

MATEMATYKA DYSKRETNA

dr hab. Mariusz Mészka

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

<http://home.agh.edu.pl/~meszka>

Program wykładu

1. Zasada indukcji matematycznej.
2. Zbiory, podzbiory i multizbiory.
3. Funkcje i rozmieszczenia. Permutacje.
4. Zasada pudełkowania i przykłady jej zastosowań.
5. Zasada włączania-wyłączania. Nieporządki.
6. Podziały zbioru i liczby. Liczby Stirlinga.
7. Zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach.
8. Funkcje tworzące; przykłady wykorzystania.
9. Zliczanie obiektów kombinatorycznych.

Program wykładu (cd.)

10. Pojęcia wstępne teorii grafów. Izomorfizm grafów. Spójność.
11. Droga Eulera. Cykle i ścieżki Hamiltona.
12. Grafy dwudzielne. Drzewa. Grafy planarne.
13. Kolorowanie wierzchołków i krawędzi w grafach.

Literatura

- [1] J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański, Matematyka dyskretna dla informatyków, WN UAM, 2011.
- [2] M. Murat, I. Gorgol, Matematyka dyskretna w zadaniach, PWN, Warszawa, 2024.
- [3] R.A. Brualdi, Introductory combinatorics 5th Edition, Prentice Hall 2010.

Zasada indukcji matematycznej

Niech $S(n)$ będzie pewnym stwierdzeniem zależnym od parametru n , $n \in \mathbb{N}$.

Zakładamy, że:

- (1) istnieje takie n_0 , że stwierdzenie $S(n_0)$ jest prawdziwe,
- (2) jeżeli $S(k)$ jest prawdziwe dla $k \geq n_0$, to $S(k + 1)$ jest również prawdziwe.

Wówczas $S(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$.

Silna zasada indukcji

Niech $S(n)$ będzie pewnym stwierdzeniem zależnym od parametru n , $n \in \mathbb{N}$.

Zakładamy, że:

- (1) istnieje takie n_0 , że stwierdzenie $S(n_0)$ jest prawdziwe,
- (2) jeżeli $k \geq n_0$ oraz $S(l)$ jest prawdziwe dla każdego $l \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, k\}$, to $S(k + 1)$ jest również prawdziwe.

Wówczas $S(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$.

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n .

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lemat

Prawdziwe są następujące zależności:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Twierdzenie dwumienne

Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności, dla $x = y = 1$,

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.$$

Lemat

Liczba k -elementowych podzbiorów z powtórzeniami zbioru S , który zawiera n różnych elementów, każdy o nieograniczonej krotności, wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Twierdzenie wielomienne

Niech $x_1, x_2, \dots, x_t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t},$$

gdzie sumowanie przeprowadzone jest po wszystkich nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązaniach równania

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t = n,$$

oraz

$$\binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}.$$

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji $f : X \mapsto Y$ wynosi m^n .

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geq n$, to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych $f : X \mapsto Y$ wynosi $\frac{m!}{(m-n)!}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geq n$, to liczba wszystkich funkcji rosnących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m}{n}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m+n-1}{n}$.

Wniosek

Jeśli $|X| = |Y| = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f : X \mapsto Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (bijektywna). Wówczas liczba takich funkcji jest równa $n!$.

Definicja

Odwzorowanie bijektywne $f : X \mapsto X$ nazywamy *permutacją* zbioru X .

Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru n -elementowego oznaczamy symbolem S_n .

Permutację $f : X \mapsto X$ zapisujemy

$$f = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ f(x_1), & f(x_2), & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

Wówczas

$$f = \langle f(1), f(2), \dots, f(n) \rangle .$$

Definicja

Niech $f, g \in S_n$. Złożeniem permutacji f i g nazywamy permutację $g \circ f$ zdefiniowaną następująco

$$\forall i \in X : (g \circ f)(i) = g(f(i)).$$

Definicja

Permutację $e = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ nazywamy *identycznościową*.

Wniosek

Dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ zachodzi $f \circ e = e \circ f = f$.

Definicja

Każda permutacja $f \in S_n$ wyznacza jednoznacznie taką permutację $f^{-1} \in S_n$, że $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. f^{-1} nazywamy permutacją *odwrotną* do f .

