustalony x. Jakie jest równanie powstałego przekroju? Praktycznie, jest to to samo równanie co wyżej z tym, że x jest teraz ustalone, a zmiennymi są y i z. Przenosząc składnik $\frac{x^2}{a^2}$ na prawą stronę, a następnie dzieląc obie strony tak, aby po prawej mieć jeden, dostajemy

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} = 1.$$

W tym nieco skomplikowanym wzorze rozpoznajemy równanie elipsy (ze względu na y i z) o półosiach równych $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ oraz $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Pole takiej elipsy wynosi $\pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)$. A zatem objętość elipsoidy wyraża sie łatwą całką

$$\frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi bc}{a^2}(2a^3 - 2\frac{a^3}{3}) = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Mamy więc kolejny wzór do zapamiętania

Objętość elipsoidy trójosiowej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wynosi

$$\frac{4}{3}\pi abc.$$

Dla $a = b = c = r$ otrzymujemy znany wzór na objętość kuli o promieniu r: $\frac{4}{3}\pi ar3$.

Na zakończenie rozważań o objętości wspomnijmy o tzw. regułe Cavalieriego, która mówi, że dwie bryły mające przekroje o tym samym polu mają równe objętości (chodzi o przekroje płaszczyznami równoległymi do siebie nawzajem). Łatwo widać, że reguła ta wynika z powyższego twierdzenia.

5.6 Całki niewłaściwe

Dotychczas zajmowaliśmy się całkami z funkcji ograniczonych i określonych w przedziałach neiskończonych. Teraz będziemy rozważać sytuację kiedy jeden z ww. warunków nie jest spełniony. Całki takie będziemy nazywać *niewłaściwymi*.

5.6.1 Definicje i własności

Mogą być dwa powody, dla których

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

jest całką *niewłaściwą*: albo funkcja „staje się nieskończona" na skraju lub wewnątrz przedziału całkowania, albo przedział całkowania jest postaci $[a, +\infty)$ lub $(-\infty, a]$. W dalszym ciągu zakładamy, że występuje tylko jeden z ww. powodów. Inne całki niewłaściwe przedstawiamy w postaci sumy całek, tak, aby omawiany warunek był spełniony. W szczególności całki typu $\int_{-\infty}^{+\infty}$ są zawsze rozważane jako suma całek $\int_{-\infty}^{a}+\int_{a}^{+\infty}$.

Zacznijmy od sytuacji gdy funkcja $f:[a,+\infty)$ jest ograniczona.

Wtedy

$$\int_a^{+\infty} f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f,$$

o ile ta granica istnieje. Jeżeli tak jest, to mówimy wtedy, że całka $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *jest zbieżna*. Podobnie definiujemy całkę $\int_{-\infty}^{a} f$. Całka $\int_{-\infty}^{+\infty}$ jest zbieżna, o ile zbieżne są obie powyższe całki (dla pewnego a).

Przypuśćmy teraz, że f jest ograniczona w przedziale $[a,\xi]$ dla każdego $\xi<b$, ale $\lim_{x\to b} f(x)=\infty$. Wtedy

$$\int_a^{b} f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\xi\to b}\int_a^\xi f,$$

o ile granica ta istnieje.

Przykłady:

1. $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}$$

2. $$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=\lim_{0\to\xi}\int_0^{\xi} e^{-x}\,dx=\lim_{0\to\xi}(e^{-x})\Big|_0^{\xi}=1$$

5.6.2 Podstawowe wzory i kryteria

Kryteria zbieżności pozwalają stwierdzić czy dana całka jest zbieżna czy nie poprzez porównanie zachowania funkcji podcałkowej z inną funkcją, o której coś wiemy. Nadzwyczaj użyteczne okazują się całki postaci $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\alpha}$ oraz $\int_0^1\frac{1}{x\alpha}$.

W pierwszym przypadku mamy: dla $\alpha\neq 1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}.$$

Granica ta istnieje dla $1 < \alpha$ a nie istnieje dla $1 > \alpha$. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że także dla $\alpha = 1$ odpowiednia granica nie istnieje. Mamy zatem następującą regułę:

> Całka $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\alpha}$ jest zbieżna $\Leftrightarrow$ gdy $\alpha > 1$.

W drugim przypadku mamy: dla $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1.$$

Tym razem granica ta istnieje dla $1 > \alpha$, a nie istnieje dla $1 < \alpha$. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że także dla $\alpha = 1$ odpowiednia granica nie istnieje. Mamy zatem następującą regułę:

> Całka $\int_0^1 \frac{1}{x\alpha}$ jest zbieżna $\Leftrightarrow$ gdy $\alpha < 1$.

Wcześniej jednak podamy jeszcze jedną definicję.

Definicja. Całkę $\int_a^b f$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną* wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka $\int_a^b |f|$.

Bezwzględna zbieżność to coś więcej niż zwykła zbieżność. Mamy bowiem następujące twierdzenie, którego dowód opuszczamy.

Twierdzenie. Całka bezwzględnie zbieżną jest zbieżną.

