Równania różniczkowe zwyczajne

Wykład dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiIB

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2026

Spis treści

Rozdział 1. Wprowadzenie . . . 4
1.1. Wybrane zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych . . . 5
1.1.1. Równanie ruchu (kinematyka) . . . 5
1.1.2. Rodzina krzywych (geometria) . . . 5
1.1.3. Rozwój populacji (demografia) . . . 5
1.2. Podstawowe pojęcia . . . 6
1.2.1. Rozwiązanie równania różniczkowego . . . 7
1.3. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania . . . 8
1.4. Interpretacja geometryczna równania $x' = f(t, x)$ . . . 10
Rozdział 2. Metody rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych skalarnych rzędu pierwszego . . . 12
2.1. Równania o zmiennych rozdzielonych . . . 12
2.2. Równania jednorodne . . . 13
2.3. Równania postaci $x' = f(ax + bt + c)$ . . . 14
2.4. Równania liniowe pierwszego rzędu . . . 15
2.5. Równania zupełne . . . 17
2.5.1. Uzupełnianie równań niezupełnych – czynnik całkujący . . . 19
Rozdział 3. Równania różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach . . . 23
3.1. Rozwiązywanie równania jednorodnego . . . 24
3.2. Wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego . . . 25
3.2.1. Metoda przewidywania . . . 25
3.2.2. Metoda uzmienniania stałych . . . 27
Rozdział 4. Układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu . . . 30
4.1. Konstrukcja rozwiązania ogólnego URJ . . . 31
4.1.1. Uzupełnienie – wybrane własności funkcji macierzowych . . . 31
4.1.2. Macierz fundamentalna układu równań różniczkowych liniowych . . . 33
4.1.3. Rozwiązywanie układów równań różniczkowych liniowych o macierzy stałej . . . 33
4.1.4. Wyznaczanie macierzy fundamentalnej $\exp(tA)$ . . . 34
4.2. Konstrukcja rozwiązania szczególnego URN . . . 39
4.2.1. Metoda uzmienniania stałych dla URN . . . 39
4.3. Rozwiązywanie problemu początkowego . . . 41
Rozdział 5. Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych . . . 45
5.1. Transformata Laplace'a . . . 45
5.1.1. Wybrane własności transformaty Laplace'a . . . 46
5.1.2. Transformaty Laplace'a wybranych funkcji elementarnych . . . 48
5.2. Rozwiązywanie problemów początkowych metodą operatorową . . . 49
Rozdział 6. Elementy teorii stabilności . . . 53

6.1. Definicje stabilności oraz asymptotycznej stabilności rozwiązania 53
6.1.1. Punkty równowagi 54
6.2. Funkcja Lapunowa 55
6.3. Stabilność liniowych układów równań różniczkowych 56
6.3.1. Stabilność liniowych układów równań różniczkowych o macierzy stałej 56
6.3.2. Efektywne kryteria stabilności: twierdzenie Lapunowa, twierdzenie Hurwitza 57
6.4. Klasyfikacja punktów równowagi na płaszczyźnie 59
6.5. Linearyzacja 60

Dodatek A. Symboliczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych z wykorzystaniem języka programowania Python oraz biblioteki SymPy 63

A.1. Rozwiązywanie równań skalarnych rzędu pierwszego 64
A.2. Rozwiązywanie równań skalarnych rzędu $n > 1$ 66
A.3. Rozwiązywanie układów równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego 66

Dodatek B. Symboliczne wyznaczanie transformat Laplace'a z wykorzystaniem języka programowania Python oraz biblioteki SymPy 68

Rozdział 1

Wprowadzenie

Równania, których rozwiązaniami są funkcje nazywamy równaniami funkcyjnymi. Do prostych przykładów równań funkcyjnych należą

- równanie
$$f(xy) = f(x) + f(y),$$
którego jedynymi nietrywialnymi rozwiązaniami ciągłymi są funkcje logarytmiczne;
- równanie rekurencyjne (tzw. reguła trójczłonowa)
$$P_{n+2}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) P_{n+1}(x) + \gamma_n P_n(x),$$
którym można opisać ciąg wielomianów ortogonalnych w każdej przestrzeni $\mathcal{L}_2((a,b))$;
- równanie rekurencyjne[1]
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
którego jednym z rozwiązań jest ciąg Fibonacciego.

W klasie wszystkich równań funkcyjnych szczególne miejsce zajmują równania różniczkowe. Nie wchodząc na razie w szczegóły, są to takie równania, w których występują pochodne poszukiwanej funkcji. Jeżeli jest to funkcja jednej zmiennej, to mówimy wówczas o równaniach różniczkowych zwyczajnych, w przeciwnym przypadku o równaniach cząstkowych.

Równania różniczkowe odgrywają bardzo ważną rolę w matematycznym modelowaniu procesów zachodzących w otaczającym nas świecie. Fakt ten można dość łatwo wyjaśnić jeżeli uświadomimy sobie, że matematycznym odpowiednikiem prędkości zmiany w czasie badanej wielkości x jest jej pochodna x', a odpowiednikiem szybkości zmiany tej prędkości (czyli przyspieszenia) jest druga pochodna x''.

[1] Ogólna postać rozwiązania tego równania to
$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Jeżeli spośród wszystkich tych rozwiązań wybierzemy to, które spełnia warunek $F_0 = 0, F_1 = 1$, otrzymamy ciąg Fibonacciego, który bardzo powszechnie występuje w otaczającym nas świecie (np. w muzyce, w literaturze, w botanice, w architekturze, w anatomii – https://s.agh.edu.pl/a5x02).

1.1. Wybrane zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych

1.1.1. Równanie ruchu (kinematyka)

Przypuśćmy, że badany obiekt porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym ze stałym przyspieszeniem a. Równanie takiego ruchu możemy zatem zapisać w postaci

$$x''(t) = a. \tag{1.1}$$

Jego rozwiązanie $t \to x(t)$ opisujące położenie obiektu w chwili t zależne jest od położenia początkowego $x(0) = s_0$ oraz od prędkości początkowej $x'(0) = v_0$ i, jak łatwo sprawdzić, wyraża się wzorem

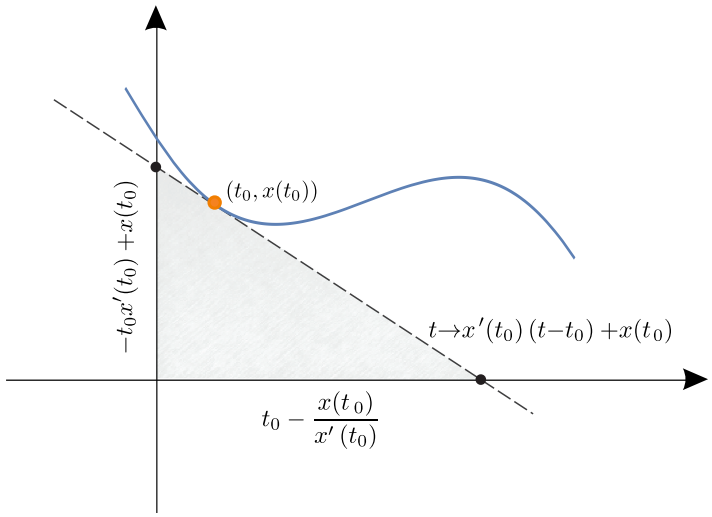
$$x(t) = s_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}.$$

1.1.2. Rodzina krzywych (geometria)

Równanie

$$\frac{\left(tx'(t) - x(t)\right)^2}{x'(t)} = a \tag{1.2}$$

opisuje rodzinę krzywych, dla których styczna w dowolnym punkcie tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąty o stałym polu równym $|a|/2$; zob. rysunek 1.1.



Rysunek 1.1. Trójkąt wyznaczony przez styczną do krzywej.

1.1.3. Rozwój populacji (demografia)

Równanie Volterry-Lotki

$$\begin{cases} x'(t) = (a - by(t))\,x(t) \\ y'(t) = (cx(t) - d)\,y(t) \end{cases}, \tag{1.3}$$

w którym x oraz y oznaczają odpowiednio liczbę ofiar oraz drapieżników, jest matematycznym modelem zmienności liczność ich populacji. Występujące w równaniu (1.3) parametry $a, b > 0$ interpretujemy jako współczynnniki narodzin ofiar oraz ich umierania na skutek drapieżnictwa, a $c, d > 0$ jako współczynniki przyrostu liczby drapieżników oraz ich umierania. Równanie to można interpretować w następujący sposób: gdy liczba x ofiar jest niewielka (tj. $x < d/c$) to prędkość zmiany liczności populacji drapieżników y' jest ujemna (innymi słowy, liczba drapieżników

maleje z powodu niewystarczającej ilości pożywienia). Z kolei, jeżeli populacja ofiar jest dostatecznie liczna (tj. $x > d/c$), to populacja drapieżników, posiadając dostateczną ilość pożywienia, rozwija się zwiększając swą liczność. Do analogicznych wniosków można dojść analizując wpływ liczności populacji drapieżników na liczbę ofiar. Rozwiązanie równania pokazuje, że wielkości populacji ofiar i drapieżników zmieniają się w sposób okresowy. Co ciekawe, jeżeli populacje ofiar i drapieżników osiągną tzw. stany równowagi ($x = d/c$ oraz $y = a/b$) to liczności obu populacji pozostaną na stałych poziomach (o ile nie zadziałają inne czynniki).

1.2. Podstawowe pojęcia

Przypuśćmy, że $f : (a, b) \times G \to \mathbb{R}^n$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ oraz $G \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym. Równanie

$$x' = f(t, x) \tag{1.4}$$

nazywamy **równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego** (w postaci normalnej). Równanie (1.4), którego prawa strona nie zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t (która w przypadku równań różniczkowych najczęściej jest interpretowana jako czas) nazywamy równaniem **autonomicznym**; w przeciwnym przypadku nazywamy je równanie **nieautonomicznym**. Równania (1.1) oraz (1.3) są przykładami równań autonomicznych; równanie (1.2) jest przykładem równania nieautonomicznego (zadanego w postaci uwikłanej).

Po rozpisaniu na współrzędne wielkości wektorowych występujących w równaniu (1.4) przyjmuje ono postać układu równań

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad\vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases},$$

w którym $x_1, \ldots, x_n$ oraz $f_1, \ldots, f_n$ to składowe odpowiednio funkcji x oraz f.

Równanie (1.4) jest szczególnym przypadkiem równania

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}), \tag{1.5}$$

które nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu m ($m \in \mathbb{N}$). Równanie takie można zawsze sprowadzić do równania rzędu pierwszego. Istotnie, wprowadzając funkcje $y_1, \ldots, y_m$ określone zależnościami

$$y_1 = x,\ y_2 = x', \ldots,\ y_m = x^{(m-1)} \tag{1.6}$$

równanie (1.5) może być zapisane jako równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu ze względu na $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, tj.

$$y' = F(t, y)$$

z funkcją prawej strony postaci

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_m \\ f(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{pmatrix}.$$

Z tego powodu dalsze rozważania teoretyczne ograniczymy do równań postaci (1.4).

1.2.1. Rozwiązanie równania różniczkowego

Niech $\triangle \subset (a, b)$ będzie niepustym przedziałem otwartym (ograniczonym lub nieograniczonym).

Definicja 1.1 (rozwiązanie równania różniczkowego). *Funkcję $x : \triangle \to \mathbb{R}^n$ nazywamy* **rozwiązaniem równania** (1.4)*, jeżeli*

(a) *x jest funkcją różniczkowalną na przedziale $\triangle$*
(b) *dla każdego $t \in \triangle$ zachodzi $x(t) \in G$;*
(c) *dla każdego $t \in \triangle$ zachodzi równość: $x'(t) = f(t, x(t))$.*

Z powyższej definicji wynika, że jeżeli u jest rozwiązaniem równania (1.4) na przedziale $\triangle$, a $\triangle_0 \subset \triangle$ jest podprzedziałem niepustym, to restrykcja rozwiązania x do przedziału $\triangle_0$, tj. $x_{|\triangle_0}$ jest rozwiązaniem równania (1.4) na przedziale $\triangle_0$. Rozwiązanie u nazywamy **rozwiązaniem wysyconym**, jeżeli nie istnieje rozwiązanie, którego jest ono restrykcją właściwą (innymi słowy, przedział na którym rozwiązanie jest określone nie może być powiększony). Można wykazać, że każde rozwiązanie wysycone jest określone na przedziale otwartym (każde rozwiązanie określone na przedziale domkniętym może być rozszerzone do rozwiązania określonego na przedziale otwartym; wynikanie w drugą stronę nie jest prawdziwe) oraz każde rozwiązanie może zostać przedłużone do rozwiązania wysyconego. Rozwiązanie określone na całym przedziale określoności równania (1.4) nazywamy **rozwiązaniem globalnym**.

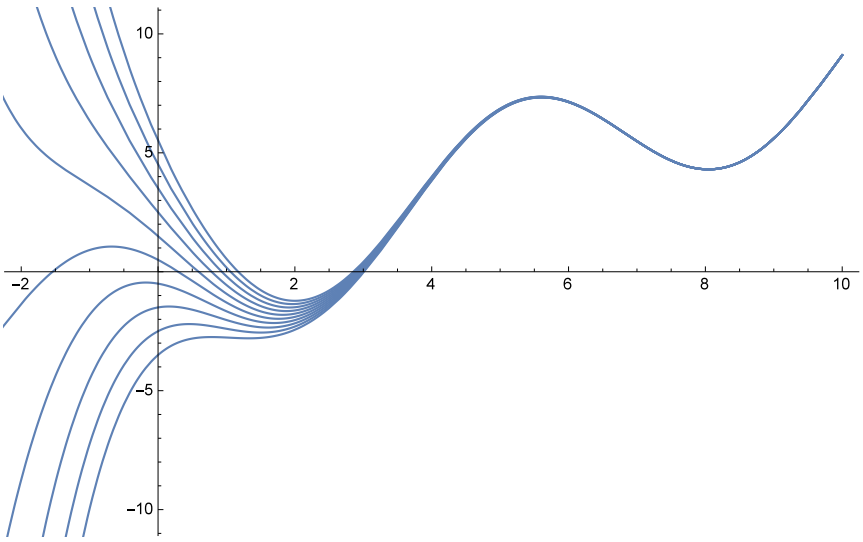
Przykład 1.1. *Rozważmy równanie różniczkowe*

$$x' + x = -\cos t - 4\sin t + t. \tag{1.7}$$

Jak łatwo sprawdzić, każda z funkcji

$$x(t) = ce^{-t} + t - 1 + \frac{3}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t, \qquad \text{dla } c \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

jest jego rozwiązaniem.



Rysunek 1.2. Wykresy rozwiązań (1.8) dla wybranych wartości $c \in \{-5, \ldots, 5\}$.

1.3. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania

Rozwiązanie równania różniczkowego, o ile w ogóle istnieje, zwykle nie będzie wyznaczone jednoznacznie. Aby zagwarantować jedyność, musimy na rozwiązanie narzucić dodatkowy warunek.

Ustalmy punkt $(t_0, x_0) \in (a, b) \times G$. Równanie różniczkowe zwyczajne (1.4) z tzw. warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, tj.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

nazywamy **problemem (początkowym) Cauchy'ego**. W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych rzędu $m \geqslant 2$, warunek początkowy przyjmuje postać (zob. (1.6))

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1},$$

gdzie $x_0, \ldots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ są zadane.

Poniższy przykład pokazuje, że problem Cauchy'ego może nie mieć rozwiązania.

Przykład 1.2 (brak rozwiązania problemu Cauchy'ego). *Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją postaci*

$$f(t, x) = \begin{cases} -1 & dla\ t < 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 1 & dla\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.10}$$

oraz rozważmy problem początkowy Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Niech $\triangle = (\alpha, \beta)$ będzie dowolnym przedziałem otwartym zawierającym 0. Funkcja x będąca rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (1.10) musiałaby być różniczkowalna na przedziale $\triangle$, a jej pochodna musiałaby być postaci

$$x'(t) = \begin{cases} -1 & dla\ t \in (\alpha, 0) \\ 1 & dla\ t \in [0, \beta) \end{cases}.$$

Na podstawie własność Darboux dla pochodnej[2] wiemy, że taka funkcja nie istnieje.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 (Peano o istnieniu rozwiązania problemu Cauchy'ego). *Przy przyjętych oznaczeniach, jeżeli funkcja $f : (a, b) \times G \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła, to problem Cauchy'ego (1.9) ma rozwiązanie określone na przedziale otwartym $\triangle$ zawierającym punkt t_0.*

Jak pokazuje kolejny przykład, rozwiązanie o którym mówi powyższe twierdzenie nie musi być jedyne.

Przykład 1.3. *Rozważmy równanie różniczkowe*

$$x' = 2\sqrt{x}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $x(t) \equiv 0$ jest jego rozwiązaniem. Podobnie, każda z funkcji postaci

$$x_a(t) = \begin{cases} (t - a)^2 & dla\ t \geqslant a \\ 0 & dla\ t < a \end{cases},$$

gdzie $a \geqslant 0$ jest ustalonym parametrem, również należy do zbioru rozwiązań rozważanego problemu Cauchy'ego.

