

SZTUCZNA INTELIGENCJA

SYSTEMY ROZMYTE



Adrian Horzyk

Akademia Górniczo-Hutnicza

*Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki
i Inżynierii Biomedycznej*

Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej

Laboratorium Biocybernetyki

30-059 Kraków, al. Mickiewicza 30, paw. C3/205

horzyk@agh.edu.pl, Google: Adrian Horzyk



SYSTEMY ROZMYTE

Fuzzy Systems



Wartości rozmyte są naturalnym sposobem określania pewnych cech przez ludzi w środowisku niepewnym, nieprecyzyjnym, losowym lub na podstawie niekompletnych informacji:

- bardzo mały, mały, średni, duży, bardzo duży, ogromny, wysoki, niski,
- dobre, niedobre, przeciętne,
- słabe, silne, umiarkowane,
- ładne, brzydkie, gustowne, luksusowe,
- zimne, chłodne, letnie, ciepłe, gorące,
- stare, młode, współczesne,
- niedawno, wcześniej, późno, w przyszłości.

W przypadku próby algorytmizacji działań opartych o wartości rozmyte natrafiamy na oczywistą trudność w zakodowaniu takich wartości rozmytych, którym trudno przypisać jedną określoną dokładną wartość!



SYSTEMY ROZMYTE



Umożliwiają:

- ✓ **reprezentację wartości rozmytych**
- ✓ **dokonywanie operacji na wartościach rozmytych**
- ✓ **opisywanie i operowanie na wartościach nieprecyzyjnych, nieostrych lub wieloznacznych**
- ✓ **wykorzystanie danych symbolicznych do wnioskowania**
- ✓ **przypisywanie elementom lingwistycznym wartości i zmiennych numerycznych**
- ✓ **rozmywanie i wyostrzanie wartości**
- ✓ **tworzenie reguł rozmytych**
- ✓ **tworzenie i uczenie systemów decyzyjnych i klasyfikujących na podstawie wartości rozmytych**

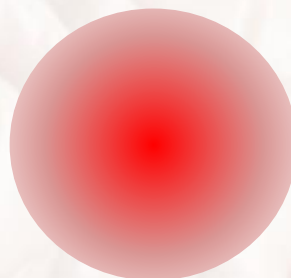


ZBIORY ROZMYTE

Zbiór rozmyty definiujemy jako zbiór elementów, na których zdefiniowana jest funkcja przynależności $\mu_A(x)$ elementu do zbioru:

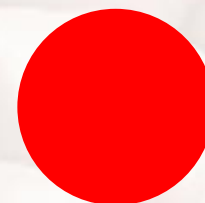
$$A = \{ (x, \mu_A(x)) : x \in X \}$$

ROZMYTE



$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

OSTRE



$$\mu_S(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

Korzystamy z **logiki wielowartościowej** jako aparatu matematycznego do opisu operacji dla zbiorów rozmytych.

Stosujemy **rozmyte reguły decyzyjne** operujące na takich zbiorach.

Wielkościom lingwistycznym (symbolicznym) przypisujemy określone zmienne numeryczne, dla których można wyznaczyć funkcje opisujące zakres zmienności parametrów z nimi związanych.



NOTACJA WG ZADEHA

X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

$X = N$ jest zbiorem liczb naturalnych. Określamy pojęcie zbioru liczb naturalnych „bliskich liczbie 7” definiując zbiór rozmyty $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0,2}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10}$$



NOTACJA WG ZADEHA

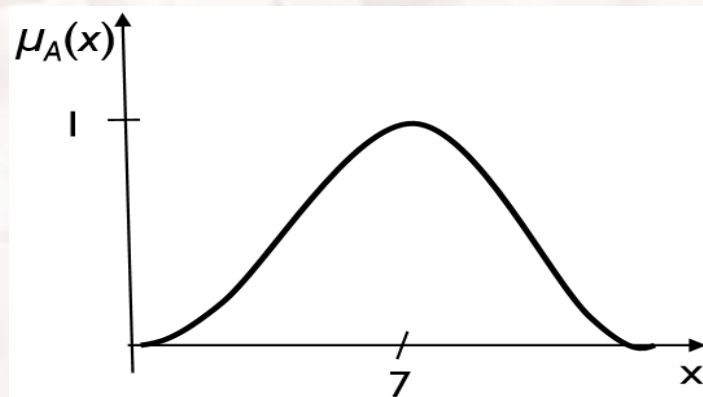


X jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

X = R jest zbiorem liczb rzeczywistych. Określamy pojęcie zbioru liczb rzeczywistych „bliskich liczbie 7” definiując funkcję przynależności:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 7)^2}$$