Lemat

Dla dowolnych permutacji $f, g, h \in S_n$ spełnione są warunki:

$$(1) (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$(2) f \circ e = e \circ f = f$$

$$(3) f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

Stąd wynika, że (S_n, \circ) jest grupą, nazywaną *grupą symetryczną* stopnia n .

Definicja

Cyklem długości k nazywamy permutację $f_k = (x_1^k x_2^k \dots x_k^k)$, w której $f_k(x_1^k) = x_2^k$, $f_k(x_2^k) = x_3^k$, $f_k(x_{k-1}^k) = x_k^k$, $f_k(x_k^k) = x_1^k$, oraz $f_k(x) = x$ dla każdego $x \in X \setminus \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_k^k\}$.

Lemat

Każdą permutację można przedstawić jednoznacznie w postaci złożenia (niezależnych) cykli. Przedstawienie takie nazywamy *rozkładem na cykle*.

Definicja

Mówimy, że permutacja f jest *typu* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ jeśli w rozkładzie na cykle zawiera dokładnie λ_i cykli długości i , dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Do zapisu typu stosujemy zwykle notację $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ (pomijając i^{λ_i} jeśli $\lambda_i = 0$).

Lemat

Niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ będzie multizbiorem o mocy n , który zawiera t parami różnych elementów; każdy element x_i ma krotność n_i , $i = 1, 2, \dots, t$. Wtedy $\sum_{i=1}^t n_i = n$.

Liczba wszystkich permutacji multizbioru X wynosi

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}.$$

Zasada pudełkowania (Dirichleta)

Jeśli $n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to wśród tych pudełek znajdzie się takie, które zawiera co najmniej 2 obiekty.

Uogólniona zasada pudełkowania

Niech q_1, q_2, \dots, q_n będą liczbami naturalnymi. Jeśli $q_1 + q_2 + \dots + q_n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to znajdzie się pudełko o takim indeksie i , że zawiera ono $q_i + 1$ obiektów.

Niech X będzie danym zbiorem n -elementowym.

Niech P_1, P_2, \dots, P_t oznaczają pewne własności elementów z X .

Niech $A_i = \{x : x \in X \text{ oraz } x \text{ ma własność } P_i\}$, $1 \leq i \leq t$.

Twierdzenie

Liczba elementów zbioru X posiadających co najmniej jedną z własności P_1, P_2, \dots, P_t wynosi:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t| &= \sum_{1 \leq i \leq t} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq t} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{t+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t|. \end{aligned}$$

Wniosek

Liczba elementów zbioru X nieposiadających żadnej z własności P_1, P_2, \dots, P_t wynosi:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_t}| &= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t| = \\ |X| - \sum_{1 \leq i \leq t} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq t} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ &+ \dots + (-1)^t |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t|. \end{aligned}$$

Definicja

Permutację f nazywamy *nieporządkiem* jeśli, dla każdego $1 \leq i \leq n$, $f(i) \neq i$.

Twierdzenie

Niech D_n oznacza liczbę nieporządków zbioru n -elementowego X .
Wówczas

$$D_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

Lemat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1} \approx 0,368.$$

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $n \geq m$, to liczba wszystkich odwzorowań suriektywnych $f : X \mapsto Y$ wynosi:

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n + \dots \\ + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} 1^n.$$

Definicja

Przez *podział* n -elementowego zbioru X na k bloków rozumiemy taką rodzinę $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ podzbiorów zbioru X , że $B_i \neq \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ oraz $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = X$, dla każdego $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Definicja

Liczbę podziałów zbioru n -elementowego na k bloków nazywamy *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju* i oznaczamy $S(n, k)$.

Lemat

Dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju zachodzi zależność

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \quad \text{dla } 0 < k < n$$

$$S(n, n) = 1 \quad \text{dla } n \geq 0$$

$$S(n, 0) = 0 \quad \text{dla } n > 0$$

Definicja

Liczbę podziałów zbioru n -elementowego nazywamy *liczbą Bella* i oznaczamy symbolem $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

Lemat

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(i)$$

Definicja

Podziałem liczby n na k składników nazywamy taki ciąg liczb naturalnych $\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle$, że $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k > 0$ oraz $b_1 + b_2 + \dots + b_k = n$.