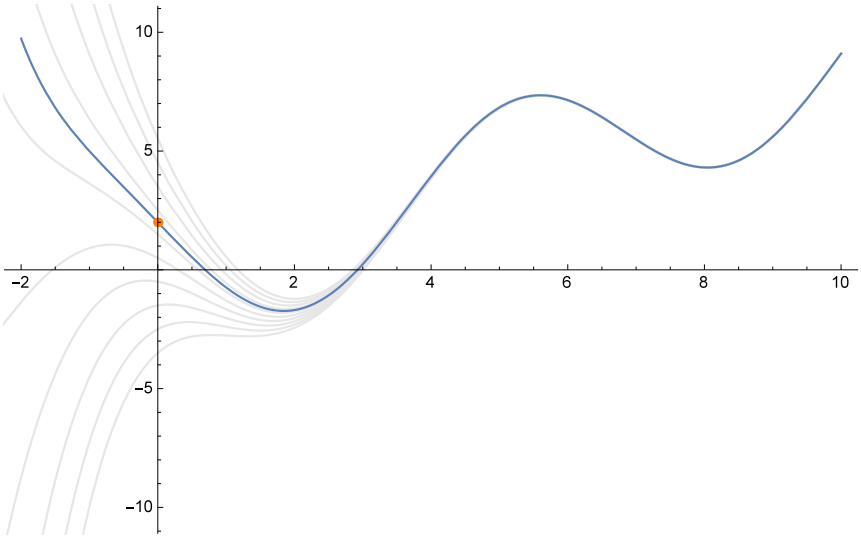
[2] Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, to dla każdego punktu $c \in [f'(a), f'(b)]$ istnieje taki punkt $\xi \in [a, b]$, że $f'(\xi) = c$.

Twierdzenie 1.1 pokazuje, że ciągłość funkcji f definiującej równanie różniczkowe zwyczajne gwarantuje istnienie rozwiązania problemu Cauchy'ego. Z kolei przykład 1.3 wskazuje na potrzebą dodatkowego założenie, przy którym rozwiązanie takie będzie jedyne. Warunkiem tym jest tzw. lokalny warunek Lipschitza.

Definicja 1.2 (warunek Lipschitza). *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Funkcja $f : X \to Y$ spełnia (globalny)* **warunek Lipschitza ze stałą** $L > 0$*, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leqslant L \|x_1 - x_2\|_X .$$

Definicja 1.3 (lokalny warunek Lipschitza). *Przy oznaczeniach z poprzedniej definicji, funkcja f spełnia* **lokalny warunek Lipschitza**, *jeżeli dla dowolnego $x_0 \in X$ istnieje jego otoczenie $U_{x_0} \subset X$, na którym funkcja f spełnia warunek Lipchitza (ze stałą L, która być może zależy od U_{x_0}).*



Rysunek 1.3. Rozwiązanie równania (1.7) spełniające warunek początkowy $x(0) = 2$.

Poniższe twierdzenie stanowi odpowiedź na pytanie o warunek gwarantujący istnienie i jedyność rozwiązania (również globalnego) problemu początkowego.

Twierdzenie 1.2 (Picarda o jedyności rozwiązania problemu Cauchy'ego). *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \times G \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła oraz spełnia lokalny warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną, tj. dla dowolnego $x_0 \in G$ istnieją jego otoczenie $U_{x_0} \subset G$ oraz stała $L > 0$ dla których*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L \|x_1 - x_2\|$$

dla dowolnych $(t, x_1), (t, x_2) \in (a, b) \times U_{x_0}$, to problem początkowy Cauchy'ego (1.9) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu punktu t_0.

Ponadto, jeżeli funkcja f spełnia globalny warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną, to rozwiązanie to jest rozwiązaniem globalnym, tj. jest określone na całym przedziale (a, b).

Przykład 1.4. *Rozważmy równanie z przykładu 1.1 z warunkiem początkowym $x(0) = 2$, tj.*

$$\begin{cases} x' + x = -\cos t - 4 \sin t + t \\ x(0) = 2 \end{cases} .$$

Ponieważ funkcja $f(t,x) = -x - \cos t - 4\sin t + t$ *jest ciągła dla wszystkich* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ *oraz spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $L = 1$ *ze względu na zmienną* x*: dla dowolnych* $(t,x_1), (t,x_2) \in \mathbb{R}^2$ *mamy*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |x_1 - x_2|,$$

zatem rozważany problem początkowy posiada dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono określone na całej prostej $\mathbb{R}$*. Jak łatwo sprawdzić, spośród nieskończenie wielu rozwiązań* (1.8) *równania* (1.7) *warunek początkowy wybiera to jedno przechodzące przez punkt* $(0,2)$ *(zob. rysunek 1.3), tj.*

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + t - 1 + \frac{3}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t.$$

Przykład 1.5. *Rozważmy problem początkowy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Funkcja $f(t,x) = x^2$ *jest ciągła dla wszystkich* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ *i spełnia tam lokalny warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną. Oznacza to, że powyższy problem posiada dokładnie jedno rozwiązanie określone na pewnym przedziale zawierającym punkt* 0*. Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem tym jest funkcja*

$$x(t) = -\frac{1}{t-1}.$$

Jak widać, rozwiązanie to nie jest rozwiązaniem globalnym (bo nie jest określone na całej prostej $\mathbb{R}$*). Dzieje się tak, ponieważ funkcja* f *nie spełnia założeń drugiej części twierdzenia 1.2, tj. globalnego warunku Lipschitza względem zmiennej* x*.*

1.4. Interpretacja geometryczna równania $x' = f(t,x)$

Przypomnijmy, że styczna do funkcji $t \to x(t)$, różniczkowalnej w otoczeniu punktu t_0, to prosta postaci

$$t \to x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Oznacza to, że w przypadku, gdy $f : (a,b) \times G \to \mathbb{R}$, gdzie $G \subset \mathbb{R}$, równanie $x' = f(t,x)$ określa w punkcie $(t, x(t))$ płaszczyzny O_{tx} wartość $x'(t)$ będącą współczynnikiem kierunkowym stycznej do rozwiązania (czyli tangensem kąta nachylenia tego rozwiązania do osi O_t) w tym punkcie.

Przykład 1.6. *W przypadku równania różniczkowego*

$$x' = t - x$$

płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ *zawierająca jego rozwiązania podzielona jest na dwie półpłaszczyzny*

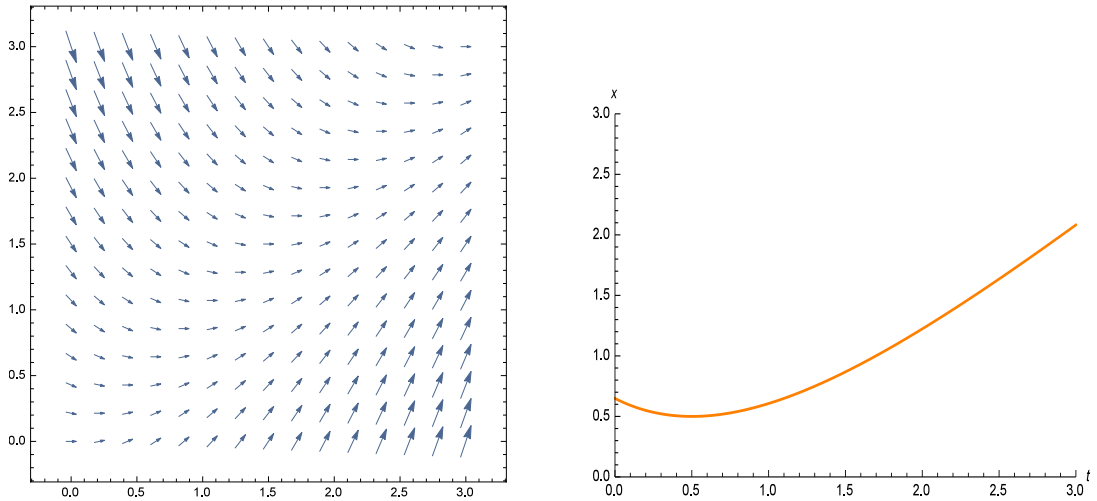
$$O_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x < t\right\}, \qquad O_2 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > t\right\}.$$

Na pierwszej z nich zachodzi $x'(t) > 0$*, zatem fragmenty rozwiązań, które są w niej zawarte są funkcjami rosnącymi. Z kolei na półpłaszczyźnie* O_2 *mamy* $x'(t) < 0$*, zatem zawarte w niej fragmenty rozwiązań są funkcjami malejącymi (zob. rysunek 1.4).*

Jeżeli $f : (a,b) \times G \to \mathbb{R}^2$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^2$, to czytelną geometryczną interpretację równania $x' = f(t,x)$ możemy przedstawić jedynie w przypadku równań autonomicznych.

Przykład 1.7. *Rozważmy równanie autonomiczne*

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}. \tag{1.11}$$



Rysunek 1.4. Pole wektorowe dla równania $x' = t - x$ (po lewej) oraz jedno z jego rozwiązań (po prawej).

Pole wektorowe określone przez to równanie przedstawia rysunek 1.5. Jako proste ćwiczenie pozostawiam wyjaśnienie, dlaczego ma ono właśnie taką postać oraz jakie wnioski na podstawie pola wektorowego możemy wyciągać na temat kształtu rozwiązań.

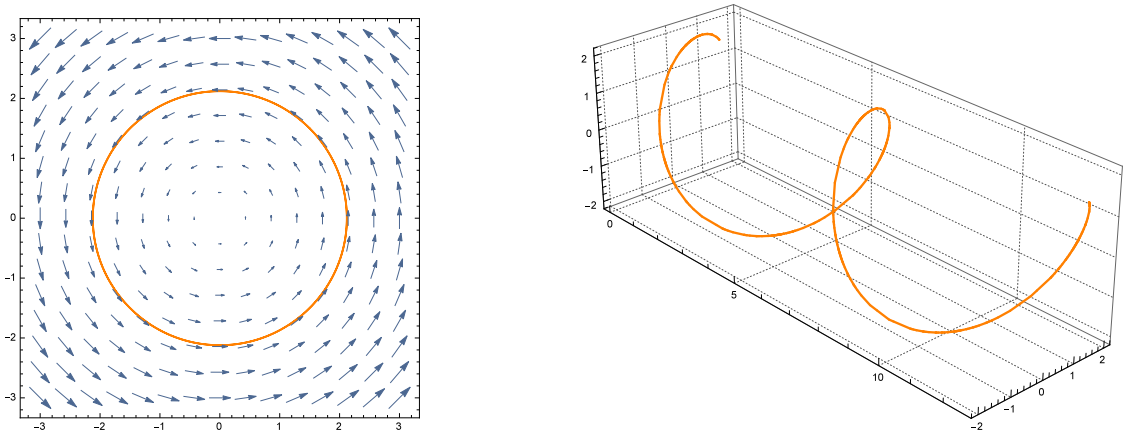
Przypomnijmy, że w rozważanym przypadku rozwiązaniami są funkcje, których wykresy to krzywe w $\mathbb{R}^3$*. Łatwo sprawdzić, że pary*

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \qquad (x(t), y(t)) = (\sin t, -\cos t)$$

są rozwiązaniami równania (1.11). Okaże się, że wszystkie inne rozwiązania są kombinacjami liniowymi tych dwóch, tj.

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t \end{cases},$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. Wykres jednego z takich rozwiązań przedstawiono na rysunku 1.5.*



Rysunek 1.5. Pole wektorowe dla równania $x' = -y, y' = x$ z zaznaczonym rzutem jednego z jego rozwiązań na płaszczyznę O_{xy} (po lewej) oraz przykładowe rozwiązanie (po prawej).

Rozdział 2

Metody rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych skalarnych rzędu pierwszego

Rozwiązanie równania różniczkowego (zakładając oczywiście, że takowe istnieje) nie zawsze może być wyznaczone w sposób analityczny. W tym rozdziale przedstawimy metody rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych skalarnych (tj. takich, których rozwiązanie jest funkcją o wartościach rzeczywistych).

2.1. Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie różniczkowe, które można przedstawić w postaci

$$x'(t) = f(t)\, g(x), \tag{2.1}$$

gdzie $f \in \mathcal{C}_I(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_J(\mathbb{R})$, a $I, J \subset \mathbb{R}$ to przedziały, nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**.

Dla tych $x \in J$ dla których $g(x) \neq 0$, równanie (2.1) możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{x'(t)}{g(x)} = f(t). \tag{2.2}$$

Oznaczając, przez $G = G(x)$ oraz $F = F(t)$ dowolne pierwotne odpowiednio funkcji $\frac{1}{g} = \frac{1}{g(x)}$ oraz $f = f(t)$, równanie przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}(G \circ x)(t) = \frac{d}{dt}F(t),$$

lub równoważnie

$$\frac{d}{dt}\left[G(x(t)) - F(t)\right] = 0.$$

Ponieważ jedynymi funkcjami (różniczkowalnymi na przedziale) o pochodnej równej zero są funkcje stałe, wnioskujemy stąd, że każde rozwiązanie równania (2.2) można zapisać w postaci uwikłanej

$$G(x) - F(t) = c,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą. Zauważmy na koniec, że ostatnią zależność możemy wyrazić jako równość

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Zauważmy również, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ spełniającego warunek $g(x_0) = 0$ funkcja stała $x(t) \equiv x_0$ jest rozwiązaniem równania (2.1).

Przykład 2.1 (równanie o zmiennych rozdzielonych). *Równanie*

$$x' = 2x(t+1).$$

jest przykładem równania o zmiennych rozdzielnych. Ma ono sens dla wszystkich wartości $t, x \in \mathbb{R}$. Poszukując jego rozwiązań przechodzimy kolejno przez postać (2.2) *oraz* (2.3) *i otrzymujemy*

$$\int \frac{dx}{x} = \int 2(t+1)\, dt,$$

o ile $x \neq 0$. Zauważmy, że funkcja $x \equiv 0$ jest rozwiązaniem wyjściowego równania. Pozostałe rozwiązania wyznaczymy obliczając odpowiednie całki. Proste rachunki prowadzą do postaci uwikłanej rozwiązania

$$\ln|x| = (t+1)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

którą można łatwo rozwikłać otrzymując postać jawną rozwiązania

$$x(t) = Ce^{(t+1)^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zanotujmy, że rozwiązania zapisane w ten sposób zawierają również wyznaczone wcześniej rozwiązanie zerowe.

2.2. Równania jednorodne

Równanie różniczkowe, które można przedstawić w postaci

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \tag{2.4}$$

gdzie $f \in \mathcal{C}_I(\mathbb{R})$, nazywamy **równaniem różniczkowym jednorodnym**.

Wprowadzając funkcję y zmiennej t

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \tag{2.5}$$

oraz uwzględniając zależność $x'(t) = ty'(t) + y(t)$, równanie (2.4) przyjmuje postać równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{f(y) - y}{t}.$$

Przedstawiona w poprzednim rozdziale metoda rozwiązywania równań o zmiennych rozdzielonych będzie dodatkowo wymagała sprawdzenia, czy funkcja $x(t) = y_0 t$ jest rozwiązaniem równania (2.4), gdzie $y_0 \in \mathbb{R}$ to dowolne rozwiązanie równania $f(y_0) - y_0 = 0$.

Przykład 2.2 (równanie jednorodne). *Rozważmy równanie*

$$tx' = x(\ln x - \ln t).$$

Równanie to ma sens dla dowolnych $t, x \in \mathbb{R}_+$ i może być zapisane jako

$$x' = \frac{x}{t} \ln \frac{x}{t},$$

zatem istotnie jest to równanie jednorodne. Dokonując podstawienia (2.5) *otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych*

$$y' = \frac{y \ln y - y}{t},$$

które potrafimy już rozwiązywać. Rozwiązaniami tego równania są funkcje

$$y(t) = e^{ct+1},$$

gdzie $c \neq 0$. Stąd, uwzględniając wykonane wcześniej podstawienie, otrzymujemy

$$x(t) = te^{ct+1}, \quad c \neq 0. \tag{2.6}$$

Ponieważ jedynym rozwiązaniem równania $y \ln y - y = 0$ jest $y = e$, należy sprawdzić, czy funkcja $x(t) = et$ spełnia wyjściowe równanie. Proste rachunki pokazują, że tak właśnie jest. Warto zauważyć, że rozwiązanie to również można zapisać w postaci (2.6) *przyjmując $c = 0$. Podsumowując, rozwiązania rozważanego równania to funkcje postaci*

$$x(t) = te^{ct+1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.3. Równania postaci $x' = f(ax + bt + c)$

Równanie

$$x' = f(ax + bt + c)$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R}$ są znane, można łatwo sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych. W przypadku, gdy $a = 0$ rozwiązanie równania sprowadza się do wyznaczenia całki z funkcji prawej strony (która w rozważanym przypadku jest funkcją niezależną od rozwiązania x).