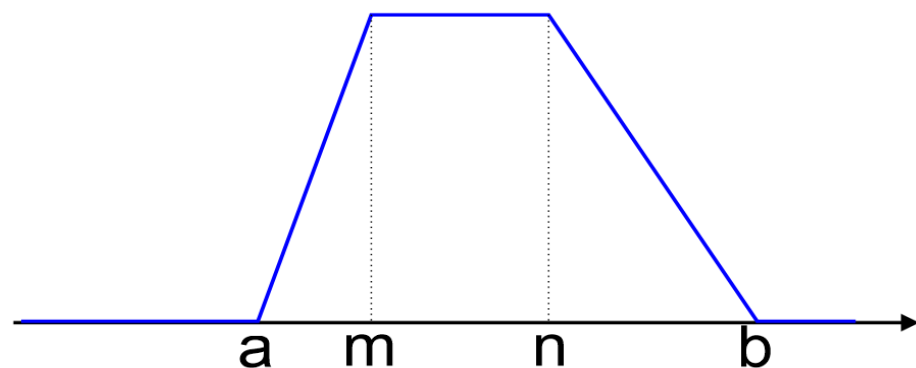
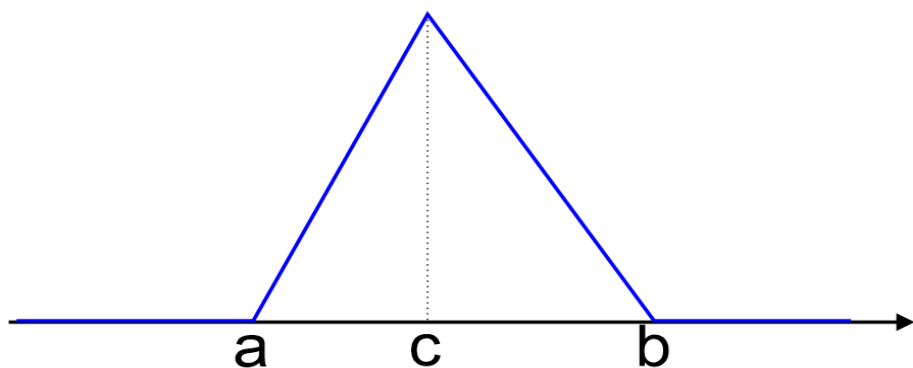


FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI



Funkcja przynależności $\mu_A(x)$ definiuje stopień przynależności elementu do zbioru rozmytego. Do najczęściej stosowanych funkcji przynależności należą: **funkcja trójkątna** i **funkcja trapezoidalna**:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{if } x \in [c, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases} \quad \mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{if } x \in [a, m] \\ 1 & \text{if } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{if } x \in [n, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$





ZBIORY ROZMYTE



Zbiór rozmyty nie określa ostrej granicy między elementami, które do danego zbioru należą, a tymi, które do niego nie należą.

Granica taka jest rozmyta i zawiera wiele wartości, stopniując przynależność elementu do zbioru jako liczbę z zakresu $[0,1]$.

Zmiennej u można przyporządkować określony stopień przynależności $[0,1]$ do zbioru rozmytego F na podstawie pewnej funkcji przynależności:

$\mu_F(u) = 0$ - oznacza brak przynależności u do zbioru F

$\mu_F(u) = 1$ - oznacza pełną przynależność u do zbioru F

$\mu_F(u) \in (0,1)$ - oznacza częściową przynależność u do zbioru F



DEFINICJE

Zbiór elementów przestrzeni X , dla których $\mu_A(x) > 0$ nazywamy **nośnikiem zbioru rozmytego A** i oznaczamy **supp A** (ang. **support**):

$$\text{supp } A = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}$$

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy **$h(A)$** i definiujemy jako :

$$h(A) = \sup_{x \in A} \mu_A(x)$$



DEFINICJE

Zbiór rozmyty A nazywamy **normalnym** wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$.

Jeżeli zbiór rozmyty A nie jest normalny, to można go **znormalizować** za pomocą przekształcenia:

$$\mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)} \quad \forall_{x \in X}$$



DEFINICJE

Zbiór rozmyty A jest pusty,
co zapisujemy $A = \emptyset$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

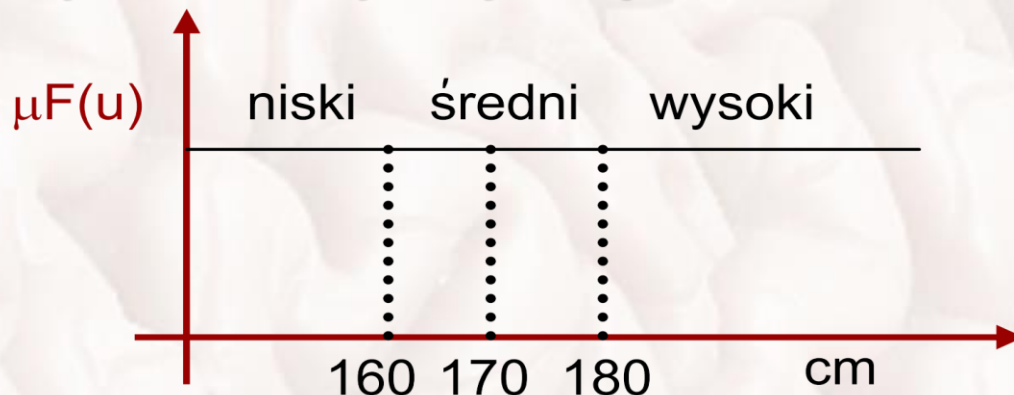
Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B,
co zapisujemy $A \subset B$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$.

Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B,
co zapisujemy $A = B$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$.

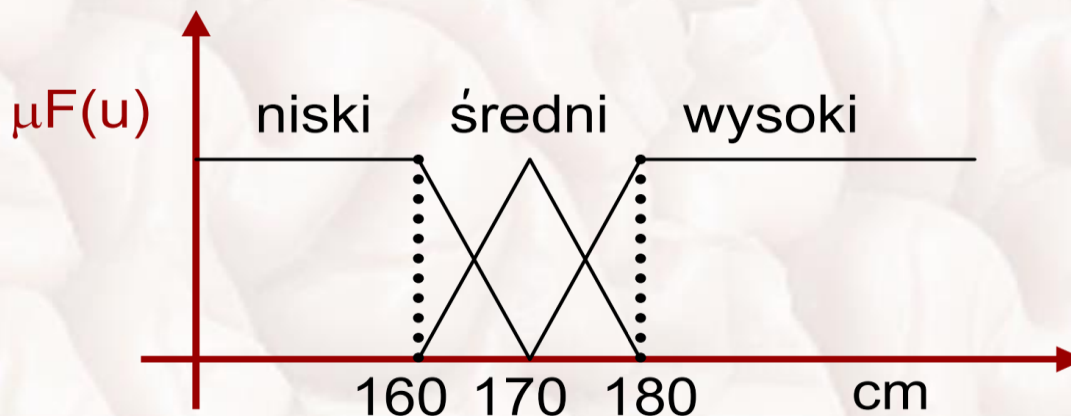


ALGEBRA ROZMYTA

Algebra Boole'a jednoznacznie przyporządkowuje dane do zbioru, określając przynależność jako jedną wartość ze zbioru $\{0,1\}$:



Algebra rozmyta przyporządkowuje różne wartości z zakresu $[0,1]$ do określenia przynależności danej do zbioru:





OPERATORY ROZMYTE



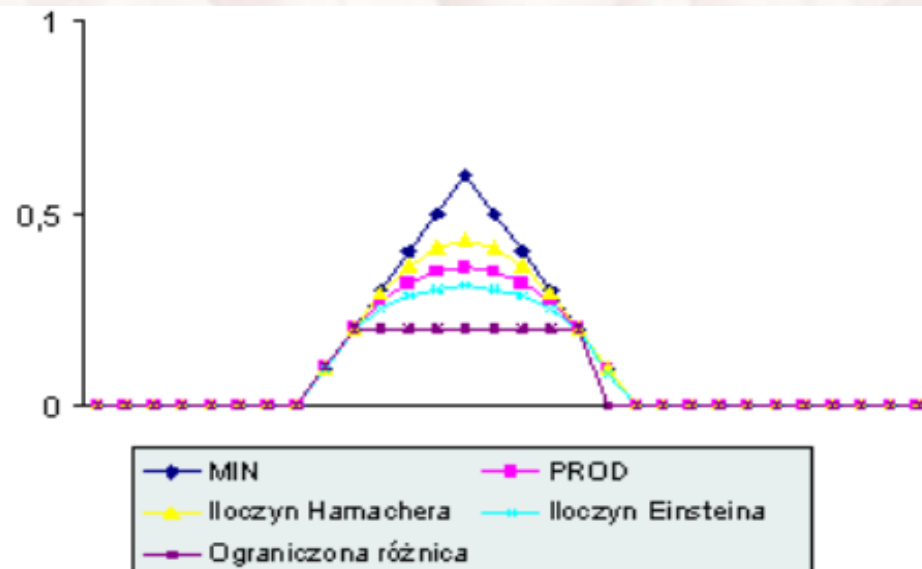
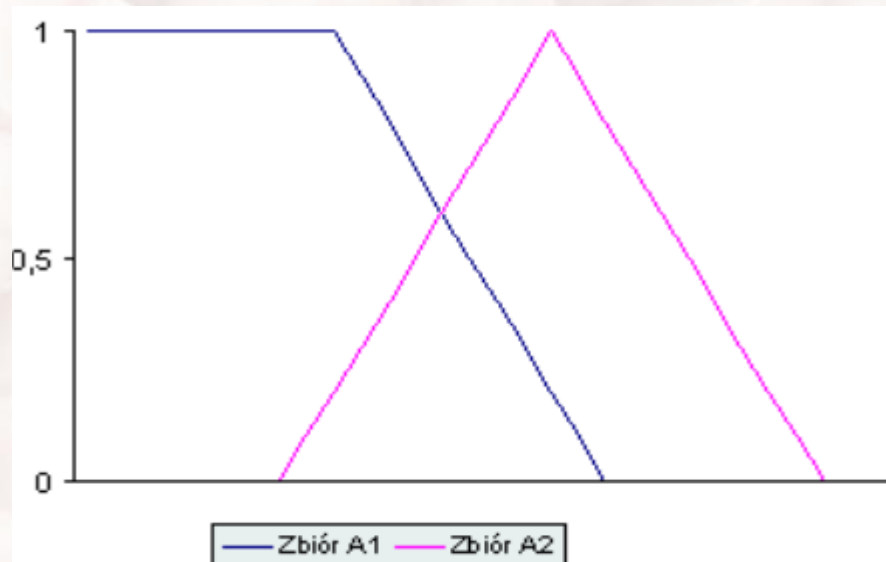
W logice rozmytej stosuje się operatory rozmyte:

