DEFINICJE: *litera, alfabet, słowo, język*

Zadanie 1. Niech L, M, N oraz $M_i, i \in I$ będą językami nad alfabetem A. Pokaż, że:

(1) $1 \in L \Rightarrow M \subset LM$,
(2) $LL^* \subset L^*$,
(3) $L \subset M \Rightarrow \forall N : LN \subset MN$,
(4) $L \subset M \Rightarrow \forall N : NL \subset NM$,
(5) $L \cdot \bigcup_{i\in I} M_i \subset \bigcup_{i\in I} LM_i$.

Zadanie 2. Niech $L \subset A^*$ będzie językiem skończonym. Udowodnij, że:

$$L^2 = L \Rightarrow L = \emptyset \vee L = \{1\}.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że słowa $u, v \in \mathcal{A}^*$ komutują wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $z \in \mathcal{A}^*$ oraz $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $u = z^{n_1}$, $v = z^{n_2}$.

Zadanie 4. Niech $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{abbb, bb\}$. Jaka relacja zawierania zachodzi między językami L_1^* i L_2^*?

Zadanie 5. Niech $R, S \subset \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ będą relacjami zdefiniowanymi następująco $\forall u, w \in \{a, b\}^*$:

(1) $uRw \Leftrightarrow u, w$ mają wspólną literę,
(2) $uSw \Leftrightarrow$ w każdym ze słów u, w występują obie litery a, b.

Czy relacje R, S są relacjami równoważności? Jeśli nie, znajdź domknięcie równoważnościowe i klasy abstrakcji.

Zadanie 6. Niech $(S, \cdot)$ będzie dowolną półgrupą, a $L \subset S$ dowolnym jej podzbiorem. Definiujemy następujące relacje:

(1) $P_L^l \subset S^2$:
$$\forall x, y \in S : xP_L^l y \Leftrightarrow (\forall u \in S\ ux \in L \Leftrightarrow uy \in L),$$
(2) $P_L^r \subset S^2$:
$$\forall x, y \in S : xP_L^r y \Leftrightarrow (\forall v \in S\ xv \in L \Leftrightarrow yv \in L),$$
(3) $P_L \in S^2$:
$$\forall x, y \in S : xP_l y \Leftrightarrow (\forall u, v \in S\ uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L).$$

Wyznacz te relacje dla następujących podzbiorów danych półgrup:

(1) $\{a^{2k} : k \in \mathbb{N}_0\} \subset \{a\}^*$,
(2) $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \{a, b\}^*$,

Zadanie 7. Czy liczba klas równoważności dla:

(1) $\{a^p : p$ jest liczbą pierwszą$\} \subset \{a\}^*$,
(2) $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{a, b\}$,

jest skończona?