Dla $a \neq 0$ wprowadzamy funkcję pomocniczą y postaci

$$y(t) = ax(t) + bt + c.$$

Stąd $y' = ax' + b$, a równanie wyjściowe przyjmuje postać równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = af(y) + b.$$

Przykład 2.3. *Rozważmy równanie*

$$x' = (t + x)^2.$$

Podstawiając $y = t + x$ mamy kolejno: $y' = 1 + x'$ oraz

$$y' = y^2 + 1.$$

Stąd, na podstawie (2.3)*, otrzymujemy*

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int 1 dt.$$

Mamy więc $\operatorname{arctg} y = t + c$*, a uwzględniając zastosowane podstawienie, otrzymujemy postać uwikłaną rozwiązań*

$$\operatorname{arctg}(t + x) = t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

które po rozwikłaniu przyjmują postać

$$x(t) = \operatorname{tg}(t + c) - t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dla dowolnej (ale ustalonej) wartości $c \in \mathbb{R}$ rozwiązania te są dobrze określone na przedziałach postaci $(-\pi/2 - c + k\pi, \pi/2 - c + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.4. Równania liniowe pierwszego rzędu

Równanie postaci

$$x' = a(t)\,x + b(t)\,, \tag{2.7}$$

w którym $a, b \in \mathcal{C}_I(\mathbb{R})$ to zadane funkcje, nazywamy **równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego**. Jeżeli $b \equiv 0$, tj.

$$x' = a(t)\,x \tag{2.8}$$

to równanie (2.7) nazywamy równaniem **jednorodnym** (ozn. RJ); w przeciwnym przypadku nazywamy je równaniem **niejednorodnym** (ozn. RN).

Niech RON oraz ROJ oznaczają odpowiednio przestrzeń wszystkich rozwiązań równania niejednorodnego (2.7) oraz jednorodnego (2.8) tj.

$$\begin{aligned}\mathrm{RON} &= \left\{u : I \to \mathbb{R} : u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)\right\},\\ \mathrm{ROJ} &= \left\{u : I \to \mathbb{R} : u'(t) = a(t)\,u(t)\right\}.\end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że zbiór ROJ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych $\mathcal{C}_I(\mathbb{R})$. Ponieważ dla dowolnej ustalonej wartości $t_0 \in I$ odwzorowanie

$$\varphi_{t_0} : \mathrm{ROJ} \ni x \to x(t_0) \in \mathbb{R}$$

jest izomorfizmem (tzn. jest liniową bijekcją), zatem

$$\dim \mathrm{ROJ} = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Zbiór RON nie jest podprzestrzenią liniową, ale jest związany z przestrzenią ROJ bardzo ważną relacją:

Twierdzenie 2.1. *Niech $u_0 \in$ RON będzie dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (2.7). Wówczas*

$$\mathrm{RON} = u_0 + \mathrm{ROJ}\,.$$

Dowód: Należy wykazać inkluzje dwóch zbiorów

$$\mathrm{RON} \subset u_0 + \mathrm{ROJ} \quad \text{oraz} \qquad \mathrm{RON} \supset u_0 + \mathrm{ROJ}.$$

Aby wykazać pierwszą z nich, rozważmy dowolną funkcję $u \in$ RON. Łatwo sprawdzić, że wówczas $u - u_0 \in$ ROJ. Istotnie,

$$\begin{aligned}(u - u_0)'(t) &= u'(t) - u_0'(t) = a(t)\,u(t) + b(t) - [a(t)\,u_0(t) + b(t)]\\ &= a(t)\,(u(t) - u_0(t)) = a(t)\,(u - u_0)(t)\,,\end{aligned}$$

a ponieważ

$$u = u_0 + (u - u_0)\,,$$

zatem wnioskujemy, że $u \in u_0 + \mathrm{ROJ}$.

Niech teraz $u \in u_0 + \mathrm{ROJ}$. Oznacza to, że istnieje funkcja $\tilde{u} \in$ ROJ dla której $u = u_0 + \tilde{u}$. Sprawdzenie, że tak określona funkcja u jest rozwiązaniem równania niejednorodnego pozostawiam jako proste ćwiczenie. ∎

Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia wynika metoda rozwiązywania równań liniowych pierwszego rzędu:

Etap RJ Znajdź ogólną postać rozwiązań równania jednorodnego.

Etap RN Znajdź rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego.

Suma funkcji wyznaczonych w tych dwóch etapach to postać ogólna rozwiązań równania niejednorodnego.

Rozwiązywanie równania jednorodnego RJ

Równanie jednorodne (2.8) jest przykładem prostego równania o zmiennych rozdzielonych, które potrafimy rozwiązać. Łatwo sprawdzić, że ogólna postać jego rozwiązania to

$$x(t) = Ce^{\int a(t)dt}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

gdzie $\int a(t)\,dt$ oznacza dowolną pierwotną funkcji a.

Wyznaczanie rozwiązania równania niejednorodnego RN

W celu wyznaczenia rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (2.7) wykorzystamy postać ogólną (2.9) rozwiązania równania jednorodnego. Najczęściej stosowana przy tej okazji metoda uzmienniania stałej polega na potraktowaniu występującej w rozwiązaniu (2.9) stałej C jako funkcji zmiennej t (tj. $C = C(t)$) i dobraniu jej w ten sposób, aby funkcja

$$x(t) = C(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right)$$

była poszukiwanym rozwiązaniem równania niejednorodnego. Mamy kolejno

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(C(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right)\right) = C'(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) + C(t)\,a(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right),$$

a uwzględniając postać równania, otrzymujemy

$$C'(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) + C(t)\,a(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) = a(t)\,C(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) + b(t).$$

Stąd

$$C'(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) = b(t)$$

lub równoważnie,

$$C'(t) = b(t) \exp\left(-\int a(t)\,dt\right).$$

Ostatecznie, ogólna postać rozwiązania równania niejednorodnego (2.7) to

$$x(t) = C \exp\left(\int a(t)\,dt\right) + \int \left(b(t) \exp\left(-\int a(t)\,dt\right)\right) dt \cdot \exp\left(\int a(t)\,dt\right), \qquad C \in \mathbb{R};$$

występujące tu symbole całki oznaczają dowolną funkcję pierwotną funkcji podcałkowej.

Przykład 2.4 (równanie liniowe niejednorodne). *Rozważmy równanie*

$$x' = -x \cdot \operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}.$$

RJ *W pierwszym etapie, znajdziemy ogólną postać rozwiązań równania jednorodnego*

$$x' = -x \cdot \operatorname{tg} t.$$

Zgodnie z (2.9) *mamy*

$$x(t) = Ce^{-\int \operatorname{tg} t dt} = C \cos t, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

RN *Niech teraz* $C = C(t)$. *Wówczas*

$$\frac{d}{dt}C(t)\cos t = C'(t)\cos t - C(t)\sin t,$$

co, po wstawieniu do wyjściowego równania, prowadzi do równości

$$C'(t)\cos t - C(t)\sin t = -C(t)\cos t \cdot \operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}$$

z której wynika, że

$$C'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

czyli $C(t) = \operatorname{tg} t$.

Stąd, ogólna postać rozwiązania równania niejednorodnego to

$$x(t) = C\cos t + \sin t, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2.5. Równania zupełne

Rozważmy równanie

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.10}$$

w którym $P, Q : D \to \mathbb{R}$ to funkcje ciągłe określone na obszarze jednospójnym[1] $D \subset \mathbb{R}^2$. Równanie to możemy zapisać w postaci równoważnej[2]

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Jeżeli wyrażenie

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{2.11}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $U : D \to \mathbb{R}$, tj. dla $(x,y) \in D$

$$P(x,y) = U'_x(x,y), \qquad Q(x,y) = U'_y(x,y),$$

to równanie (2.10) nazywamy **równaniem różniczkowym zupełnym**.

Odpowiedzi na pytania, jak stwierdzić czy równanie postaci (2.10) jest równaniem zupełnym oraz jak wyznaczyć jego rozwiązania zawarte są w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli funkcje* P, Q *mają w obszarze jednospójnym* D *ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to równanie* (2.10) *jest równaniem zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y), \qquad dla\ (x,y) \in D.$$

Ponadto, jeżeli wyrażenie (2.11) *jest w obszarze* D *różniczką zupełną funkcji* $U : D \to \mathbb{R}$, *to rozwiązanie ogólne równania* (2.10) *można zapisać w postaci uwikłanej jako*

$$U(x,y) = c,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ *jest dowolną stałą.*

[1] Obszar jednospójny to taki zbiór otwarty, którego dowolne dwa punkty można połączyć krzywą, która jest w nim zawarta, a każdą zawartą w nim pętlę można w sposób ciągły zdeformować do punktu, pozostając cały czas w obszarze.

[2] Zapis ten należy rozumieć *formalnie* chociaż można mu nadać sensowną interpretację; wymagałoby to operowania *wielkościami infinitezymalnymi* (nieskończenie małymi).

Przykład 2.5 (równanie zupełne). *Rozważmy równanie*

$$\frac{x}{y^2}y' = \frac{1}{y} + x. \tag{2.12}$$

Zbiór, w którym równanie to jest dobrze określone, jest sumą dwóch obszarów jednospójnych

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\} \quad oraz \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}.$$

Poniższe rozumowanie możemy przeprowadzić dla każdego z tych obszarów z osobna (ale nie dla ich sumy, która nie spełnia założeń twierdzenia 2.2).

Równanie (2.12) *możemy przepisać w postaci równoważnej*

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0,$$

z której wynika, że

$$P(x,y) = \frac{1}{y} + x \quad oraz \quad Q(x,y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Ponieważ

$$P'_y(x,y) = -\frac{1}{y^2}, \qquad Q'_x(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

zatem równanie (2.12) *jest równaniem zupełnym. Wyznaczymy teraz funkcję U, której różniczką zupełną jest wyrażenie $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Skoro*

$$U'_x(x,y) = P(x,y) = \frac{1}{y} + x$$

zatem

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int \frac{1}{y} + x dx = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y), \tag{2.13}$$

gdzie φ jest dowolną funkcją (zmiennej y, która znika podczas różniczkowania względem zmiennej x). Stąd

$$U'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$$

a z równości $U'_y(x,y) = Q(x,y)$ wynika, że

$$\varphi'(y) = 0.$$

Przyjmując $\varphi(y) = 0$, na podstawie (2.13)*, otrzymujemy*

$$U(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2$$

i ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (2.12) *możemy zapisać jako*

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2.5.1. Uzupełnianie równań niezupełnych – czynnik całkujący

Równania różniczkowe w postaci różniczki zupełnej występują dość rzadko. Okazuje się jednak, że wiele z równań, które nie są zupełne można *uzupełnić* (tj. sprowadzić do równania zupełnego) mnożąc je przez stosownie dobraną funkcję – tzw. **czynnik całkujący**.

Wyrażenie

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

niebędące różniczką zupełną żadnej funkcji, po przemnożeniu przez funkcję μ (zakładamy tu, że $\mu(x,y) \neq 0$ dla $(x,y) \in D$) przyjmuje postać

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy.$$

Uzyskane w ten sposób równanie będzie równaniem zupełnym, jeżeli czynnik całkujący μ dobierzemy tak, aby

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\,P(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\,Q(x,y)\right]. \tag{2.14}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\,P(x,y)\right] = \mu'_y(x,y)\,P(x,y) + \mu(x,y)\,P'_y(x,y)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\,Q(x,y)\right] = \mu'_x(x,y)\,Q(x,y) + \mu(x,y)\,Q'_x(x,y)$$

zatem warunek (2.14) równoważny jest warunkowi

$$\mu'_y \cdot P - \mu'_x \cdot Q = \mu \cdot \left(Q'_x - P'_y\right). \tag{2.15}$$

Wyznaczenie stąd czynnika całkującego może okazać się znacznie trudniejsze, niż rozwiązanie wyjściowego równania w inny sposób (równanie (2.15) to równanie różniczkowe cząstkowe ze względu na poszukiwaną funkcję μ). W pewnych przypadkach metoda czynnika całkującego jest jednak bardzo efektywna.

Czynnik całkujący postaci $x \to \mu(x)$

Zauważmy, że dla czynnika całkującego $x \to \mu(x)$ równanie (2.15) przyjmuje postać

$$-\mu'(x) \cdot Q(x,y) = \mu(x) \cdot (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)).$$

Stąd

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: jeżeli

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(x),$$

to równanie niezupełne (2.10) możemy uzupełnić czynnikiem całkującym $\mu(x) = \exp\left(\int \varphi(x)\,dx\right)$.

Czynnik całkujący postaci $y \to \mu(y)$

Dla czynnika całkującego $y \to \mu(y)$ równanie (2.15) przyjmuje postać

$$\mu'(y) \cdot P(x,y) = \mu(y) \cdot (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)).$$

Stąd

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{P(x,y)}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: jeżeli

$$-\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{P(x,y)}=\varphi(y),$$

to równanie niezupełne (2.10) możemy uzupełnić czynnikiem całkującym $\mu(y)=\exp\left(\int\varphi(y)\,dy\right)$.

Przykład 2.6. *Rozważmy równanie*

$$\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0.$$

Mamy tu $P(x,y)=y+xy^2$ *oraz* $Q(x,y)=-x$. *Ponieważ*

$$P'_y(x,y)=1+2xy,\quad Q'_x(x,y)=-1$$

zatem rozważane równanie nie jest zupełne. Poszukamy dla niego czynnika całkującego. Skoro

$$-\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{P(x,y)}=\frac{-2-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

zatem czynnikiem całkującym jest funkcja

$$\mu(y)=\exp\int-\frac{2}{y}dy=\frac{1}{y^2}.$$

Faktycznie, po przemnożeniu wyjściowego równania przez wyznaczony czynnik całkujący otrzymujemy równanie zupełne (zob. poprzedni przykład)

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Czynnik całkujący postaci $(x,y)\to\mu(x\pm y)$

Zauważmy, że dla czynnika całkującego postaci $(x,y)\to\mu(x\pm y)$ równanie (2.15) przyjmuje postać

$$\pm\mu'(x\pm y)\cdot P(x,y)-\mu'(x\pm y)\cdot Q(x,y)=\mu(x\pm y)\cdot(Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)).$$

Stąd

$$\frac{\mu'(x\pm y)}{\mu(x\pm y)}=\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)\mp P(x,y)}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: jeżeli

$$\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)\mp P(x,y)}=\varphi(x\pm y),$$

to równanie niezupełne (2.10) możemy uzupełnić czynnikiem całkującym $\mu(t)=\exp\left(\int\varphi(t)\,dt\right)$ dla $t=x\pm y$.

Przykład 2.7. *Rozważmy równanie różniczkowe*

$$\frac{2xy}{x+y}dx+(x-y)\,dy=0.$$

Mamy $P(x,y)=\frac{2xy}{x+y}$ *oraz* $Q(x,y)=x-y$. *Równanie to nie jest zupełne, ale*

$$\frac{P'_y(x,y-Q'_x(x,y))}{Q(x,y)-P(x,y)}=\frac{\frac{2x(x+y)-2xy}{(x+y)^2}-1}{x-y-\frac{2xy}{x+y}}=\frac{1}{x+y}=\varphi(x+y),$$

zatem istnieje dla tego równania czynnik całkujący postaci

$$\mu(t) = \exp\left(\int \varphi(t)\,dt\right) = \exp\left(\int \frac{1}{t}dt\right) = t,$$

gdzie $t = x + y$. *Po wymnożeniu stronami przez* $\mu(x+y) = x + y$ *otrzymujemy równanie*

$$2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0,$$

które jest już równaniem zupełnym. Dla niego

$$U(x,y) = \int 2xydx = x^2y + \varphi(y)$$

oraz

$$U'_y(x,y) = x^2 + \varphi'(y).$$

Równość $U'_y(x,y) = x^2 - y^2$ *zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\varphi'(y) = -y^2$. *Przyjmując na przykład* $\varphi(y) = -y^3/3$ *otrzymujemy ogólną postać rozwiązania:* $3x^2y - y^3 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Czynnik całkujący postaci $(x,y) \to \mu(xy)$

Zauważmy, że dla czynnika całkującego postaci $(x,y) \to \mu(xy)$ równanie (2.15) przyjmuje postać

$$x\mu'(xy)\cdot P(x,y) - y\mu'(xy)\cdot Q(x,y) = \mu(xy)\cdot(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)).$$

Stąd

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = \frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{yQ(x,y) - xP(x,y)}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: jeżeli

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{yQ(x,y) - xP(x,y)} = \varphi(xy),$$

to równanie niezupełne (2.10) możemy uzupełnić czynnikiem całkującym $\mu(t) = \exp\left(\int \varphi(t)\,dt\right)$, dla $t = xy$.

Czynnik całkujący postaci $(x,y) \to \mu(x/y)$

Zauważmy, że dla czynnika całkującego postaci $(x,y) \to \mu(x/y)$ równanie (2.15) przyjmuje postać

$$-\frac{x}{y^2}\mu'(x/y)\cdot P(x,y) - \frac{1}{y}\mu'(x/y)\cdot Q(x,y) = \mu(x/y)\cdot(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)).$$

Stąd

$$\frac{\mu'(x/y)}{\mu(x/y)} = \frac{y^2(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y))}{xP(x,y) + yQ(x,y)}.$$

Wynika stąd następujący wniosek: jeżeli

$$\frac{y^2(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y))}{xP(x,y) + yQ(x,y)} = \varphi(x/y),$$

to równanie niezupełne (2.10) możemy uzupełnić czynnikiem całkującym $\mu(t) = \exp\left(\int \varphi(t)\,dt\right)$, dla $t = x/y$.