- przecięcia (MIN) nazywane **T-normą**,
- sumy (MAX) zwane **S-normą**.

AND T-Norm $T(\mu_A(x), \mu_B(x))$	OR S-Norm $S(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Minimum $\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$	Maximum $\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Algebraic product $\mu_A(x)\mu_B(x)$	Algebraic sum $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$
Drastic product $\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$ 0 otherwise	Drastic sum $\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$ 1 otherwise
Lukasiewicz AND (Bounded Difference) $\text{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$	Lukasiewicz OR (Bounded Sum) $\text{MIN}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
Einstein product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)))$	Einstein sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x))/(1 + \mu_A(x)\mu_B(x))$
Hamacher product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))$	Hamacher sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x))/(1 - \mu_A(x)\mu_B(x))$
Yager operator $1 - \text{MIN}(1, ((1 - \mu_A(x))^b + (1 - \mu_B(x))^b)^{1/b})$	Yager operator $\text{MIN}(1, (\mu_A(x)^b + \mu_B(x)^b)^{1/b})$



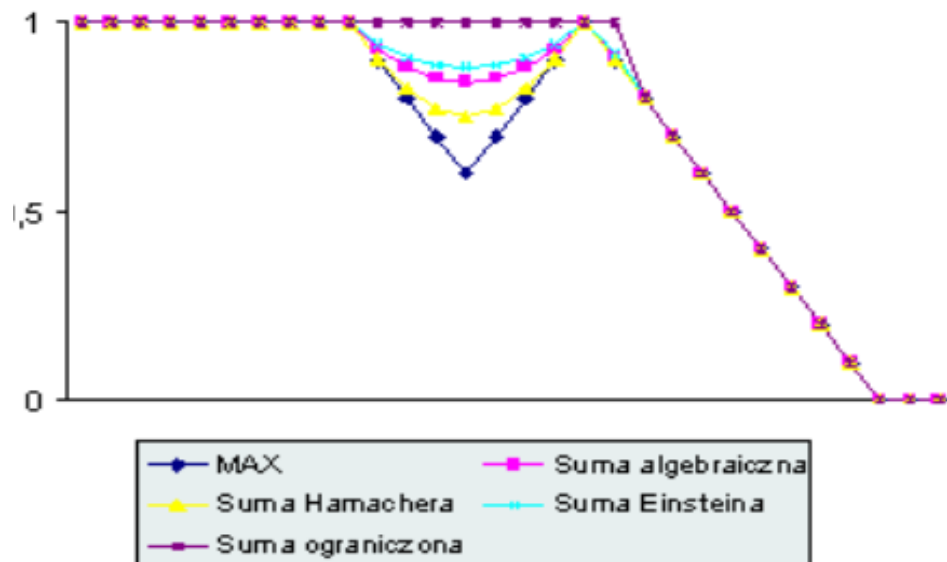
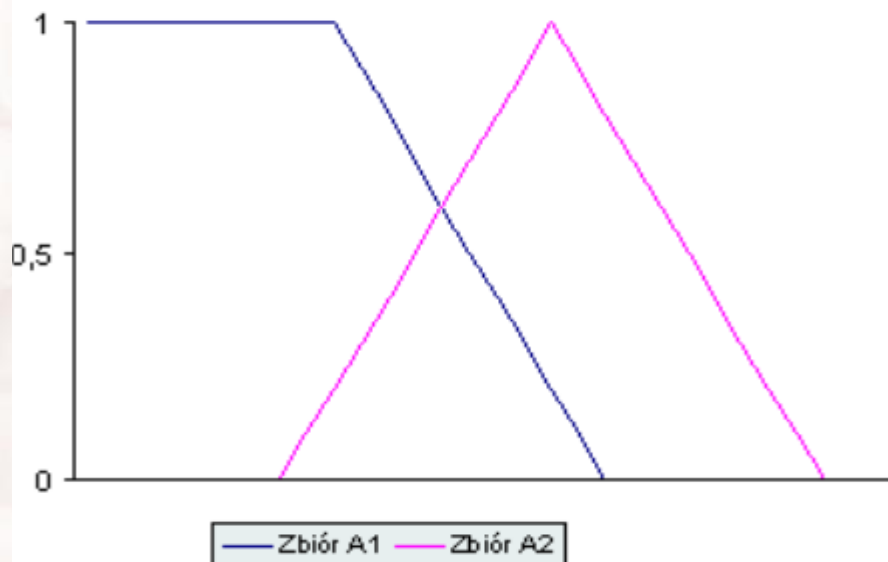
OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH T-NORMY



