DEFINICJE: *grupa, monoid, półgrupa, homomorfizm, półgrupa wolna, monoid wolny*

Zadanie 1. Które z poniższych struktur są monoidami, a które półgrupami? Które z nich są przemienne?

(1) $(\mathbb{N}, +)$,
(2) $(\mathbb{N}, \cdot)$,
(3) $(\mathbb{N}_0, +)$,
(4) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,
(5) $(\mathbb{R}, +)$,
(6) $(\mathbb{R}, \cdot)$,
(7) $(\mathbb{Z}_5, +)$,
(8) $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$,
(9) $(\{0, 1\}, \wedge)$,
(10) $(\{0, 1\}, \vee)$,

Zadanie 2. Pokaż, że $(\mathbb{Z}, \star)$ jest monoidem z działaniem $\star$ określonym następująco:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \star y = x + y - xy.$$

Zadanie 3. Niech $(S, \circ_S)$ oraz $(T, \circ_T)$ będą półgrupami. Sprawdź, czy następujące struktury też są półgrupami:

(1) $(S \times T, \circ)$, gdzie:

$$(s_1, t_1) \circ (s_2, t_2) = (s_1 \circ_S s_2, t_1 \circ_T t_2),$$

(2) $(S \times S, \circ)$, gdzie:

$$(s_1, s_2) \circ (s_3, s_4) = (s_1 \circ_S s_4, s_2 \circ_S s_3).$$

Zadanie 4. Niech $(M, \circ_M, 1_M)$ oraz $(N, \circ_N, 1_N)$ będą monoidami. Sprawdź, czy następujące struktury są monoidami:

(1) $(M \times N, \circ, (1_M, 1_N))$, gdzie:

$$(m_1, n_1) \circ (m_2, n_2) = (m_1 \circ_M m_2, n_1 \circ_N n_2),$$

(2) $(M \times M, \circ, (1_M, 1_M))$, gdzie:

$$(m_1, m_2) \circ (m_3, m_4) = (m_1 \circ_M m_4, m_2 \circ_M m_3).$$

Zadanie 5. Znajdź wszystkie podgrupy, podmonoidy i podpółgrupy monoidów:

(1) $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$,
(2) $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$,

Zadanie 6. W półgrupie $(S, \cdot)$ element x dzieli element s, jeśli

$$\exists l, r \in S : s = lx = xr.$$

Udowodnij, że jeśli w półgrupie $(S, \cdot)$ istnieje element x, który dzieli każdy element $s \in S$, to $(S, \cdot)$ jest monoidem.

Zadanie 7. Uzasadnij, czy przekształcenie $h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$ zdefiniowane następująco:

$$1 \to 4$$
$$0 \to 0$$
$$2 \to 2$$

jest homomorfizmem monoidu $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ w monoid $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.

Zadanie 8. Wskaż bazę monoidów i półgrup:

(1) $(\mathbb{N}_0, +)$,
(2) $(\mathbb{N}, \cdot)$,
(3) $(\mathbb{N}_0), \cdot$,
(4) $(\{3k : k \in \mathbb{N}\}, +)$,
(5) $(\{2^k : k \in \mathbb{N}\}, \cdot)$,
(6) $(\{2^k : k \geq 2\}, \cdot)$.

Zadanie 9. Do których monoidów należy słowo ab^2a^3:

(1) $\{a, b\}^*$,
(2) $\{aab, a\}^*$,
(3) $\{aa, bb\}^*$,
(4) $\{ab, ba\}^*$,
(5) $\{a, bb\}^*$.

Zadanie 10. Sprawdź, czy półgrupa A^+ jest wolna w $\{a, b\}^+$ nad zbiorem generatorów A gdzie:

(1) $A = \{a, b\}$,
(2) $A = \{a, ba\}$,
(3) $A = \{a, bb, ab\}$,
(4) $A = \{ab^2, ab^2a, aba, ba\}$.