Przykład 2.8. *Rozważmy równanie różniczkowe*

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{y} dy = 0.$$

Mamy $P(x,y) = y - \frac{1}{x}$ *oraz* $Q(x,y) = \frac{1}{y}$. *Ponieważ*

$$\frac{y^2 \left(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\right)}{xP(x,y) + yQ(x,y)} = \frac{y}{x} = \varphi(x/y),$$

zatem istnieje dla tego równania czynnik całkujący postaci

$$\mu(t) = \exp\left(\int \varphi(t)\, dt\right) = \exp\left(\int \frac{1}{t} dt\right) = t,$$

gdzie $t = x/y$. *Po przemnożeniu wyjściowego równania stronami przez* $\mu(x/y) = x/y$ *otrzymujemy równanie*

$$\left(x - \frac{1}{y}\right) dx + \frac{x}{y^2} dy = 0,$$

które jest już równaniem zupełnym. Dla niego

$$U(x,y) = \int x - \frac{1}{y} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

oraz

$$U'_y(x,y) = \frac{x}{y^2} + \varphi'(y).$$

Równość $U'_y(x,y) = x/y^2$ *zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\varphi'(y) = 0$. *Przyjmując na przykład* $\varphi(y) = 0$ *otrzymujemy ogólną postać rozwiązania:* $x^2 - 2x/y = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Rozdział 3

Równania różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

W tym rozdziale skupimy się na metodzie rozwiązywania **równań różniczkowych zwyczajnych liniowych stopnia n o stałych współczynnikach**, tj. równaniach postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b(t), \tag{3.1}$$

gdzie $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ to znane współczynniki, a b zadana funkcja. Jeżeli $b(t) \equiv 0$, tj.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0, \tag{3.2}$$

to równanie (3.1) nazywamy **równaniem jednorodnym** (ozn. RJ); w przeciwnym przypadku równanie (3.1) nazywamy **równaniem niejednorodnym** (ozn. RN).

Niech, podobnie jak w poprzednim rozdziale, RON oraz ROJ oznaczają odpowiednio przestrzeń wszystkich rozwiązań równania niejednorodnego (3.1) oraz jednorodnego (3.2) tj.

$$\mathrm{RON} = \left\{ u : I \to \mathbb{R} : u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = b(t) \right\},$$
$$\mathrm{ROJ} = \left\{ u : I \to \mathbb{R} : u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) \equiv 0 \right\}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. *Niech $u_0 \in \mathrm{RON}$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania* (3.1). *Wówczas:*

a) $\mathrm{RON} = u_0 + \mathrm{ROJ}$*;*
b) ROJ *jest rzeczywistą przestrzenią liniową oraz* $\dim \mathrm{ROJ} = n$.

Dowód: Dowód punktu a) oraz pierwszej cześci punktu b) pozostawiam jako proste ćwiczenie (zob. dowód twierdzenia 2.1 z poprzedniego rozdziału). W celu uzasadnienia drugiej części punktu b), ustalmy dowolny punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz rozważmy odwzorowanie

$$L : \mathrm{ROJ} \ni u \to (u(t_0), u'(t_0), \ldots, u^{(n-1)}(t_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Łatwo wykazać, że odwzorowania L jest izomorfizmem, tj. jest liniową bijekcją. To oznacza, że $\dim \mathrm{ROJ} = \dim \mathbb{R}^n = n$. ∎

Z równaniem (3.1) możemy stowarzyszyć wielomian

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{3.3}$$

nazywany wielomianem charakterystycznym równania (3.1).

Wprowadzając funkcje $y_1 = x$, $y_2 = x', \ldots, y_n = x^{(n-1)}$ otrzymujemy warunki

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \ldots, y_n' = -a_{n-1}y_n - \ldots - a_1y_2 - a_0y_1 + b(t),$$

które pozwalają równanie (3.1) zapisać w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego $y' = Ay + B$, w którym $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ oraz[2]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Łatwo sprawdzić, że wielomianem charakterystycznym macierzy A jest

$$\lambda \to (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right),$$

co pokazuje, że określenie tym terminem wielomianu (3.3) jest usprawiedliwione.

Podobnie jak w przypadku równań liniowych stopnia pierwszego, rozwiązywanie równania (3.1) przebiega dwuetapowo:

Etap RJ Znajdź ogólną postać rozwiązań równania jednorodnego.

Etap RN Znajdź rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego.

Suma funkcji wyznaczonych w tych dwóch etapach to postać ogólna rozwiązań równania niejednorodnego.

3.1. Rozwiązywanie równania jednorodnego

Ponieważ $\dim \mathrm{ROJ} = n$, w celu wyznaczenia bazy przestrzeni ROJ wystarczy wskazać układ n liniowo niezależnych funkcji będących rozwiązaniami równania jednorodnego RJ.

Twierdzenie 3.2. *Układ n liniowo niezeleżnych funkcji stanowiących bazę przestrzeni* ROJ *tworzymy w następujący sposób:*

- *jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem m-krotnym wielomianu φ, to funkcje*

$$t \to e^{\lambda t}, \quad t \to te^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t \to t^{m-1}e^{\lambda t}$$

wchodzą w skład bazy przestrzeni ROJ*;*
- *jeżeli $\lambda = \alpha + i\beta$ oraz $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ to para nierzeczywistych k-krotnych pierwiastków wielomianu φ, to funkcje*

$$t \to e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad t \to te^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \ldots, \quad t \to t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$t \to e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad t \to te^{\alpha t}\sin\beta t, \quad \ldots, \quad t \to t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

wchodzą w skład bazy przestrzeni ROJ.

[2] Macierz (3.4) to tzw. macierz stowarzyszona z wielomianem φ (ang. companion matrix).

Dowód: Dowód twierdzenia polega na uzasadnieniu dwóch prostych faktów: a) wykazaniu, że powyższe funkcje są rozwiązaniami równania jednorodnego; b) wykazaniu, że funkcje te są liniowo niezależne. ■

Przykład 3.1. *Rozważmy równanie*

$$x''' - 4x'' + 4x' = 0. \tag{3.5}$$

Odpowiadający mu wielomian charakterystyczny $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^2$ *posiada dwa pierwiastki:* $\lambda_1 = 0$ *o krotności* $k_1 = 1$ *oraz* $\lambda_2 = 2$ *o krotności* $k_2 = 2$. *Zgodnie z twierdzeniem 3.2 pierwiastki te generują następujące funkcje bazowe* RJ*:*

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow v_1(t) = 1, \\ &\lambda_2 = 2 \rightsquigarrow v_2(t) = e^{2t}, \quad v_3(t) = te^{2t}. \end{aligned}$$

Wynika stąd ogólna postać rozwiązania równania (3.5)*:*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 te^{2t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Przykład 3.2. *Rozważmy równanie*

$$x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0. \tag{3.6}$$

Odpowiadający mu wielomian charakterystyczny

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2+1\right)^2$$

posiada dwa pierwiastki: $\lambda_1 = i$ *oraz* $\lambda_2 = -i$*, każdy o krotności* 2. *Zgodnie z twierdzeniem 3.2 pierwiastki te generują następujące funkcje bazowe* RJ*:*

$$\lambda_{1,2} = \pm i \rightsquigarrow v_1(t) = \cos t,\ v_2(t) = t\cos t,\ v_3(t) = \sin t,\ v_4(t) = t\sin t.$$

Ogólna postać rozwiązania równania (3.6) *to*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

3.2. Wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego

3.2.1. Metoda przewidywania

Metoda przewidywania polega na poszukiwaniu rozwiązania u_0 równania niejednorodnego w przypadku, gdy funkcja prawej strony b ma szczególną postać (jest rozwiązaniem pewnego liniowego równania różniczkowego jednorodnego o stałych współczynnikach). I tak,

(a) jeżeli $b \in \pi_m$ oraz
- $\lambda = 0$ nie jest pierwiastkiem φ, to $u_0 \in \pi_m$,
- $\lambda = 0$ jest pierwiastkiem k–krotnym φ, to

$$u_0(t) = t^k P_m(t),$$

gdzie $P_m \in \pi_m$,

(b) jeżeli $b(t) = e^{at}p_m(t)$, gdzie $p_m \in \pi_m$ oraz
- $\lambda = a$ nie jest pierwiastkiem φ, to

$$u_0(t) = e^{at} P_m(t),$$

gdzie $P_m \in \pi_m$,

- $\lambda = a$ jest pierwiastkiem k–krotnym φ, to

$$u_0(t) = t^k e^{at} P_m(t),$$

gdzie $P_m \in \pi_m$,

(c) jeżeli $b(t) = (p_m(t)\cos\beta t + q_m(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$, gdzie $p_m, q_m \in \pi_m$ oraz

- $\lambda = \alpha \pm i\beta$ nie jest pierwiastkiem φ, to

$$u_0(t) = (P_m(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t},$$

gdzie $P_m, Q_m \in \pi_m$,

- $\lambda = \alpha \pm i\beta$ jest pierwiastkiem k–krotnym φ, to

$$u_0(t) = t^k (P_m(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t},$$

gdzie $P_m, Q_m \in \pi_m$.

(d) jeżeli b jest sumą funkcji z punktów (a)–(c), to rozwiązania u_0 poszukujemy w postaci sumy funkcji wyznaczonych dla każdego składnika funkcji b zgodnie z powyższym schematem.

Przykład 3.3. *Rozważmy równanie*

$$x''' - 4x'' + 4x' = 1 + t^2 + \cos t. \tag{3.7}$$

Etap RJ *Ogólna postać rozwiązania równania jednorodnego* $x''' - 4x'' + 4x' = 0$ *to*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Etap RN *Funkcję prawej strony b przedstawmy jako sumę dwóch funkcji*

$$b(t) = b_1(t) + b_2(t), \quad \textit{gdzie} \quad b_1(t) = 1 + t^2, \quad b_2(t) = \cos t.$$

Poszukiwane rozwiązanie równania niejednorodnego (3.7) *będzie sumą rozwiązań szczególnych równań*

$$x''' - 4x'' + 4x' = 1 + t^2 \quad \textit{oraz} \quad x''' - 4x'' + 4x' = \cos t.$$

Do ich rozwiązania zastosujemy metodę przewidywania.

Ponieważ $b_1 \in \pi_2$ *oraz* $\lambda = 0$ *jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu charakterystycznego* $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$, *zatem rozwiązania* u_1 *poszukamy w postaci*

$$u_1(t) = t\left(a + bt + ct^2\right).$$

Ponieważ

$$u_1'(t) = 3ct^2 + 2bt + a, \quad u_1''(t) = 6ct + 2b, \quad u_1'''(t) = 6c$$

zatem, po wstawieniu u_1 *do równania, otrzymujemy*

$$6c - 4(6ct + 2b) + 4\left(3ct^2 + 2bt + a\right) = 1 + t^2$$

skąd wynika układ warunków

$$\begin{cases} 12c = 1 \\ -24c + 8b = 0 \\ 6c - 8b + 4a = 1 \end{cases}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy $a = 5/8$, $b = 1/4$, $c = 1/12$, *czyli*

$$u_1(t) = \frac{5}{8}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t^3.$$

W przypadku drugiego równania, $b_2(t) = \cos t$, a liczby $\pm i$ nie są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego dlatego rozwiązania u_2 poszukamy w postaci

$$u_2(t) = a\cos t + b\sin t.$$

Ponieważ

$$u_2'(t) = -a\sin t + b\cos t, \quad u_2''(t) = -a\cos t - b\sin t, \quad u_2'''(t) = a\sin t - b\cos t$$

zatem, po wstawieniu u_2 do równania, otrzymujemy

$$a\sin t - b\cos t - 4(-a\cos t - b\sin t) + 4(-a\sin t + b\cos t) = \cos t$$

skąd wynika układ warunków

$$\begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ 4a + 3b = 1 \end{cases}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy $a = 4/25$, $b = 3/25$, czyli

$$u_2(t) = \frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t.$$

Ostatecznie, ogólna postać rozwiązania równania (3.7) to

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} + \frac{5}{8}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3.2.2. Metoda uzmienniania stałych

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą przestrzeni ROJ. Oznacza to, że rozwiązanie ogólne równania jednorodnego RJ jest postaci

$$x(t) = c_1 v_1(t) + \ldots + c_n v_n(t), \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązania szczególnego u_0 równania niejednorodnego (3.1) poszukamy w postaci

$$u_0(t) = c_1(t) v_1(t) + \ldots + c_n(t) v_n(t),$$

w której $c_1, \ldots, c_n$ to nieznane funkcje spełniające układ równań

$$\begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_n(t) \\ v_1'(t) & v_2'(t) & \cdots & v_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & v_2^{(n-1)}(t) & \cdots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Macierz $W(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ tego układu to tzw. **macierz Wrońskiego**[3] (jej wyznacznik to wrońskian).

Twierdzenie 3.3. *Niech $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{C}^{n-1}_{(a,b)}$. Jeżeli*

$$\det W(v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0)) \neq 0$$

dla pewnego $t_0 \in (a, b)$, to funkcje $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

[3] Józef Hoene-Wroński (ur. 24 sierpnia 1776 w Wolsztynie, zm. 9 sierpnia 1853 w Neuilly-sur-Seine) – polski matematyk, fizyk, filozof, ekonomista i prawnik. Autor pojęcia *mesjanizm polski*, które potem często wykorzystywał Adam Mickiewicz, co było przyczyną sporów tych dwóch osób.

Dowód: Rozpiszmy warunek liniowej niezależności funkcji $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha_1 v_1(t) + \ldots + \alpha_n v_n(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Założenia pozwalają poprzednik implikacji zróżniczkować $n-1$ razy. Otrzymamy wówczas układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1(t) + \ldots + \alpha_n v_n(t) \equiv 0 \\ \alpha_1 v_1'(t) + \ldots + \alpha_n v_n'(t) \equiv 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_n v_n^{(n-1)}(t) \equiv 0 \end{cases}. \tag{3.9}$$

Jeżeli dla pewnego $t_0 \in (a,b)$ macierz tego układu, czyli $W(v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0))$, jest nieosobliwa, to jego jedynym rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. To oznacza, że funkcje są liniowo niezależne.■

Wracając do poszukiwania rozwiązania szczególnego zauważmy, że funkcje $v_1, \ldots, v_n$ – jako baza przestrzeni ROJ – są liniowo niezależne. Można również pokazać przez bezpośredni rachunek (odwołując się do postaci funkcji $v_1, \ldots, v_n$; zob. twierdzenie 3.2), że macierz układu równań (3.8) jest nieosobliwa, a sam układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$. Po scałkowaniu otrzymujemy poszukiwane funkcje $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ oraz ogólną postać rozwiązania równania niejednorodnego

$$x(t) = (c_1 + c_1(t)) v_1(t) + \ldots + (c_n + c_n(t)) v_n(t), \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Przykład 3.4. *Rozważmy równanie*

$$x'' - x' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}.$$

Etap RJ *Wielomian charakterystyczny rozważanego równania* $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ *posiada dwa pierwiastki:* $\lambda_1 = 0$ *oraz* $\lambda_2 = 1$*. Zgodnie z twierdzeniem 3.2 pierwiastki te generują następujące funkcje bazowe* RJ*:*

$$\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow v_1(t) = 1, \quad \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow v_2(t) = e^t.$$

Wynika stąd ogólna postać rozwiązania równania (3.5)*:*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Etap RN *Rozwiązania* u_0 *równania niejednorodnego poszukamy w postaci*

$$u_0(t) = c_1(t) + c_2(t) e^t.$$

Układ równań (3.8) *przyjmuje postać*

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t) e^t = 0 \\ c_2'(t) e^t = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} \end{cases}.$$

Stąd

$$c_1'(t) = -\frac{e^{2t}}{1+e^t}, \quad c_2'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

Ponieważ

$$c_1(t) = \int -\frac{e^{2t}}{1+e^t} dt = \ln\left(e^t + 1\right) - e^t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$c_2(t) = \int \frac{e^t}{1+e^t} dt = \ln\left(e^t + 1\right) + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

zatem, przyjmując na przykład $c = d = 0$, otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$u_0(t) = \ln\left(e^t + 1\right) - e^t + e^t \ln\left(e^t + 1\right).$$

Ostatecznie, ogólna postać rozwiązania równania niejednorodnego to

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + \ln\left(e^t + 1\right) + e^t \ln\left(e^t + 1\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Na zakończenie rozważmy przykład pokazujący sposób, w jaki przedstawione w tym rozdziale metody będą mogły być zastosowane do rozwiązywania układu równań liniowych rzędu pierwszego.

Przykład 3.5. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}. \tag{3.10}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$x'' = 2x' + y' = \ldots$$

i dalej, uwzględniając drugie równanie,

$$\ldots = 2x' + 3x + 4y = 2x' + 3x + 4\left(x' - 2x\right)$$

co, równoważnie możemy zapisać jako

$$x'' - 6x' + 5x = 0. \tag{3.11}$$

Wielomian charakterystyczny tego równania $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$ posiada dwa pierwiastki: $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 5$. Zgodnie z twierdzeniem 3.2 pierwiastki te generują następujące funkcje bazowe

$$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow v_1(t) = e^t, \quad \lambda_2 = 5 \rightsquigarrow v_2(t) = e^{5t}.$$

Wynika stąd ogólna postać rozwiązania równania (3.11)*:*

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Funkcję y wyznaczymy z pierwszego równania

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) - 2x(t) = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t} \\ &= -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, rozwiązania równania (3.10) *możemy zapisać w postaci*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Rozdział 4

Układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

Układ równań różniczkowych

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + f(t), \tag{4.1}$$

w którym $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ to macierz, której elementami są funkcje $a_{ij} : (a,b) \to \mathbb{R}$ zmiennej t oraz $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jest zadaną funkcją, nazywamy układem równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego. Jeżeli $f(t) \equiv 0$, tj.

$$x'(t) = A(t)\,x(t), \tag{4.2}$$

to układ równań (4.1) nazywamy jednorodnym (ozn. URJ); w przeciwnym przypadku układ równań (4.1) nazywamy układem niejednorodnym (ozn. URN).