Nazwa operatora	Wzór
minimum (<i>MIN</i>)	$\mu_{A \cap B}(x) = \text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$
iloczyn (<i>PROD</i>)	$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
iloczyn Hamachera (Hamacher product)	$\mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
iloczyn Einsteina (Einstein <i>PROD</i>)	$\mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x))}$
iloczyn drastyczny (drastic <i>PROD</i>)	$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) & \text{dla } \text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$
ograniczona różnica (bounded difference)	$\mu_{A \cap B}(x) = \text{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$



OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH S-NORMY



Nazwa operatora	Wzór
maksimum (<i>MAX</i>)	$\mu_{A \cup B}(x) = MAX [\mu_A(x), \mu_B(x)]$
suma algebr.	$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
suma Hamachera	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
suma Einsteina	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
suma drastyczna	$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} MAX [\mu_A(x), \mu_B(x)] & \text{dla } MIN(\mu_A, \mu_B) = 0 \\ 1 & \text{poza tym} \end{cases}$
suma ograniczona	$\mu_{A \cup B}(x) = MIN [1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$



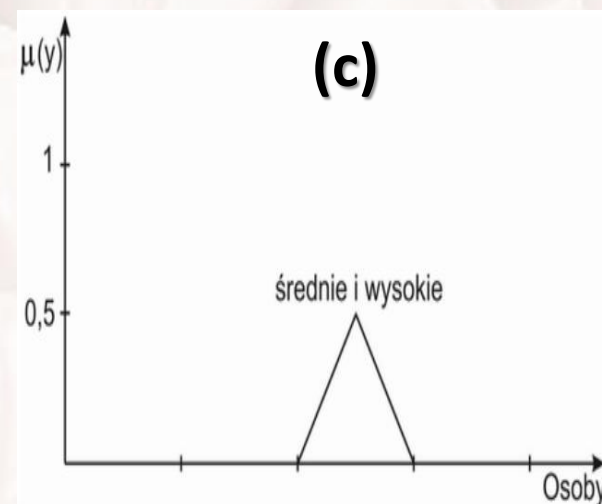
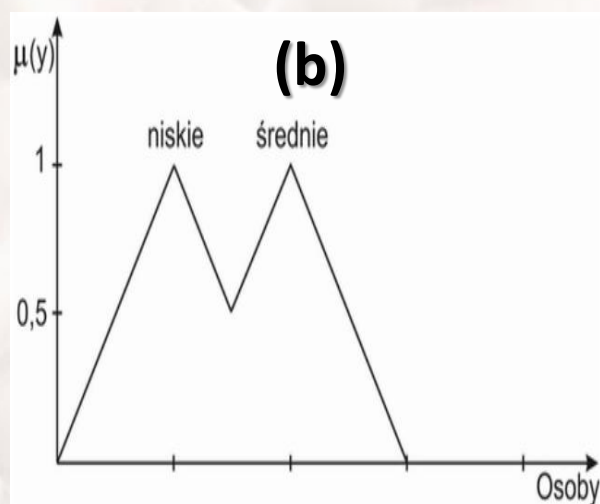
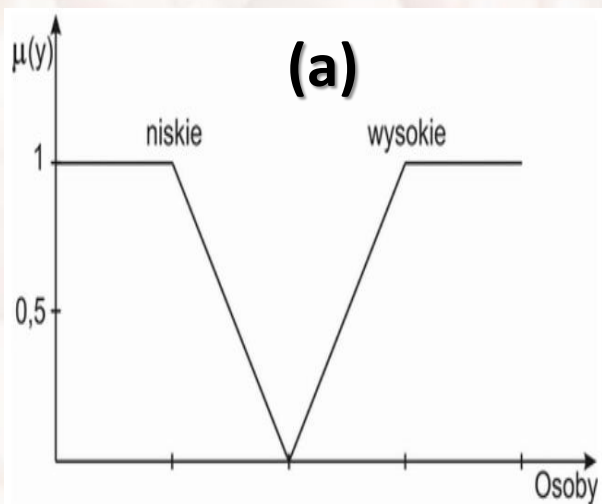
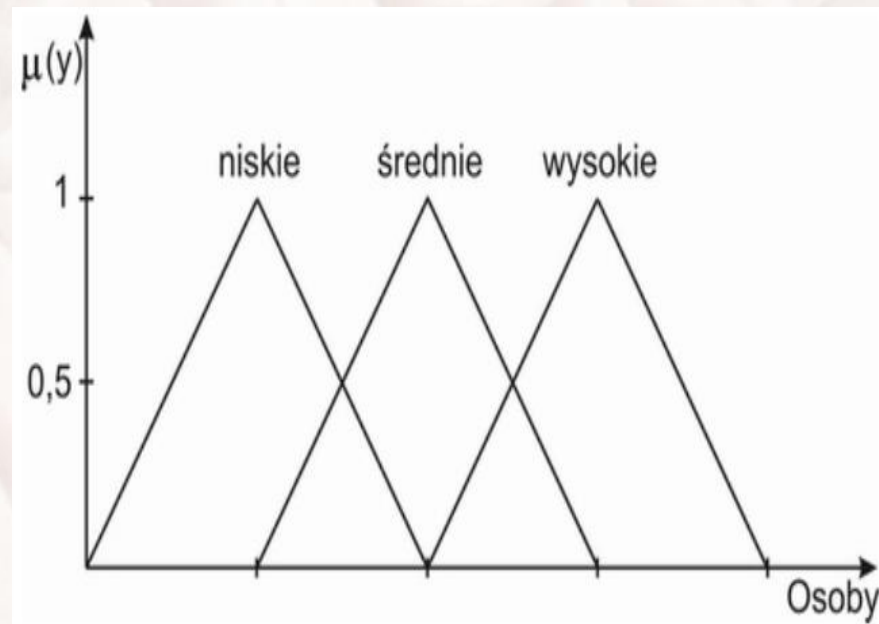
PRZYKŁAD DZIAŁANIA OPERATORÓW ROZMYTYCH: NOT, MAX, MIN