Klasycznym przykładem całki *warunkowo zbieżnej* tj. takiej, że jest zbieżna, ale nie jest bezwzględnie zbieżna, jest poniższa całka w ramce.

> Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$, ale całka $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}$ jest rozbieżna .

A oto zapowiadane dwa kryteria zbieżności całek niewłaściwych.

Pierwsze kryterium porównawcze

Twierdzenie. Jeżeli $|f| < g$ i całka $\int_a^b g$ jest zbieżna, to $\int_a^b f$ jest bezwzględnie zbieżna.

Jeżeli $|0 \leq f \leq g$ i całka $\int_a^b f$ jest rozbieżna, to $\int_a^b g$ też jest rozbieżna.

Drugie kryterium porównawcze

Twierdzenie. Jeżeli b jest punktem osobliwym całki $\int_a^b f$, oraz $f(x) \sim g(x)$ przy $x \to b$ oraz $g(x) > 0$ w otoczeniu b to

$$\int_a^b f \text{ jest zbieżna} \Leftrightarrow \int_a^b f \text{ jest zbieżna.}$$

5.6.3 Funkcje gamma i beta Eulera

Zastosujemy dopiero co poznane kryteria do dyskusji dwóch bardzo ważnych funkcji zdefiniowanych za pomocą całek niewłaściwych.

Definicje

Funkcja *gamma Eulera* zdefiniowana jest za pomocą następującej całki niewłaściwej

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Całka ta jest całką niewłaściwą z dwóch powodów. Po pierwsze przedział całkowania jest nieograniczony. Po drugie, co mnijej rzuca się w oczy, funkcja podcałkowa może dążyć do ∞ w otoczeniu zera, gdyż potęga t może być *a priori* dowolna, a więc i ujemna. Musimy więc zbadać zachowanie funkcji podcałkowej w otoczeniu dwóch punktów osobliwych, zera i nieskończoności.

W otoczeniu zera mamy

$$t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$$

i na podstawie drugiego kryterium porównawczego, nasza całka jest zbieżna dla $1 - x < 1$ czyli dla $x > 0$.

W otoczeniu ∞ (tzn. dla dostatecznie dużego t) mamy

$$0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq\sim \frac{1}{t^2}$$

i na podstawie pierwszego kryterium porównawczego, nasza całka jest zbieżna dla dowolnego x.

A zatem całka jest zbieżna dla $x > 0$. Tym samym przedział $(0, +\infty)$ staje się naturalną dziedziną funkcji Γ.

Funkcja *beta Eulera* zdefiniowana jest za pomocą następującej całki.

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx.$$

Zwróćmy uwagę, że całka ta jest niewłaściwa, gdyż wykładniki czynników x i $(1 - x)$ mogą być dowolne, a więc i ujemne. A zatem zarówno $x = 0$ jak i $x = 1$ mogą być punktami osobliwymi. Rozważmy jedynie sytuację w punkcie $x = 0$, pozostawiając drugi punkt jako ćwiczenie. W otoczeniu zera mamy

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}.$$

Całka ta, w otoczeniu zera, jest zbieżna dla $1-a < 1$, czyli dla $a > 0$. Po zrobieniu ćwiczenia okaże się, że całka definiująca funkcję beta jest zbieżna dla $a > 0$ i $b > 0$.

Gamma a silnia

Okazuje się, że jest silny związek między funkcją Γ, a znaną nam funkcją „silnia", która liczbie naturalnej przyporządkowuje $n!$. Wyprowadzimy teraz ten związek.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^x(-e^{-t})'\,dt =$$

$$-t^x e^{-t}\big|_0^{+\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

Otrzymaliśm zatem wzór

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Obliczmy teraz kilka wartości funkcji Γ.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Wartosć $\Gamma(2)$ można także obliczyć wprost z definicji, ale znacznie prościej jest napisać ją w postaci $\Gamma(1+1)$ i skorzystać z dwóch ostatnich wzorów. Mamy więc $\Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$. Podobnie otrzymujemy

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\cdot\Gamma(2) = 2.$$

Nietrudno zauważyć, że mamy następującą zależność

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n! \text{ dla } n\text{ß}\, I\!N.}$$

Ważne wzory

Na koniec naszych pobieżnych rozważań o funkcjach Eulera przytoczymy (bez dowodów) kilka nadzwyczaj użytecznych wzorów. Wszystkie one zasługują na to, aby się ich nauczyć na pamięć.

$$\boxed{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \text{ dla } 0 < p < 1.}$$

$$\boxed{B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

Podstawiając w pierwszym z nich $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

co daje kolejny wzór w ramce.

$$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

Pokażmy jeszcze jak dopiero co poznane wzory można wykorzystać do obliczenia całki $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dx$. Całki tej nie można obliczyć „normalnie", bo funkcja pierwotna funkcji e^{-x^2} nie wyraża się za pomocą funkcji elementarnych. Łatwo widać, że całka jest zbieżna.

W pierwszym kroku dokonujemy zmiany zmiennej podstawiając

$$x^2 = t \quad \text{czyli} \quad x = \sqrt{t}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-frac12}e^{-t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$