Przykład 4.1. *Przykładem układu równań różniczkowych* (4.1) *jest układ*

$$\begin{cases} x_1' = t^3 x_1 + (1-t)x_2 + \cos 2t \\ x_2' = 2x_1 + tx_2 - t + 1 \end{cases};$$

mamy tu

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 1-t \\ 2 & t \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -t+1 \end{pmatrix}.$$

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że funkcje $t \to A(t)$ oraz $t \to f(t)$ są ciągłe. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania (zob. twierdzenie 1.2) zagwarantuje, że wówczas problem początkowy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

będzie posiadał, dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dokładnie jedno rozwiązanie.

Niech, podobnie jak w poprzednim rozdziale, RON oraz ROJ oznaczają odpowiednio przestrzeń wszystkich rozwiązań układu równań niejednorodnego (4.1) oraz jednorodnego (4.2) tj.

$$\mathrm{RON} = \left\{u : (a,b) \to \mathbb{R}^n : u'(t) = A(t)\,u(t) + f(t)\right\},$$
$$\mathrm{ROJ} = \left\{u : (a,b) \to \mathbb{R}^n : u'(t) = A(t)\,u(t)\right\}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. *Niech* $u_0 \in \mathrm{RON}$ *będzie dowolnym rozwiązaniem równania* (4.1). *Wówczas:*

a) $\mathrm{RON} = u_0 + \mathrm{ROJ}$*;*
b) ROJ *jest rzeczywistą przestrzenią liniową oraz* $\dim \mathrm{ROJ} = n$.

Dowód: Dowód punktu a) oraz pierwszej cześci punktu b) pozostawiam jako proste ćwiczenie (zob. dowód twierdzenia 2.1 z rozdziału 2). W celu uzasadnienia drugiej części punktu b), ustalmy dowolny punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz rozważmy odwzorowanie

$$L : \mathrm{ROJ} \ni x \to x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Łatwo wykazać, że odwzorowanie L posiada następujące własności:

- L jest liniowe, tj.
$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$$
dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathrm{ROJ}$.
- L jest bijekcją, tj. dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x \in \mathrm{ROJ}$ dla którego $x(t_0) = x_0$.

To oznacza, że przestrzenie ROJ oraz $\mathbb{R}^n$ są izomorficzne, a w szczególności

$$\dim \mathrm{ROJ} = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Otrzymana równość kończy dowód. ∎

Jak łatwo przewidzieć, schemat rozwiązywania układów równań różniczkowych liniowych jest podobny do schematu rozwiązywania równań różniczkowych liniowych rzędu n i przebiega w dwóch etapach: w pierwszym wyznaczamy ogólną postaci rozwiązania URJ; następnie konstruujemy rozwiązanie szczególne URN. Suma wyznaczonych w ten sposób funkcji to postać ogólna rozwiązań układu równań niejednorodnych.

4.1. Konstrukcja rozwiązania ogólnego URJ

Tę część rozpoczniemy od krótkiego uzupełnienia dotyczącego funkcji, których argumenty to macierze.

4.1.1. Uzupełnienie – wybrane własności funkcji macierzowych

Niech

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

będzie sumą szeregu potęgowego zbieżnego dla $x \in K_r = \{x \in \mathbb{C} : |x| < r\}$. Niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Można wykazać, że jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K_r$, to funkcja

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

jest dobrze określona (zob. twierdzenie 11.8, str. 233 w: Stanisław Białas, *Macierze. Wybrane problemy.* Wydawnictwa AGH 2006). Stosując ten fakt do funkcji elementarnej

$$x \to e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

przypomnijmy, że funkcja ta jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$, otrzymujemy naturalne rozszerzenie definicji funkcji wykładniczej obejmujące również macierze:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Korzystając z twierdzenia o iloczynie szeregów potęgowych łatwo wykazać, że jeżeli dwie macierze $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ komutują tj. $AB = BA$, to

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}.$$

Jako proste ćwiczenie pozostawiam wykazanie, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A macierz e^A jest nieosobliwa[4] oraz

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Różniczkowanie oraz całkowanie macierzy

Niech $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$. Jeżeli funkcje $a_{ij} : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne (całkowalne), to funkcja $t \to A(t)$ również jest różniczkowalna (całkowalna) oraz

$$\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^n \quad \text{oraz} \quad \int A(t)\,dt = \left(\int a_{ij}(t)\,dt\right)_{i,j=1}^n.$$

Twierdzenie 4.2 (Własności operacji różniczkowania macierzy). *Operacja różniczkowania macierzy posiada następujące własności:*

a) *funkcja* $\frac{d}{dt} : A(t) \to A'(t)$ *jest liniowa, tj. dla dowolnych* $A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *oraz* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha A(t) + \beta B(t)\right) = \alpha\frac{dA}{dt}(t) + \beta\frac{dB}{dt}(t);$$

b) *jeżeli macierze* $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *są różniczkowalne to macierz* $A(t)B(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *jest różniczkowalna oraz*

$$\left(A(t)B(t)\right)' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t);$$

c) *jeżeli macierz nieosobliwa* $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *jest różniczkowalna to*

$$\left(A^{-1}(t)\right)' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

Dowód: Dowód punktu a) pozostawiam jako proste ćwiczenie. Niech $A(t)B(t) = (c_{ij}(t))$. Wówczas

$$c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\,b_{kj}(t),$$

czyli funkcje c_{ij}, jako sumy funkcji różniczkowalnych, są funkcjami różniczkowalnymi oraz

$$\begin{aligned} c'_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^{m}\left(a_{ik}(t)\,b_{kj}(t)\right)' = \sum_{k=1}^{m}\left(a'_{ik}(t)\,b_{kj}(t) + a_{ik}(t)\,b'_{kj}(t)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} a'_{ik}(t)\,b_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\,b'_{kj}(t), \end{aligned}$$

[4] Okaże się, że $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ (zob. zależność (4.8)).

co kończy dowód punktu b). Aby udowodnić punkt c) zapiszmy

$$I_n = A(t) A^{-1}(t).$$

Różniczkując tę równość stronami, korzystając z punku b) otrzymujemy

$$0_n = A'(t) A^{-1}(t) + A(t) \left(A^{-1}(t)\right)'$$

skąd wynika

$$A(t) \left(A^{-1}(t)\right)' = -A'(t) A^{-1}(t)$$

a stąd

$$\left(A^{-1}(t)\right)' = -A^{-1}(t) A'(t) A^{-1}(t).$$

Otrzymana równość kończy dowód. ■

4.1.2. Macierz fundamentalna układu równań różniczkowych liniowych

Przypuśćmy, że funkcje wektorowe $x_k : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ (dla $k = 1, \ldots, n$) stanowią bazę przestrzeni ROJ. Oznacza to, że są one liniowo niezależne oraz

$$x_k'(t) = A(t) x_k(t), \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Oznaczmy $X(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$. Wówczas układ warunków (4.4) możemy zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$X'(t) = A(t) X(t), \quad \text{dla } t \in (a,b). \tag{4.5}$$

Definicja 4.1 (macierz fundamentalna). *Każdą macierz nieosobliwą $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniającą równanie* (4.5) *nazywamy* **macierzą fundamentalną** *układu $x'(t) = A(t)x(t)$.*

Można wykazać (zob. twierdzenie 6.3, str. 178 w: Andrzej Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT Warszawa 1999), że dla każdej macierzy $X(t)$ spałniającej równanie (4.5) zachodzi

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds, \tag{4.6}$$

dla dowolnych $t_0, t \in (a,b)$. Wyznacznik $\det X(t)$ nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego układu funkcji $x_1, \ldots, x_n$. Z zależności (4.6) wynika, że jeżeli macierz $X(t)$ jest nieosobliwa w pewnym punkcie $t_0 \in (a,b)$, to jest nieosobliwa w całym przedziale (a,b).

Macierz fundamentalną dla URJ potrafimy efektywnie wyznaczać jedynie w szczególnych przypadkach. Z definicji macierzy fundamentalnej wynika, że jej kolumny to baza przestrzeni ROJ, a to oznacza, że wyznaczenie macierzy fundamentalnej równoważne jest wyznaczeniu rozwiązania ogólnego URJ.

4.1.3. Rozwiązywanie układów równań różniczkowych liniowych o macierzy stałej

Przypuśćmy, że macierz układu jest stała, tj.

$$x'(t) = Ax(t). \tag{4.7}$$

Wykażemy, że macierz $X(t) = e^{tA}$ jest macierzą fundamentalną układu (4.7).

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = A e^{tA}.$$

Oznacza to, że macierz e^{tA} jest, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, rozwiązaniem równania (4.5). Stąd, na podstawie zależności (4.6), otrzymujemy dla $t_0 = 0$

$$\det e^{tA} = \exp \int_0^t \operatorname{tr} A ds = e^{t \operatorname{tr} A} \neq 0. \tag{4.8}$$

Macierz e^{tA}, jako nieosobliwe rozwiązanie równania (4.5), jest macierzą fundamentalną układu (4.7). Tym samym jej kolumny stanowią bazę przestrzeni ROJ dla układu (4.7), a ogólna postać rozwiązania układu jednorodnego $x' = Ax$ to

$$x(t) = e^{tA}c, \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}^n. \tag{4.9}$$

4.1.4. Wyznaczanie macierzy fundamentalnej $\exp(tA)$

Przypomnijmy, że każda macierz kwadratowa jest podobna do swojej macierzy Jordana, tj. dla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dla której

$$A = P \cdot J_A \cdot P^{-1},$$

gdzie $J_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jest macierzą Jordana macierzy A. Łatwo wówczas wykazać, że

$$e^{tA} = Pe^{tJ_A}P^{-1}.$$

Istotnie,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k P J_A^k P^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k J_A^k}{k!}\right) P^{-1} = Pe^{tJ_A}P^{-1}.$$

Macierz fundamentalna dla układu o macierzy diagonalizowalnej

Przypuśćmy, że macierz A jest diagonalizowalna, tj. $J_A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ to wartości własne macierzy A. Wówczas

$$e^{tJ_A} = \exp \begin{pmatrix} t\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t\lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t\lambda_n \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Na podstawie (4.9) rozwiązanie ogólne układu równań $x' = Ax$ to

$$x(t) = e^{tA}c = Pe^{tJ_A}P^{-1}c = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}c, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

Kolumny macierzy P to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$ macierzy A odpowiadające jej wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Stąd wynika następujące twierdzenie, które podaje postać rozwiązania URJ, która nie wymaga wyznaczania odwrotności macierzy P.

Twierdzenie 4.3 (rozwiązanie URJ o macierzy diagonalizowalnej). *Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A odpowiadającymi jej wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych $x' = Ax$ jest kombinacją liniową rozwiązań $z_1, \ldots, z_n$, gdzie*

- *jeżeli* $\lambda_k \in \mathbb{R}$, *to*
$$z_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k;$$
- *jeżeli* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *jest nierzeczywistą wartością własną macierzy* A, *której odpowiada wektor własny* v_k, *to parze wartości własnych* $\lambda_k, \overline{\lambda_k}$ *odpowiadają dwa liniowo niezależne rozwiązania*
$$z_{k,1}(t) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_k t} v_k\right), \qquad z_{k,2}(t) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_k t} v_k\right).$$

Przykład 4.2. *Rozważmy jednorodny liniowy układ równań różniczkowych rzędu pierwszego*
$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}. \tag{4.11}$$

Pary własne[5] *dla macierzy układu* (4.11)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
to
$$\lambda_1 = -1,\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 2,\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Bazą przestrzeni ROJ *są zatem funkcje*
$$z_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad z_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
a rozwiązanie ogólne układu (4.11) *jest postaci*
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + c_3 z_3(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t} \\ 3c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ 5c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t} \end{pmatrix},$$
gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Przykład 4.3. *Rozważmy jednorodny liniowy układ równań różniczkowych rzędu pierwszego*
$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 4y \\ z' = x + 3z \end{cases}. \tag{4.12}$$

Pary własne dla macierzy układu (4.12)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
to
$$\lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 4,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[5] Parę $\{\lambda, v\}$ nazywamy parą własną macierzy A, jeżeli λ jest wartością własną A, a v odpowiadającym tej wartości własnej wektorem własnym.

Bazą przestrzeni ROJ *są zatem funkcje*

$$z_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_3(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a rozwiązanie ogólne układu (4.12) *to*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + c_3 z_3(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{4t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{pmatrix},$$

gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Przykład 4.4. *Rozważmy jednorodny liniowy układ równań różniczkowych rzędu pierwszego*

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}. \tag{4.13}$$

Pary własne dla macierzy układu (4.13)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

to

$$\lambda_1 = i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$e^{it}\begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t + i(\cos t + 2\sin t) \\ 5\cos t + i5\sin t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix},$$

zatem bazą przestrzeni ROJ *są funkcje*

$$z_1(t) = \operatorname{Re}\left(e^{it}\begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix},$$
$$z_2(t) = \operatorname{Im}\left(e^{it}\begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix},$$

a rozwiązanie ogólne układu (4.13) *jest postaci*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) = \begin{pmatrix} c_1(2\cos t - \sin t) + c_2(\cos t + 2\sin t) \\ 5c_1\cos t + 5c_2 \sin t \end{pmatrix},$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Macierz fundamentalna dla układu o macierzy niediagonalizowalnej

Rozważmy teraz przypadek, gdy macierz Jordana macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nie jest diagonalna. Ponieważ macierz Jordana J_A jest blokową macierzą diagonalną

$$J_A = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \ldots, J_{\lambda_m,k_m}),$$

gdzie m oznacza liczbę klatek Jordana tworzących macierz J_A, a klatka $J_{\lambda_i,k_i} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ jest macierzą postaci

$$J_{\lambda_i,k_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

zatem

$$e^{tJ_A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} tJ_{\lambda_1,k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & tJ_{\lambda_m,k_m} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \exp(tJ_{\lambda_1,k_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_{\lambda_m,k_m}) \end{pmatrix}.$$

W celu wyznaczenia bazy ROJ wystarczy podać przepis na wyznaczanie eksponenty macierzy $tJ_{\lambda,k}$, gdzie $J_{\lambda,k} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ jest macierzą jak w (4.14).

Niech $J_{\lambda,k} = \lambda I_k + R_k$, gdzie $R_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ to macierz

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kolejne potęgi macierzy R_k przesuwają systematycznie nadprzekątną zawierającą 1 w kierunku prawego górnego wierzchołka (zob. przykład 4.5), aby dla potęg $p \geqslant k$ zwracać ostatecznie macierz zerową.

Przykład 4.5. *Łatwo sprawdzić, że*

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R_4^4 = 0_4.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \exp(tJ_{\lambda,k}) = \exp(t\lambda I + tR_k) = \exp(t\lambda I)\exp(tR_k) = e^{t\lambda}\exp(tR_k) = \\ = e^{t\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(tR_k)^i}{i!} = e^{t\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^iR_k^i}{i!} \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\exp(tJ_{\lambda,k}) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Na podstawie zależności (4.9) rozwiązanie ogólne układu równań $x' = Ax$ to

$$x(t) = e^{tA}c = Pe^{tJ_A}P^{-1}c = P\begin{pmatrix} \exp(tJ_{\lambda_1,k_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_{\lambda_m,k_m}) \end{pmatrix} P^{-1}c, \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{4.16}$$

gdzie macierze $\exp(tJ_{\lambda_i,k_i})$ mają postać (4.15), a kolumny macierzy P to wektory główne $v_1, \ldots, v_n$ macierzy A wypisane w kolejności zgodnej z zasadami tworzenie macierzy Jordana i odpowiadającej jej macierzy przejścia.

Na zakończenie sformułujemy twierdzenie wynikające ze wzoru (4.16) i będące uzupełnieniem twierdzenia 4.3. Określa ono postać wszystkich liniowo niezależnych rozwiązań układ $x' = Ax$ o macierzy niediagonalizowalnej.