Założmy, że mamy określone trzy zbiory rozmyte opisujące wzrost osób: niskie, średnie i wysokie.

Chcemy wyznaczyć zbiory opisujące rozmyte zbiory osób:

- a) Osób nie średnich
- b) Osób niskich lub średnich
- c) Osób średnich i wysokich





KLAROWNOŚĆ OPISU



W porównaniu do systemów neuronowych zbiory i reguły rozmyte charakteryzują się intuicyjną interpretacją i łatwością zrozumienia:

IF [przesłanka] THEN [konkluzja]

IF x is A THEN y is B

IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND ... THEN y is B

IF x_1 is A_1 OR x_2 is A_2 OR ... THEN y is B

A , B to wartości lingwistyczne zdefiniowane jako zbiory rozmyte z uniwersum odpowiednio X i Y , x jest zmienną wejściową i y jest zmienną wyjściową.

Reguły rozmyte mogą być tworzone:

- Przez eksperta, który zdefiniuje rozmyte reguły wnioskowania.
- Przez system uczący się, który na podstawie zbioru uczącego, dla którego określono przynależność wartości rozmytych do zbiorów rozmytych, określa reguły wnioskowania i funkcje przynależności.



SYSTEMY ROZMYTE

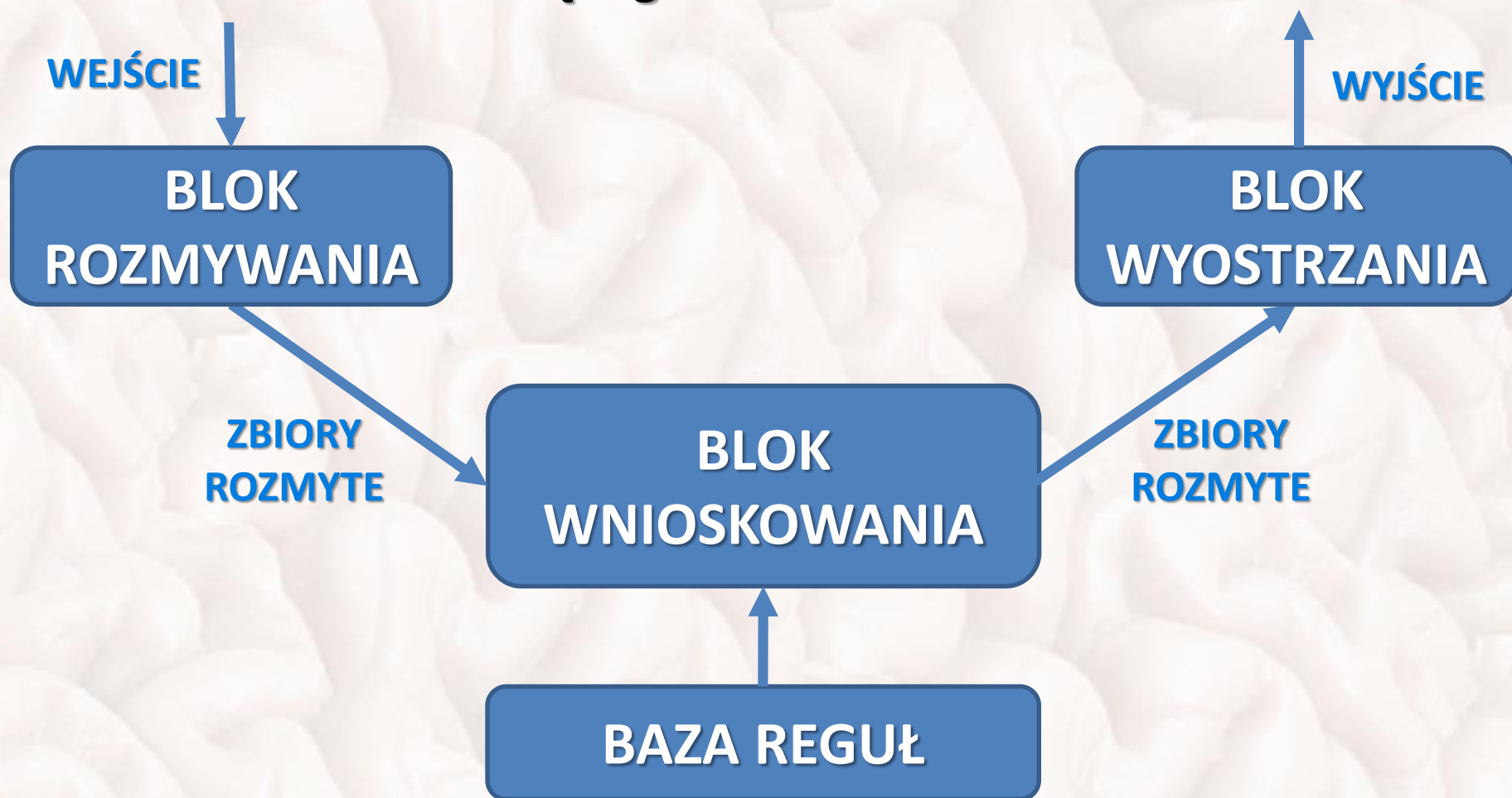
Systemy rozmyte zawierają przynajmniej dwa podstawowe moduły: blok wnioskowania i bazę reguł.