Niech $P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na k składników, natomiast $P(n)$ liczbę wszystkich podziałów.

$$P(n) = \sum_{k=0}^n P(n, k)$$

$$P(0, 0) = P(0) = 1$$

Lemat

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie tych podziałów liczby n , w których największy składnik ma wartość k .

$$P(n, k) = 0 \quad \text{dla} \quad n < k$$

$$P(n, n) = 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 0$$

$$P(n, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad n > 0$$

Lemat

Dla $n \geq k \geq 0$ zachodzi zależność

$$P(n, k) = \sum_{i=0}^k P(n-k, i)$$

Definicja

Liczbę Stirlinga pierwszego rodzaju oznaczamy symbolem $s(n, k)$ i definiujemy jako liczbę tych permutacji zbioru n -elementowego, które w rozkładzie na cykle posiadają k cykli.

Lemat

Dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju zachodzi zależność

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot s(n - 1, k) \quad \text{dla } 0 < k < n$$

$$s(n, n) = 1 \quad \text{dla } n \geq 0$$

$$s(n, 0) = 0 \quad \text{dla } n > 0$$

Definicja

Niech $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb. Mówimy, że spełnia on *liniowe równanie rekurencyjne stopnia k* jeśli istnieją współczynniki a_1, a_2, \dots, a_k, b ($a_k \neq 0$):

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} + b, \quad (n \geq k),$$

gdzie każdy ze współczynników a_1, a_2, \dots, a_k, b może zależeć od n .

Ciąg liczb $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ spełniających powyższe równanie jest jednoznacznie wyznaczony przez liczby h_0, h_1, \dots, h_{k-1} nazywane *wartościami początkowymi*.

Liniowe równanie rekurencyjne jest *homogeniczne*, jeśli $b = 0$.

Liniowe równanie rekurencyjne ma *stałe współczynniki*, jeśli każdy ze współczynników a_1, a_2, \dots, a_k jest stałą.

Twierdzenie

Niech q będzie niezerową stałą.

Wówczas $h_n = q^n$ jest rozwiązaniem homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \dots - a_k h_{n-k} = 0, \quad (a_k \neq 0, n \geq k),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy q jest pierwiastkiem wielomianu:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} \dots - a_k = 0.$$

Wielomian ten nazywany jest *wielomianem charakterystycznym*, a wszystkie jego pierwiastki *pierwiastkami charakterystycznymi*.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma k różnych pierwiastków q_1, q_2, \dots, q_k , wtedy

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$$

stanowi ogólną postać rozwiązania.

Dla każdego wyboru wartości początkowych h_0, h_1, \dots, h_{k-1} istnieją jednoznacznie określone stałe c_1, c_2, \dots, c_k .

Jeśli q_i jest pierwiastkiem s_i -krotnym wielomianu charakterystycznego, to wówczas każda z wartości $h_n = q_i^n, h_n = nq_i^n, h_n = n^2 q_i^n, \dots, h_n = n^{s_i-1} q_i^n$ jest rozwiązaniem równania, a stąd

$$h_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \dots + c_{s_i} n^{s_i-1} q_i^n$$

jest rozwiązaniem dla pierwiastka q_i , przy każdym wyborze współczynników c_1, c_2, \dots, c_{s_i} .

Niech q_1, q_2, \dots, q_t będą różnymi pierwiastkami, o krotnościach odpowiednio s_1, s_2, \dots, s_t .

Ogólna postać rozwiązania homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n = h_n^{(1)} + h_n^{(2)} + \dots + h_n^{(t)}.$$

W celu rozwiązania niehomogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach wykonujemy następujące kroki:

- (1) znajdujemy rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania homogenicznego
- (2) znajdujemy rozwiązanie szczególne równania niehomogenicznego
- (3) łączymy oba rozwiązania z wykorzystaniem wartości początkowych.

Wykonanie kroku (2) wymaga próby wykorzystania różnych form rozwiązania szczególnego h_n w zależności od postaci czynnika niehomogenicznego b . W szczególności:

- (i) gdy b jest wielomianem stopnia k to za testowane rozwiązanie szczególne h_n przyjmujemy również wielomian stopnia k ,
- (ii) gdy $b = sp^n$ to próbujemy wykorzystać $h_n = tp^n$.

Powodzenie w wykonaniu kroku (2) zależy od postaci wielomianu charakterystycznego.