Twierdzenie 4.4. *Niech $J_A = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \ldots, J_{\lambda_m,k_m})$ będzie macierzą Jordana macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wówczas*

(a) *każdej rzeczywistej klatce Jordana $J_{\lambda,k}$ stopnia k odpowiada k liniowo niezależnych funkcji*

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda t}v^{(1)} \\ z_2(t) &= e^{\lambda t}\left(v^{(2)} + tv^{(1)}\right) \\ z_3(t) &= e^{\lambda t}\left(v^{(3)} + tv^{(2)} + \frac{t^2}{2}v^{(1)}\right) \\ &\vdots \\ z_k(t) &= e^{\lambda t}\left(v^{(k)} + tv^{(k-1)} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v^{(1)}\right) \end{aligned}$$

wchodzących w skład bazy przestrzeni ROJ*; $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)}$ to wektory główne kolejno rzędu $1, 2, \ldots, k$* [6] *macierzy A odpowiadające parze własnej $\{\lambda, v^{(1)}\}$.*

(b) *każdej parze nierzeczywistych klatek Jordana $J_{\lambda,k}$ oraz $J_{\overline{\lambda},k}$ stopnia k odpowiada $2k$ liniowo niezależnych funkcji*

$$w_{i,1}(t) = \operatorname{Re} z_i(t), \quad w_{i,2}(t) = \operatorname{Im} z_i(t), \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, k$$

wchodzących w skład bazy przestrzeni ROJ*. Występujące tu funkcje $z_1, \ldots, z_k$ definiujemy jak w punkcie (a); $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)}$ to wektory główne kolejno rzędu $1, 2, \ldots, k$ macierzy A odpowiadające parze własnej $\{\lambda, v^{(1)}\}$.*

Przykład 4.6. *Rozważmy jednorodny liniowy układ równań różniczkowych rzędu pierwszego*

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 3z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2z \end{cases}. \tag{4.17}$$

Macierz układu (4.17)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[6] Tzn. $v^{(1)}$ jest wektorem własnym macierzy A oraz $(A - \lambda I)v^{(i+1)} = v^{(i)}$ dla $i = 1, \ldots, k-1$.

ma jedną potrójną wartość własną $\lambda = 2$*, której odpowiadają trzy wektory główne*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rzędu } 1; \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rzędu } 2; \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ rzędu } 3.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4.4 bazę przestrzeni ROJ *stanowią funkcje*

$$z_1(t) = e^{2t}v^{(1)} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$z_2(t) = e^{2t}\left(v^{(2)} + tv^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 4te^{2t} \\ e^{2t}(-4+4t) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$z_3(t) = e^{2t}\left(v^{(3)} + tv^{(2)} + \frac{t^2}{2}v^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2t^2e^{2t} \\ \left(3-4t+2t^2\right)e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$

Stąd, rozwiązanie ogólne układu (4.17) *to*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1z_1(t) + c_2z_2(t) + c_3z_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 4c_1 + 4c_2t + 2c_3t^2 \\ 4c_1 + c_2(-4+4t) + c_3\left(3-4t+2t^2\right) \\ c_3 \end{pmatrix},$$

gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$*.*

Zauważmy na koniec, że

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tJ_A}P^{-1} = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \end{pmatrix}P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{2t} & 4te^{2t} & 2t^2e^{2t} \\ 4e^{2t} & e^{2t}(-4+4t) & \left(3-4t+2t^2\right)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t}+te^{2t} & -te^{2t} & 3te^{2t}+2t^2e^{2t} \\ e^{2t}+\frac{1}{4}e^{2t}(4t-4) & -\frac{1}{4}e^{2t}(4t-4) & e^{2t}\left(2t^2-4t+3\right)+\frac{3}{4}e^{2t}(4t-4) \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd, podstawiając $t = 1$*,*

$$e^A = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & 5e^2 \\ e^2 & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Konstrukcja rozwiązania szczególnego URN

Pokażemy teraz metodę konstrukcji rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego opartą na macierzy fundamentalnej.[7] Rozwiązanie to w połączeniu z wyznaczonym wcześniej rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego pozwoli otrzymać ogólną postać rozwiązania URN.

4.2.1. Metoda uzmienniania stałych dla URN

Niech $X(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ będzie macierzą fundamentalną układu jednorodnego (4.2)

$$x'(t) = A(t)\,x(t).$$

[7] Pewną alternatową (bardzo atrakcyjną w wielu przypadkach) dla przedstawionej tu metody rozwiązywania układu równań liniowych niejednorodnych jest metoda przedstawiona w przykładzie 4.8.

Jego rozwiązanie ogólne x możemy zapisać jako

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t), \quad \text{dla } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego (4.1)

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + f(t)$$

poszukamy w postaci

$$x(t) = c_1(t)\, x_1(t) + \ldots + c_n(t)\, x_n(t).$$

Oznaczając $C(t) = [c_1(t), \ldots, c_n(t)]^T$, mamy

$$x(t) = X(t)\, C(t).$$

Na podstawie twierdzenia 4.2b) oraz definicji macierzy fundamentalnej otrzymujemy

$$x'(t) = X'(t)\, C(t) + X(t)\, C'(t) = A(t)X(t)C(t) + X(t)\, C'(t) = A(t)x(t) + X(t)\, C'(t).$$

To oznacza, że x jest rozwiązaniem URN wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X(t)\, C'(t) = f(t). \tag{4.18}$$

Ponieważ macierz $X(t)$ jest nieosobliwa, zatem

$$C'(t) = X^{-1}(t)\, f(t), \tag{4.19}$$

a rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego (4.1) przyjmuje postać

$$x(t) = X(t)\, C + X(t) \int X^{-1}(t)\, f(t)\, dt, \quad \text{dla } C \in \mathbb{R}^n, \tag{4.20}$$

gdzie $\int$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji podcałkowej.

Przykład 4.7. *Rozważmy układ*

$$\begin{cases} x' = x - y + t^2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}. \tag{4.21}$$

Pary własne macierzy układu (4.21)*, tj.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

to

$$\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2,\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stąd, na podstawie twierdzenia 4.3, ogólna postać rozwiązania układu jednorodnego to

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 = \begin{pmatrix} c_1 - e^{2t} c_2 \\ c_1 + e^{2t} c_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ to dowolne stałe.

Wyznaczymy teraz rozwiązanie szczególne układy niejednorodnego. Zastosujemy metodę uzmienniania stałych i rozwiązania tego poszukamy w postaci

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1(t) + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} c_2(t);$$

funkcje c_1, c_2 wyznaczymy z równania (4.18), *tj.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1'(t) + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} c_2'(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na podstawie wzorów Cramera otrzymujemy

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & -e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right), \qquad c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t^2-1\right).$$

Stąd

$$c_1(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t, \qquad c_2(t) = \frac{1}{8}e^{-2t}\left(2t^2+2t-1\right)$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1(t) + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} c_2(t) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 - e^{2t}c_2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \\ c_1 + e^{2t}c_2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.3. Rozwiązywanie problemu początkowego

Rozważmy problem początkowy dla jednorodnego równania liniowego o macierzy stałej, tj.

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{4.22}$$

Zgodnie z (4.9), jego rozwiązanie możemy zapisać w postaci $x(t) = e^{tA}c$. Występujący tu wektor $c \in \mathbb{R}^n$ wybieramy w ten sposób, aby $x(t_0) = x_0$. Ponieważ $x(t_0) = e^{t_0A}c$, zatem

$$x(t_0) = x_0 \Leftrightarrow c = e^{-t_0A}x_0.$$

Poszukiwane rozwiązanie problemu (4.22) to zatem

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

Z kolei poszukując rozwiązania problemu początkowego dla układu niejednorodnego

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{4.23}$$

z równości (4.19) otrzymujemy

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} f(s)\, ds.$$

Warunek początkowy oznacza, że $x_0 = x(t_0) = e^{t_0A}C(t_0)$ czyli

$$C(t_0) = e^{-t_0A}x_0$$

i ostatecznie jedyne rozwiązanie x problemu początkowego (4.23) to

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds. \tag{4.24}$$

Przykład 4.8. *Rozważmy problem początkowy*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y + t^2 \\ y' = -x + y + 1 \end{array} \right. , \quad \left(\begin{array}{c} x(0) \\ y(0) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right).$$

Znajdziemy jego rozwiązanie metodą, która nie wymaga wyznaczania wektorów własnych oraz głównych macierzy układu jednorodnego (nie korzysta ona z postaci Jordana tej macierzy). Warto dodać, że wykorzystana tu metoda jest na tyle ogólna, że może być zastosowana do poszukiwania rozwiązania układu o wymiarze większym niż dwa.

Z pierwszego równania, po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu drugie równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x'' &= x' - y' + 2t = x' - (-x + y + 1) + 2t = x' + x - y - 1 + 2t \\ &= x' + x + x' - x - t^2 - 1 + 2t. \end{aligned}$$

Stąd

$$x'' - 2x' = -(t-1)^2. \tag{4.25}$$

Mamy zatem niejednorodne równanie liniowe rzędu 2. *Ponieważ wielomian charakterystyczny równania jednorodnego*

$$x'' - 2x' = 0 \tag{4.26}$$

to

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2),$$

zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (4.26) *ma postać*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $\lambda = 0$ jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu charakterystycznego, zatem rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (4.25) *poszukamy w postaci*

$$x_0(t) = t\left(at^2 + bt + c\right).$$

Proste rachunki (zachęcam do ich przeprowadzenia) prowadzą do wyniku

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{4}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (4.25) *jest postaci*

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Stąd, uwzględniając postać wyjściowego układu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} y(t) &= -x'(t) + x(t) + t^2 = -\left(2c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) + c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + t^2 \\ &= c_1 - c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Podsumowując, rozwiązanie rozważanego układu to

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t \\ c_1 - c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} \end{array} \right),$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Uwzględniając warunek początkowy otrzymujemy do rozwiązania układ równań*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases},$$

skąd wynika, że $c_1 = -c_2 = \dfrac{5}{8}$ *i tym samym poszukiwane rozwiązanie problemu początkowego to*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -15e^{2t} + 4t^3 - 6t^2 + 6t + 15 \\ 15e^{2t} + 4t^3 + 6t^2 + 18t + 9 \end{pmatrix}.$$

Przykład 4.9. *Na zakończenie tego rozdziału pokażemy prosty przykład obliczania macierzy* e^A *bez konieczności wyznaczania jej macierzy Jordana. Metoda ta, bez żadnych modyfikacji, może być wykorzystana do wyznaczania eksponenty macierzy kwadratowej o dowolnym wymiarze.*

Niech

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Jest oczywiste, że macierz A nie jest diagonalizowalna. Wiemy również, że jedyne rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

to

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Pytanie jakie sobie stawiamy jest nastepujęce: jak z tego rozwiązania „wyłuskać" macierz e^{tA}*? Mając ją i przyjmując* $t = 1$ *otrzymujemy poszukiwaną macierz* e^A.

Przypomnijmy, że pomnożenie dowolnej macierzy wymiaru 2×2 *z prawej strony przez wektory* $(1,0)^T$ *oraz* $(0,1)^T$ *zwraca odpowiednio pierwszą oraz drugą kolumnę tej macierzy:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad oraz \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Poszukiwaną macierz e^{tA} *znajdziemy zatem rozwiązując dwa problemy początkowe*

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Uwzględniając postać macierzy A, układ równań $x' = Ax$ *zapiszmy jako*

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 8x_2 \end{cases}.$$

Do jego rozwiązania wykorzystamy metodę z poprzedniego przykładu. Mamy kolejno

$$\begin{aligned} x_1'' &= -4x_1' + 4x_2' = -4x_1' + 4(-9x_1 + 8x_2) = -4x_1' - 36x_1 + 32x_2 = \\ &= -4x_1' - 36x_1 + 8(x_1' + 4x_1) = 4x_1' - 4x_1 \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$x_1'' - 4x_1' + 4x_1 = 0. \tag{4.27}$$

Wielomian charakterystyczny tego równania to

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2;$$

rozwiązanie ogólne równania (4.27) *ma więc postać*

$$x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Stąd, uwzględniając pierwsze równanie rozważanego układu, otrzymujemy

$$x_2(t) = \frac{1}{4}x_1'(t) + x_1(t) = c_1\frac{3}{2}e^{2t} + c_2\Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t\Big)e^{2t}.$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne układu $x' = Ax$ *to*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \\ c_1\frac{3}{2}e^{2t} + c_2\Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t\Big)e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Warunek początkowy $x(0) = (1,0)^T$ *prowadzi do układu*

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązanie

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -6 \end{cases}$$

pozwala wyznaczyć pierwszą kolumnę macierz e^{tA}, *tj.*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 6te^{2t} \\ -9te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Podobnie, warunek początkowy $x(0) = (0,1)^T$ *prowadzi do układu*

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = 1 \end{cases},$$

którego rozwiązanie

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

definiuje drugą kolumnę macierzy e^{tA}, *tj.*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^{2t} \\ (1+6t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} (1-6t)e^{2t} & 4te^{2t} \\ -9te^{2t} & (1+6t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

i ostatecznie, dla $t = 1$ *otrzymujemy*

$$e^{A} = \begin{pmatrix} -5e^2 & 4e^2 \\ -9e^2 & 7e^2 \end{pmatrix}.$$

Ćwiczenie: Wyznacz eksponentę macierzy A z przykładu 4.8 wykorzystując jej postać Jordana oraz wzór (4.15).

Rozdział 5

Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunki:

(a) f jest ciągła;
(b) f jest funkcją o wzroście co najwyżej wykładniczym, tzn. istnieją stałe $M > 0$, $\alpha > 0$, takie że dla dowolnego $t \geqslant 0$

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}. \tag{5.1}$$

Zbiór wszystkich funkcji f spełniających powyższe warunki oznaczamy symbolem $\mathcal{O}$ i nazywamy **klasą oryginałów**, elementy klasy oryginałów $\mathcal{O}$ nazywamy **oryginałami**, liczbę α_f definiowaną jako infimum po wszystkich stałych α spełniających warunek (5.1) nazywamy **wykładnikiem wzrostu** oryginału f. Łatwo sprawdzić, że klasa oryginałów $\mathcal{O}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar tworzy rzeczywistą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych $\mathcal{C}_{[0,\infty)}$ (ćwiczenie).

5.1. Transformata Laplace'a

Definicja 5.1 (transformata Laplace'a). **Transformatą Laplace'a** *funkcji $f \in \mathcal{O}$ nazywamy funkcję $s \to F(s)$ zmiennej zespolonej s określoną wzorem*

$$F(s) = \mathcal{L}\{t \to f(t)\}|_s = \mathcal{L}\{f\}|_s := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

dla tych s, dla których powyższa całka istnieje i jest skończona. Operator $\mathcal{L} : f \to \mathcal{L}(f)$ przyporządkowujący funkcji jej transformatę Laplace'a nazywamy **transformacją Laplace'a**.

W celu zapewnienia zbieżności całki definiującej transformatę Laplace'a założona w punkcie (a) ciągłość oryginału nie jest konieczna. Powodów przyjęcia (wyłącznie na potrzeby tego krótkiego wykładu) takiego założenia jest kilka. Pierwszym z nich jest jego prostota; drugim fakt, że ciągłość oryginałów upraszcza sformułowania i dowody części podanych poniżej własności transformaty Laplace'a. Trzecim powodem – chyba najistotniejszym – jest to, że przedstawiona w tym rozdziale metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych wykorzystująca transformatę Laplace'a stosowana będzie wyłącznie do równań definiowanych przy pomocy funkcji ciągłych. Jak (mam

nadzieję) pamiętamy, to właśnie ciągłość funkcji definiującej równanie różniczkowe zwyczajne jest warunkiem gwarantującym istnienie jego rozwiązania.

Zanotujmy również, że założenia dotyczące klasy oryginałów wykluczają istnienie transformaty Laplace'a funkcji, które nie są określona na całym przedziale $[0, \infty)$. Funkcjami takimi są na przykład funkcje elementarne tg, ctg oraz log.

Lemat 5.1. *Jeżeli $f \in \mathcal{O}$, to całka definiująca transformatę Laplace'a $\mathcal{L}(f)$ jest zbieżna bezwzględnie w półpłaszczyźnie* $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$.

Dowód: Mamy

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \right| \leqslant \int_0^\infty \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt = \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\mathrm{Re}(s)t} dt \leqslant M_f \int_0^\infty e^{(\alpha_f - \mathrm{Re}(s))t} dt.$$

Ponieważ dla $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$

$$\int_0^\infty e^{(\alpha_f - \mathrm{Re}(s))t} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{(\alpha_f - \mathrm{Re}(s))t} dt = \lim_{T\to\infty} \left. \frac{e^{(\alpha_f - \mathrm{Re}(s))t}}{\alpha_f - \mathrm{Re}(s)} \right|_0^T = \frac{1}{\mathrm{Re}(s) - \alpha_f},$$

zatem transformata Laplace'a jest dobrze określona, a całka która ją definiuje jest bezwzględnie zbieżna. ∎

5.1.1. Wybrane własności transformaty Laplace'a

Podamy teraz podstawowe własności tranformaty Laplace'a.

Stwierdzenie 5.2 (liniowość). *Transformacja Laplace'a jest operatorem liniowym, tj. dla dowolnych $f, g \in \mathcal{O}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}.$$

Dowód: Ponieważ $\mathcal{O}$ jest przestrzenią liniową, zatem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{O}$. Na podstawie stwierdzenia 5.1 wynika stąd, że transformata Laplace'a funkcji $\alpha f + \beta g$ istnieje, a teza jest prostą konsekwencją liniowości całki. ∎

Stwierdzenie 5.3 (różniczkowanie oryginału). *Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna (w punkcie $t = 0$ rozważamy pochodne prawostronne) oraz $f, f', \ldots, f^{(n)} \in \mathcal{O}$, to*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}\Big|_s = s^n \cdot \mathcal{L}\{f\}|_s - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{5.2}$$

Dowód: Zauważmy na początek, że dla dowolnego oryginału $g \in \mathcal{O}$ oraz dla $\mathrm{Re}(s) > \alpha_g$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)\, e^{-st} = 0. \tag{5.3}$$

Istotnie, skoro $g \in \mathcal{O}$, to istnieje stała $M_g > 0$ dla której

$$\left| g(t)\, e^{-st} \right| \leqslant M_g e^{(\alpha_g - \mathrm{Re}(s))t}.$$

Warunek $\mathrm{Re}(s) > \alpha_g$ pozwala wnioskować, że wraz z $t \to +\infty$ mamy

$$0 \leqslant \left| g(t)\, e^{-st} \right| \leqslant M_g e^{(\alpha_g - \mathrm{Re}(s))t} \to 0,$$

co dowodzi (5.3).