SYSTEMY ROZMYTE

Systemy rozmyte zawierają przynajmniej dwa podstawowe moduły: blok wnioskowania i bazę reguł.

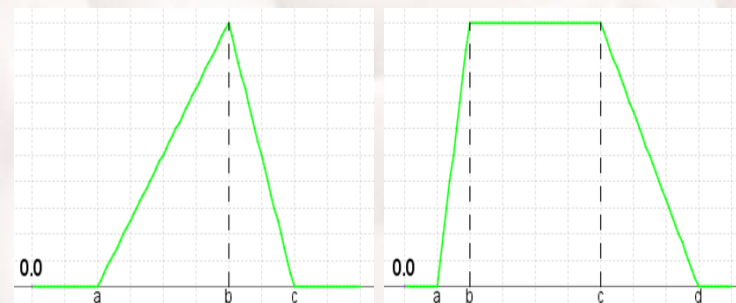




ROZMYWANIE I WYOSTRZANIE



Blok rozmywania (fuzyfikator) przekształca n-wymiarowy wektor wejściowy $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ w zbiór rozmyty F z określoną funkcją przynależności, których rolę najczęściej pełnią funkcje trójkątne, trapezoidalne oraz gaussowskie.

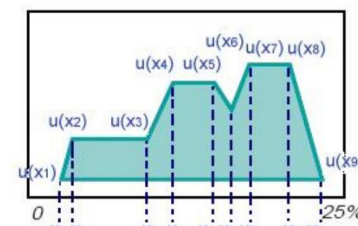


Blok wyostrzania (defuzyfikator) przekształca zbiór rozmyty na wartość y na podstawie środka ciężkości zbioru rozmytego lub średnich ważonych centrów uwzględniając kształt zbioru rozmytego.



DEFUZYFIKACJA
PRZY POMOCY
CENTROIDU

$$g = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i \cdot u(x_i)}{\sum_{i=1}^9 u(x_i)} = 16,7$$



tip= 16,7%

WYNIK DEFUZYFIKACJI

Funkcje rozmyte mogą reprezentować i aproksymować dowolną funkcję ciągłą.



FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI



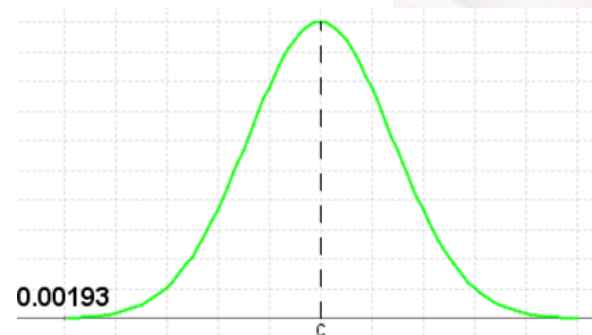
Funkcja trapezoidalna

$$\text{trapez}(x; a, b, c, d) = 0 \vee \left(1 \wedge \frac{x-a}{b-a} \wedge \frac{d-x}{d-c} \right), \quad a < b \leq c < d, \quad x \in \mathbb{X}$$