Równość (5.2) udowodnimy indukcyjnie. Dla $n = 1$ mamy

$$\mathcal{L}\left\{f'\right\}\big|_s = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f'(t)\, e^{-st} dt = \\ = \lim_{T\to\infty} \left(f(T)\, e^{-sT} - f(0) + s \int_0^T f(t)\, e^{-st} dt \right),$$

skąd, wykorzystując własność (5.3), wynika, że

$$\mathcal{L}\left\{f'\right\}\big|_s = s \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt - f(0) = s\, \mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s - f(0).$$

Równość (5.2) dla $n = 1$ jest więc prawdziwa.

Ponieważ

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n+1)}\right\}\Big|_s = \mathcal{L}\left\{\left(f^{(n)}\right)'\right\}\Big|_s = s\, \mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}\Big|_s - f^{(n)}(0),$$

zatem, opierając się na poczynionym domyślnie założeniu indukcyjnym, otrzymujemy

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n+1)}\right\}\Big|_s = s\left(s^n \cdot \mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) \right) - f^{(n)}(0) = \\ = s^{n+1} \cdot \mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k} f^{(k)}(0) - f^{(n)}(0) = \\ = s^{n+1} \cdot \mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s - \sum_{k=0}^{n} s^{n-k} f^{(k)}(0),$$

co kończy dowód. ∎

Stwierdzenie 5.4 (różniczkowanie obrazu). *Jeżeli $f \in \mathcal{O}$ oraz $\mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s = F(s)$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{L}\left\{t \to t^n f(t)\right\}\big|_s = (-1)^n F^{(n)}(s). \tag{5.4}$$

Dowód: Na podstawie definicji transformaty Laplace'a oraz ciągłości funkcji podcałkowej względem zmiennej s, otrzymujemy

$$\mathcal{L}\left\{t \to t^n f(t)\right\}\big|_s = \int_0^\infty f(t)\, t^n e^{-st} dt = (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n}\left(f(t)\, e^{-st}\right) dt \\ = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

∎

Kolejne własności transformaty Laplace'a podane zostaną bez dowodów (uzasadnienie własności 5.5 oraz 5.6 pozostawiam jako ćwiczenie).

Stwierdzenie 5.5. *Jeżeli $f \in \mathcal{O}$ oraz $\mathcal{L}\left\{f\right\}\big|_s = F(s)$, to*

(a) *dla dowolnej stałej $a > 0$*

$$\mathcal{L}\left\{t \to f(at)\right\}\big|_s = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right);$$

(b) *dla dowolnej stałej $a \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{L}\left\{t \to e^{at} f(t)\right\}\big|_s = F(s-a).$$

Stwierdzenie 5.6 (całkowanie oryginału). *Jeżeli* $f \in \mathcal{O}$ *oraz* $\mathcal{L}\{f\}|_s = F(s)$, *to*

$$\mathcal{L}\left\{t \to \int_0^t f(x)\,dx\right\}\Big|_s = \frac{F(s)}{s}.$$

Stwierdzenie 5.7 (twierdzenie Borela o splocie). *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{O}$, $\mathcal{L}\{f\}|_s = F(s)$ *oraz* $\mathcal{L}\{g\}|_s = G(s)$ *to*

$$\mathcal{L}\{f * g\}|_s = F(s)\,G(s),$$

gdzie $(f * g)(t) = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$ *to splot funkcji* f *i* g.

Stwierdzenie 5.8 (jednoznaczność transformaty). *Transformacja Laplace'a jest operatorem różnowartościowym, tzn. jeżeli dwa oryginały* $f, g \in \mathcal{O}$ *mają tę samą transformatę Laplace'a, to są równe:*[8]

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Rightarrow f = g.$$

5.1.2. Transformaty Laplace'a wybranych funkcji elementarnych

Wykorzystując definicję transformaty Laplace'a oraz jej własności wyznaczymy transformaty funkcji wykładniczej, wielomianowej oraz funkcji trygonometrycznych.

Przykład 5.1. *Niech* $f(t) = e^{at}$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$. *Dla* $s \in \mathbb{R}$, $s > a$ *mamy*

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(a-s)t}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^T = \frac{1}{s-a}.$$

Oznacza to, że

$$\mathcal{L}\left\{t \to e^{at}\right\}\Big|_s = \frac{1}{s-a},$$

w szczególności

$$\mathcal{L}\{1\}|_s = \frac{1}{s}.$$

Przykład 5.2. *Niech* $f(t) = t^n$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$. *Na podstawie własności 5.4 otrzymujemy*

$$\mathcal{L}\{t \to t^n\}|_s = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

gdzie

$$F(s) = s^{-1}$$

to transformata Laplace'a funkcji $h(t) \equiv 1$*; zob. przykład 5.1. Ponieważ*

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}},$$

zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\mathcal{L}\{t \to t^n\}|_s = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Przykład 5.3. *Wyznaczymy teraz transformaty Laplace'a funkcji* sin *oraz* cos.

Przypomnijmy, że

$$\int e^{-st}\sin t dt = -e^{-st}\frac{\cos t + s\sin t}{s^2+1} + c, \qquad dla\ c \in \mathbb{R}.$$

[8] Bardzo ważna jest tu (założona na potrzeby tego krótkiego wykładu) ciągłość oryginałów f oraz g.

Stąd

$$\mathcal{L}\{\sin\}|_s = \int_0^\infty e^{-st}\sin t dt = -\lim_{T\to\infty} e^{-st}\frac{\cos t + s\sin t}{s^2+1}\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Z kolei, wykorzystując własność 5.3,

$$\mathcal{L}\{\cos\}|_s = \mathcal{L}\left\{(\sin)'\right\}\Big|_s = s\,\mathcal{L}\{\sin\}|_s - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

5.2. Rozwiązywanie problemów początkowych metodą operatorową

Transformata Laplace'a okazuje się być bardzo wygodnym narzędziem wykorzystywanym do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych (skalarnych oraz wielowymiarowych) oraz problemów początkowych. Poszukiwane rozwiązanie musi jednak należeć do klasy oryginałów, w szczególności musi ono być określone na całym przedziale $[0,\infty)$.

Metodę operatorową (tj. opartą na transformacie Laplace'a) rozwiązywania równań różniczkowych można podzielić na trzy etapy:

Etap 1. Wyznaczamy transformatę Laplace'a lewej oraz prawej strony równania (transformatę poszukiwanego rozwiązania oznaczamy jako X).

Etap 2. Z otrzymanego równania wyznaczamy X.

Etap 3. Znając postać obrazu X oraz wykorzystując jednoznaczność transformaty wyznaczamy postać oryginału x.

Zastosowanie transformaty Laplace'a do wyznaczania rozwiązań problemów początkowych

Na zakończenie przedstawimy kilka przykładów wykorzystania transformaty Laplace'a podczas rozwiązywania problemów początkowych.

Przykład 5.4. *Rozważmy problem początkowy*

$$x' - x = te^t, \quad x(0) = 1.$$

Niech $\mathcal{L}\{x\}|_s = X(s)$. *Wówczas*

$$\mathcal{L}\{x'-x\}|_s = \mathcal{L}\{x'\}|_s - \mathcal{L}\{x\}|_s \overset{\text{Własność 5.3}}{=} sX(s) - x(0) - X(s) = sX(s) - 1 - X(s)$$

oraz

$$\mathcal{L}\{t\to te^t\}|_s \overset{\text{Własność 5.4}}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t\to e^t\}|_s \overset{\text{Przykład 5.1}}{=} -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Stąd

$$sX(s) - 1 - X(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

lub równoważnie

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^3}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{s-1} \overset{\text{Przykład 5.1}}{=} \mathcal{L}\{t\to e^t\}|_s \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{(s-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s-1} \overset{\substack{\text{Własność 5.4}\\ \text{Przykład 5.1}}}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t\to t^2e^t\}|_s$$

zatem

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{t\to e^t + \frac{1}{2}t^2e^t\right\}\Big|_s.$$

Na podstawie jednoznaczności transformaty wnioskujemy, że poszukiwane rozwiązanie to

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}t^2e^t.$$

Przykład 5.5. *Rozważmy problem początkowy*

$$x'' + x = \sin t, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$$

Niech $\mathcal{L}\{x\}|_s = X(s)$. *Wówczas*

$$\mathcal{L}\{x'' + x\}|_s = \mathcal{L}\{x''\}|_s + \mathcal{L}\{x\}|_s \overset{\text{Własność 5.3}}{=} s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \left(s^2+1\right)X(s) - s - 2$$

oraz

$$\mathcal{L}\{\sin\}|_s \overset{\text{Przykład 5.3}}{=} \frac{1}{s^2+1}.$$

Stąd

$$\left(s^2+1\right)X(s) - s - 2 = \frac{1}{s^2+1},$$

lub równoważnie

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{s+2}{s^2+1}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \overset{\text{Własność 5.4}}{=} \frac{1}{2s}\mathcal{L}\{t \to t\sin t\}|_s \overset{\text{Własność 5.6}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{t \to \int_0^t x\sin x dx\right\}\Big|_s = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t \to \sin t - t\cos t\}|_s$$

oraz

$$\frac{s+2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} \overset{\text{Przykład 5.3}}{=} \mathcal{L}\{\cos\}|_s + 2\,\mathcal{L}\{\sin\}|_s = \mathcal{L}\{\cos + 2\sin\}|_s$$

zatem

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{t \to \frac{5}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \cos t\right\}\Big|_s.$$

Na podstawie jednoznaczności transformaty wnioskujemy, że poszukiwane rozwiązanie to

$$x(t) = \frac{5}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \cos t.$$

Przykład 5.6. *Rozważmy problem początkowy*

$$\begin{cases} x' = x - y - e^t \\ y' = 2x + 3y + e^t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Niech $\mathcal{L}\{x\}|_s = X(s)$ *oraz* $\mathcal{L}\{y\}|_s = Y(s)$ *Wówczas*

$$\mathcal{L}\{x'\}|_s = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

oraz

$$\mathcal{L}\{t \to x(t) - y(t) - e^t\}|_s = X(s) - Y(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Podobnie

$$\mathcal{L}\{y'\}|_s = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

oraz

$$\mathcal{L}\{t \to 2x(t) + 3y(t) + e^t\}|_s = 2X(s) + 3Y(s) + \frac{1}{s-1}.$$

Otrzymujemy zatem układ równań liniowych ze względu na poszukiwane obrazy $X(s)$ oraz $Y(s)$

$$\begin{cases} sX(s) = X(s) - Y(s) - \dfrac{1}{s-1} \\ sY(s) = 2X(s) + 3Y(s) + \dfrac{1}{s-1} \end{cases}.$$

Jego rozwiązanie to

$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{s-2}{s^3-5s^2+9s-5} \\ Y(s) = \dfrac{s-3}{s^3-5s^2+9s-5} \end{cases}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} X(s) = -\frac{s-2}{s^3-5s^2+9s-5} &= \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2+1} \overset{\substack{\text{Własność 5.5b} \\ \text{Przykład 5.3}}}{=} \\ &= \mathcal{L}\left\{t \to \frac{1}{2}e^t\right\}\Big|_s - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{t \to e^{2t}\cos t\right\}\Big|_s - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{t \to e^{2t}\sin t\right\}\Big|_s \\ &= \mathcal{L}\left\{t \to \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{2t}\sin t\right\}\Big|_s \end{aligned}$$

zatem

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{2t}\sin t.$$

Podobnie, ponieważ

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{s-3}{s^3-5s^2+9s-5} &= \frac{s-2}{s^2-4s+5} - \frac{1}{s-1} = \frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{s-1} \\ &= \mathcal{L}\left\{t \to e^{2t}\cos t\right\}\Big|_s - \mathcal{L}\left\{t \to e^t\right\}\Big|_s = \mathcal{L}\left\{t \to e^{2t}\cos t - e^t\right\}\Big|_s \end{aligned}$$

zatem

$$y(t) = e^{2t}\cos t - e^t.$$

Ostatecznie, rozwiązanie rozważanego problemu początkowego to

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t - e^t \end{pmatrix}.$$

Jak widzimy, metoda operatorowa może być bardzo skutecznym narzędziem wyznaczania rozwiązania problemu początkowego. Ze sposobu określenia transformaty Laplace'a wynika, że warunek początkowy musi być określony w punkcie $t_0 = 0$. W przypadku, gdy jest on określony w innym punkcie, w celu rozwiązania zadania metodą operatorową bardzo czysto wystarczy odpowiednio przesunąć układ współrzędnych. Sytuację taką ilustruje kolejny, ostani już, przykład.

Przykład 5.7. *Rozważmy problem początkowy*

$$x'' - 2x' = 2e^{-t}, \qquad x(1) = -1,\ x'(1) = 0.$$

Niech $y(t) = x(t+1)$, gdzie x to puszkiwane rozwiązanie. Ponieważ

$$y''(t) - 2y'(t) = x''(t+1) - 2x'(t+1) = 2e^{-(t+1)}$$

zatem funkcja y jest rozwiązaniem problemu początkowego

$$y'' - 2y' = 2e^{-(t+1)}, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$$

Niech teraz $\mathcal{L}\{y\}|_s = Y(s)$. *Wówczas*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' - 2y'\}|_s &= \mathcal{L}\{y''\}|_s - 2\,\mathcal{L}\{y'\}|_s \overset{\text{Własność 5.3}}{=} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) = \\ &= \left(s^2 - 2s\right) Y(s) + s - 2\end{aligned}$$

oraz

$$\mathcal{L}\left\{t \to 2e^{-(t+1)}\right\}\Big|_s \overset{\text{Przykład 5.1}}{=} \frac{2e^{-1}}{s+1}.$$

Stąd

$$\left(s^2 - 2s\right) Y(s) + s - 2 = \frac{2e^{-1}}{s+1},$$

lub równoważnie

$$Y(s) = \frac{2}{e}\frac{1}{s(s+1)(s-2)} - \frac{1}{s}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{s(s+1)(s-2)} = \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{6(s-2)} - \frac{1}{2s},$$

zatem

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{2}{3e}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3e}\frac{1}{s-2} - \left(e^{-1} + 1\right)\frac{1}{s} = \\ &= \frac{2}{3e}\,\mathcal{L}\left\{t \to e^{-t}\right\}\Big|_s + \frac{1}{3e}\,\mathcal{L}\left\{t \to e^{2t}\right\}\Big|_s - \left(e^{-1} + 1\right)\mathcal{L}\{1\}|_s\end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-(t+1)} + \frac{1}{3}e^{2t-1} - e^{-1} - 1.$$

Poszukiwane rozwiązanie x *ma więc postać*

$$x(t) = y(t-1) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t-3} - e^{-1} - 1.$$

Rozdział 6

Elementy teorii stabilności

Spośród wielu własności rozwiązań równań różniczkowych (takich jak monotoniczność, okresowość czy ograniczoność), stabilność jest jedną z najistotniejszych. Brak stabilności rozwiązania równania różniczkowego, a w konsekwencji brak stabilności rzeczywistego procesu modelowanego przez to równanie, może doprowadzić do utraty kontroli nad przebiegiem procesu i w efekcie na przykład do zniszczenia urządzeń pomiarowych.

6.1. Definicje stabilności oraz asymptotycznej stabilności rozwiązania

Rozważmy równanie różniczkowe

$$x' = f(t, x) \tag{6.1}$$

określone przez funkcję ciągłą $f : (a, \infty) \times G \to \mathbb{R}^n$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym.

Definicja 6.1 (stabilność rozwiązania). *Rozwiązanie x równania (6.1) nazywamy* **stabilnym (w sensie Lapunowa)**, *jeżeli dla dowolnych $\varepsilon > 0$ oraz $t_0 \in (a, \infty)$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, dla której*

1. *wszystkie rozwiązania η równania (6.1), w tym rozwiązanie x, spełniające warunek*

$$\|x(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$$

są określone na przedziale $[t_0, \infty)$;
2. *rozwiązania te spełniają nierówność*

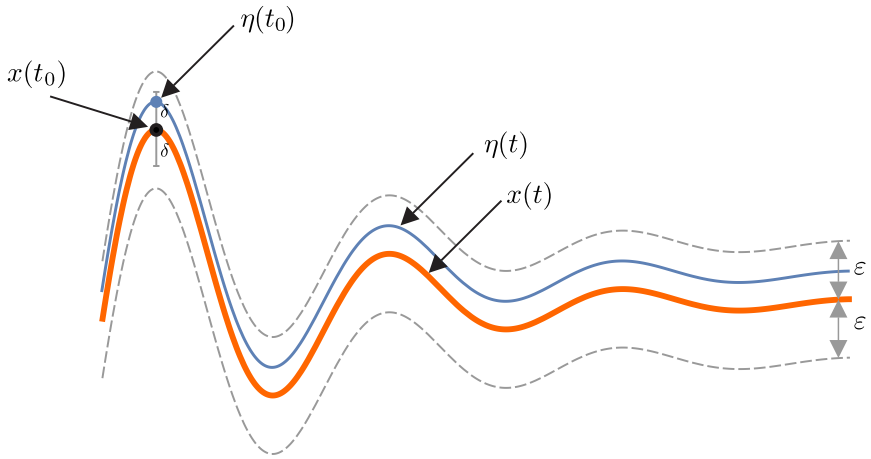
$$\|x(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$$

dla wszystkich $t \in [t_0, \infty)$.