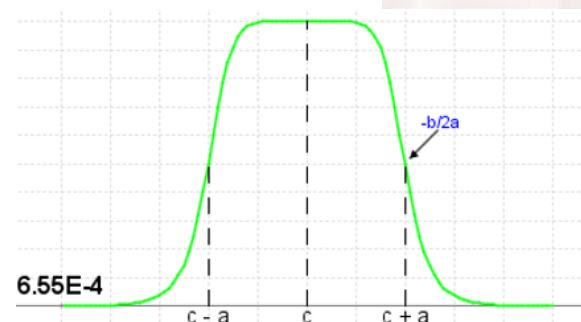
Funkcja Gaussa

$$\text{gauss}(x; a, b) = \exp \left[- \left(\frac{x-b}{a} \right)^2 \right]$$



Funkcja dzwonowa

$$\text{dzwon}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$





ROZMYTA BAZA WIEDZY



Reguły rozmyte tworzą swoistą **rozmytą bazę wiedzy**, która umożliwia wnioskowanie w ramach danego systemu.

System wykorzystujący taką rozmytą bazę reguł nazywamy **rozmytym systemem wnioskującym**.

Reguły wnioskowania mogą być wyznaczane automatycznie na podstawie zbioru uczącego oraz **metod adaptacyjnych**.



EWOLUCYJNE SYSTEMY NEURONOWO-ROZMYTE



Inteligentne systemy obliczeniowe obecnie często łączą zalety różnych systemów z zakresu inteligencji obliczeniowej:

- ✓ **stosują możliwości uczenia sieci neuronowych,**
- ✓ **posiadają czytelną interpretację działania opartą o regułową reprezentację wiedzy,**
- ✓ **przedstawianej w sposób symboliczny,**
- ✓ **dokonując globalnej optymalizacji parametrów metodami ewolucyjnymi,**
- ✓ **można je uczyć metodami znanymi z sieci neuronowych, np. metodą wstecznej propagacji błędów,**
- ✓ **Wykorzystują zwykle wnioskowanie typu Mamdaniego lub schemat Takagi-Sugeno.**



WNISKOWANIE MAMDANIEGO



- ✓ Polega na połączeniu poprzedników i następników reguł za pomocą t-normy zrealizowanej w postaci typu min lub typu iloczyn. Następnie dokonywana jest agregacja poszczególnych reguł za pomocą t-konormy (s-normy).
- ✓ Rozróżniamy **systemy typu A**, które na wyjściu bloku wnioskowania dają N zbiorów rozmytych, oraz **systemy typu B**, na wyjściu którego otrzymujemy jeden zbiór rozmyty, który jest wynikiem agregacji rezultatów wnioskowania w poszczególnych regułach.

T-NORMA

Funkcję dwóch zmiennych T

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

nazywamy *t-normą*, jeżeli

- (i) funkcja T jest niemalejąca względem obu argumentów

$$T(a, c) \leq T(b, d) \quad \text{dla} \quad a \leq b, \quad c \leq d;$$

- (ii) funkcja T spełnia warunek przemienności

$$T(a, b) = T(b, a);$$

- (iii) funkcja T spełnia warunek łączności

$$T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c));$$

- (iv) funkcja T spełnia warunek brzegowy

$$T(a, 1) = a,$$

gdzie $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Z założeń mamy

$$T(a, 0) = T(0, a) \leq T(0, 1) = 0.$$

Zatem drugi warunek brzegowy przybiera postać

$$T(a, 0) = 0.$$

W dalszej części rozdziału działanie *t-normy* na argumentach a i b będziemy oznaczać

$$T(a, b) = a \overset{T}{*} b.$$

Jeżeli np. a i b utożsamiamy z funkcjami przynależności zbiorów rozmytych A i B , to równość (4.140) zapisujemy jako

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \overset{T}{*} \mu_B(x).$$

T-KONORMA

Funkcję dwóch zmiennych S

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

nazywamy *t-konormą*, jeżeli jest niemalejąca względem obu argumentów, spełnia warunek przemienności i łączności, a ponadto spełniony jest następujący warunek brzegowy:

$$S(a, 0) = a.$$

Z założeń oraz warunku (4.154) wynika, że

$$S(a, 1) = S(1, a) \geq S(1, 0) = 1.$$

Zatem drugi warunek brzegowy przybiera postać

$$S(a, 1) = 1.$$

Działanie *t-konormy* na argumentach a i b będziemy oznaczać

$$S(a, b) = a \overset{S}{*} b.$$

Korzystając z właściwości łączności, powyższą definicję można w sposób następujący uogólnić na przypadek *t-konormy* wielu zmiennych:

$$\overset{S}{\bigcup}_{i=1}^n \{a_i\} = T \left\{ \overset{S}{\bigcup}_{i=1}^{n-1} \{a_i\}, a_n \right\} = S\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = S\{\mathbf{a}\} = a_1 \overset{S}{*} a_2 \overset{S}{*} \dots \overset{S}{*} a_n.$$

The image features the letters "AI" in a bold, blue, serif font, centered against a vibrant blue background filled with numerous small, bright white stars and a soft, glowing light source behind the text.

AI

CZY SZTUCZNE SIECI NEURONOWE PROWADZĄ DO AI?