Rozwiązanie, które nie jest stabilne nazywamy rozwiązaniem **niestabilnym**.

Można wykazać,[9] że jeżeli rozwiązanie x równania (6.1) określonego przez funkcję ciągłą jest stabilne dla pewnej chwili początkowej $t_0 \in (a, \infty)$ (tzn. spełnia warunki 1–2 definicji 6.1), to jest ono stabilne dla dowolnej chwili $t_0 \in (a, \infty)$ (tzn. jest stabilne w sensie defincji 6.1).

[9] Patrz B.P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT Warszawa 1972, str. 79



Rysunek 6.0. Idea stabilności rozwiązania.

Definicja 6.2 (asymptotyczna stabilność rozwiązania). *Rozwiązanie x równania* (6.1) *nazywamy* **asymptotycznie stabilnym (w sensie Lapunowa)**, *jeżeli*

1. *jest ono stabilne (w sensie Lapunowa);*
2. *dla każdego $t_0 \in (a, \infty)$ istnieje $\delta = \delta(t_0) > 0$, dla której dla wszystkich rozwiązań η równania* (6.1) *spełniających warunek*
$$\|x(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$$
zachodzi
$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \eta(t)\| = 0.$$

6.1.1. Punkty równowagi

Przypuśćmy, że istnieje punkt $x^* \in G$ o tej własności, że

$$f(t, x^*) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } t \in (a, \infty).$$

Z postaci równania (6.1) wynika, że wówczas funkcja stała $x(t) \equiv x^*$ jest jego rozwiązaniem. Punkty x^* o tej własności nazywamy **punktami równowagi** (czasami również *stanami równowagi*, *punktami krytycznymi* lub *punktami stałymi*) równania (6.1). Z definicji punktu równowagi wynika, że jest to taki punkt w którym dynamika (zmienność) procesu zanika. W przypadku równania autonomicznego

$$x' = f(x)$$

wyznaczenie punktów równowagi sprowadza się do znalezieniu rozwiązań równania $f(x^*) = 0$.

Przykład 6.1 (wyznaczanie punktów równowagi). *Wyznaczymy punkty równowagi układu*

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - y^3 \end{cases}.$$

W tym celu należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ -x - y^3 = 0 \end{cases}.$$

Zapiszmy układ w postaci równoważnej

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x + x^9 = 0 \end{cases}.$$

Łatwo teraz zauważyć, że układ posiada dokładnie jeden punkt równowagi $(x^*, y^*) = (0, 0)$. *Stabilność tego punktu zbadamy w dalszej części tego rozdziału (zob. przykład 6.3).*

6.2. Funkcja Lapunowa

Rozważmy równanie różniczkowe

$$x' = f(x) \tag{6.2}$$

określone przez funkcję ciągłą $f : G \to \mathbb{R}^n$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym oraz przypuśćmy, że $x^* \in G$ jest jego punktem równowagi, tj. $f(x^*) = 0$.

Niech $E \subset G$ będzie otoczeniem punktu równowagi x^*.

Definicja 6.3 (funkcja Lapunowa). *Funkcję* $V : E \to \mathbb{R}$ *spełniającą warunki*

- V *jest ciągła w* E *i różniczkowalna w* $E \setminus \{x^*\}$;
- *dla wszystkich* $x \in E : V(x) \geqslant 0$ *oraz* $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;
- *dla wszystkich* $x \in E \setminus \{x^*\}$:

$$\operatorname{grad} V(x) \circ f(x) \leqslant 0$$

nazywamy **funkcją Lapunowa** *(dla punktu równowagi* x^**). Funkcję Lapunowa spełniającą warunek*

- *dla wszystkich* $x \in E \setminus \{x^*\}$:

$$\operatorname{grad} V(x) \circ f(x) < 0$$

nazywamy **mocną funkcją Lapunowa**.

Zauważmy, że dla $x = x(t)$ wartość

$$\operatorname{grad} V(x(t)) \circ f(x(t))$$

to pochodna funkcji $t \to V(x(t))$ wzdłuż rozwiązania x równania (6.2). Faktycznie,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{dV}{dx_1}(x(t))x_1'(t) + \ldots + \frac{dV}{dx_n}(x(t))x_n'(t) = \\ &= \operatorname{grad} V(x(t)) \circ x'(t) = \operatorname{grad} V(x(t)) \circ f(x(t)). \end{aligned}$$

Zachodzi następujące twierdzenie Lapunowa o stabilności, które podamy bez dowodu.

Twierdzenie 6.1. *Jeżeli, przy przyjętych oznaczeniach, dla punktu równowagi* x^* *istnieje funkcja Lapunowa, to punkt ten jest stabilny. Ponadto, jeżeli dla punktu równowagi istnieje mocna funkcja Lapunowa, to punkt ten jest asymptotycznie stabilny.*

Przykład 6.2. *Rozważmy ponownie układ równań różniczkowych*

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - y^3 \end{cases}.$$

Zbadamy stabilność jego jedynego punktu równowagi $(x^*, y^*) = (0, 0)$ *(zob. przykład 6.1). Wykażemy mianowicie, że funkcja*

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

jest dla niego mocną funkcją Lapunowa.

W rozważanym przykładzie mamy $f(x, y) = (y - x^3, -x - y^3)$ *oraz*

$$\operatorname{grad} V(x, y) = (2x, 2y).$$

Stąd dla $(x, y) \neq (0, 0)$ *mamy*

$$\operatorname{grad} V(x, y) \circ f(x, y) = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4)) < 0,$$

zatem funkcja V *jest mocną funkcją Lapunowa (pozostałe warunki definicji 6.3 są oczywiście spełnione). To oznacza, że punkt równowagi* $(x^*, y^*) = (0, 0)$ *jest asymptotycznie stabilny.*

6.3. Stabilność liniowych układów równań różniczkowych

Rozważmy liniowy układ równań różniczkowych

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t), \tag{6.3}$$

w którym macierz $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz wektor $b(t) \in \mathbb{R}^n$ są ciągłymi funkcjami zmiennej $t \in (a, +\infty)$.

Układ (6.3) nazywamy **układem stabilnym** (odpowiednio, **asymptotycznie stabilnym** albo **całkowicie niestabilnym**), jeżeli wszystkie jego rozwiązania są rozwiązaniami stabilnymi (asymptotycznie stabilnymi, niestabilnymi). Jak się okazuje, wszystkie rozwiązania układu (6.3) są albo stabilne, albo asymptotycznie stabilne, albo niestabilne.

Twierdzenie 6.2. *Układ równań różniczkowych* (6.3) *z dowolnym wyrazem wolnym* $b(t)$ *jest układem stabilnym (odpowiednio: asymptotycznie stabilnym, całkowicie niestabilnym) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie zerowe* $x(t) \equiv 0$ *układu jednorodnego*

$$x'(t) = A(t)\,x(t) \tag{6.4}$$

jest stabilne (asymptotycznie stabilne, niestabilne).

Zainteresowanych dowodem twierdzenia 6.2 odsyłam do monografii B.P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT Warszawa 1972 (twierdzenie 1 str. 89 oraz twierdzenie 3 str. 92).

Warto zanotować, że w przypadku równania nieliniowego wnioskowanie o stabilności wszystkich jego rozwiązań na podstawie stabilności tylko jednego z nich nie jest możliwe.

Kolejne twierdzenie charakteryzuje zachowanie się rozwiązań układów liniowych stabilnych oraz asymptotycznie stabilnych.

Twierdzenie 6.3. *Układ równań różniczkowych* (6.4) *jest*

1. *stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego rozwiązanie* $t \to x(t)$ *jest ograniczone na półprostej* $[t_0, +\infty)$*, tj. istnieje stała* $M = M(x) > 0$ *dla której*

$$\|x(t)\| \leqslant M, \qquad \text{dla każdego } t \geqslant t_0;$$

2. *asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego rozwiązanie* $t \to x(t)$ *spełnia warunek:*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0.$$

6.3.1. Stabilność liniowych układów równań różniczkowych o macierzy stałej

W przypadku, gdy macierz układu (6.4) jest stała, tj.

$$x' = Ax, \tag{6.5}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, istnieją proste algebraiczne warunki pozwalające badać jego stabilność.

Twierdzenie 6.4.

1. *Układ* (6.5) *jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy* A *mają części rzeczywiste niedodatnie, tj.*

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A) \leqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

oraz wartościom własnym o częściach rzeczywistych równych zero odpowiadają jednowymiarowe klatki Jordana.

2. *Układ* (6.5) *jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste*

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dowód: Teza twierdzenia wynika z postaci macierzy fundamentalnej układu $X(t) = \exp(tA)$ (zob. twierdzenia 4.3 oraz 4.4 w rodziale czwartym). ∎

Przykład 6.3. *Rozważmy układ*

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y - 2 \end{cases}.$$

Zbadamy stabilność jego punktu równowagi $(x^*, y^*) = (2, 1)$.

Ponieważ wartości własne macierzy A rozważanego układu, t.j.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

to $\lambda_1 = -1$ *oraz* $\lambda_2 = -2$, *zatem punkt równowagi* $(x^*, y^*) = (2, 1)$ *jest punktem asymptotycznie stabilnym. Do tego samego wniosku doszlibyśmy badając stabilność rozwiązania zerowego układu jednorodnego (zob. twierdzenie 6.2)*

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}.$$

6.3.2. Efektywne kryteria stabilności: twierdzenie Lapunowa, twierdzenie Hurwitza

Wartości własne macierzy potrafimy wyznaczać jedynie w bardzo szczególnych przypadkach. Biorąc to pod uwagę, pytanie jakie możemy sobie postawić jest następujące: czy istnieje metoda badania stabilności układu niewymagająca znajomości ani jego rozwiązań, ani wartości własnych macierzy opisującej układ? Pozytywne odpowiedzi na to pytanie są treścią kolejnych dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 6.5 (Lapunow). *Układ* (6.5) *jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz symetryczna dodatnio określona $P = P^T$, dla której macierz*

$$A^T P + PA = H \tag{6.6}$$

jest ujemnie określona. Ponadto, jeżeli istnieją macierz symetryczna P oraz macierz symetryczna ujemnie określona H spełniające równanie (6.6)*, to układ* (6.5) *jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz P jest dodatnio określona.*

Warto zanotować, że występująca w powyższym twierdzeniu macierz P pozwala zdefiniować formę kwadratową $V(x) = x^T P x$. Forma ta jest dodatnio określona, tj. $V(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $V(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Dodatkowo, licząc pochodną funkcji $t \to V(x(t))$ na trajektoriach układu (6.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{d}{dt}(x(t))^T P x(t) = (x'(t))^T P x(t) + (x(t))^T P x'(t) = \\ &= (Ax(t))^T P x(t) + (x(t))^T P A x(t) = x(t)^T (A^T P + PA) x(t). \end{aligned}$$

Ujemna określoność macierzy H oznacza, że wyznaczona powyżej pochodna jest ujemna dla każdego rozwiązania $x(t) \neq 0$. Funkcja V jest zatem mocną funkcją Lapunowa dla punktu równowagi $x^* = 0$ układu (6.5).

Z twierdzenia 6.5 wynika algorytm badania asymptotycznej stabilności układu (6.5):

Krok 1. Wybieramy jakkolwiek macierz symetryczną ujemnie określoną H, np. $H = -I_n$.

Krok 2. Rozwiązujemy układ równań (6.6) ze względu na nieznaną macierz P; jest to układ równań liniowych. Jeżeli okaże się, że układ ten nie posiada rozwiązań (tak się może stać jedynie w przypadku, gdy wśród wartości własnych macierzy A znajdą się takie dwie, których suma to zero), to układ $x' = Ax$ nie jest asymptotycznie stabilny.

Krok 3. Badamy dodatnią określoność macierzy P wyznaczonej w poprzednim kroku. Poznane na algebrze liniowej algorytmy badania określoności macierzy symetrycznej (np. oparte na twierdzeniu Sylvestera) nie wymagają znajomości wartości własnych macierzy P: układ $x' = Ax$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz P jest dodatnio określona.

W przypadku, gdy znamy współczynniki wielomianu charakterystycznego (przypomnijmy, że tak jest na przykład w przypadku równań różniczkowych skalarnych rzędu n o stałych współczynnikach rozważanych w rozdziale 3.; zob. postać macierzy (3.4)), w celu zbadania asymptotycznej stabilności rozwiązań możemy wykorzystać kryterium Hurwitza oparte na tzw. macierzy Hurwitza

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{n-5} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

stowarzyszonej z wielomianem

$$\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - \lambda_n).$$

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.6 (kryterium stabilności Hurwitza). *Przypuśćmy, że współczynniki wielomianu φ są dodatnie.*[10] *Następujące warunki są równoważne:*

- *wszystkie pierwiastki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wielomianu φ mają ujemne części rzeczywiste;*
- *wszystkie minory wiodące macierzy H_φ są dodatnie.*

Przykład 6.4. *Wyznaczymy te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wszystkie rozwiązania równania różniczkowego*

$$x^{(4)} + (5-a)x''' + (9-4a)x'' + (7-5a)x' + (2-2a)x = 0$$

są asymptotycznie stabilne.

Wielomian charakterystyczny rozważanego równania to

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + (5-a)\lambda^3 + (9-4a)\lambda^2 + (7-5a)\lambda + 2 - 2a,$$

stowarzyszona z nim macierz Hurwitza ma postać

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} 5-a & 1 & 0 & 0 \\ 7-5a & 9-4a & 5-a & 1 \\ 0 & 2-2a & 7-5a & 9-4a \\ 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}.$$

[10] Łatwo wykazać (ćwiczenie), że jeżeli wszystkie pierwiastki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wielomianu mają ujemne części rzeczywiste to jego współczynniki są tego samego znaku (wszystkie są dodatnie lub wszystkie ujemne).

Proste obliczenia pokazują, że jej kolejne minory wiodące

$$\Delta_1 = 5-a; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5-a & 1 \\ 7-5a & 9-4a \end{vmatrix} = 4x^2 - 24x + 38;$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5-a & 1 & 0 \\ 7-5a & 9-4a & 5-a \\ 0 & 2-2a & 7-5a \end{vmatrix} = -18(a-2)^2(a-3);$$
$$\Delta_4 = (2-2a)\Delta_3 = 36(a-1)(a-2)^2(a-3)$$

są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 1$. Na podstawie kryterium Hurwitza, dla takich wartości parametru a wszystkie rozwiązania rozważanego równania różniczkowego są asymptotycznie stabilne.

6.4. Klasyfikacja punktów równowagi na płaszczyźnie

Na zakończenie przedstawimy klasyfikację punktów równowagi układu liniowego

$$x' = Ax, \tag{6.7}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Jak wynika z twierdzenia 6.4, o stabilności rozwiązań układu (6.7) decyduje lokalizacja wartości własnych macierzy A. Przypomnijmy, że rozwiązaniem równania (6.7) jest funkcja $t \to x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, której wykres to krzywa zawarta w $(a,\infty)\times\mathbb{R}^2$. Po zrzutowaniu rozwiązań na płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ otrzymujemy tzw. **portret fazowy**. Strzałki wskazują kierunki zmiany wartości współrzędnych x_1, x_2 rozwiązania x wraz z t zmierzającym do $+\infty$. Proste na portretach fazowych to kierunki wyznaczone przez wektory własne macierzy A. Rysunek 6.1 przedstawia uproszczone kształty portretów fazowych układu (6.7) w otoczeniu jego punktu równowagi $(0,0)$.

Przypuśćmy, że wartości własne macierz A to λ_1 oraz λ_2. Wówczas

- jeżeli $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$, to mamy do czynienia z **centrum stabilnym**, gdy $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\overline{\lambda_2} = 0$ (rysunek 6.1(i)), **ogniskiem asymptotycznie stabilnym** w przypadku $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\overline{\lambda_2} < 0$ (rysunek 6.1(a)) oraz **ogniskiem niestabilnym**, gdy $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\overline{\lambda_2} > 0$ (rysunek 6.1(d));
- jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz macierz A posiada dwa wektory własne liniowo niezależne (wówczas każdy niezerowy wektor jest wektorem własnym macierzy A), to mamy do czynienia z **węzłem gwiaździstym** asymptotycznie stabilnym, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (rysunek 6.1(b)) oraz niestabilnym, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (rysunek 6.1(e));
- jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz macierz A posiada jeden wektory własne liniowo niezależne, to mamy do czynienia z **węzłem zdegenerowanym** asymptotycznie stabilnym, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (rysunek 6.1(c)) oraz niestabilnym, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (rysunek 6.1(f));
- jeżeli $\lambda_1 < \lambda_2$, to mamy do czynienia z **węzłem** asymptotycznie stabilnym, gdy $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (rysunek 6.1 (g)) oraz niestabilnym, gdy $0 < \lambda_1 < \lambda_2$;
- jeżeli $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, to mamy do czynienia z **siodłem** niestabilnym (rysunek 6.1(h)).

Przykład 6.5. *Rozważmy liniowy układ równań różniczkowych postaci*

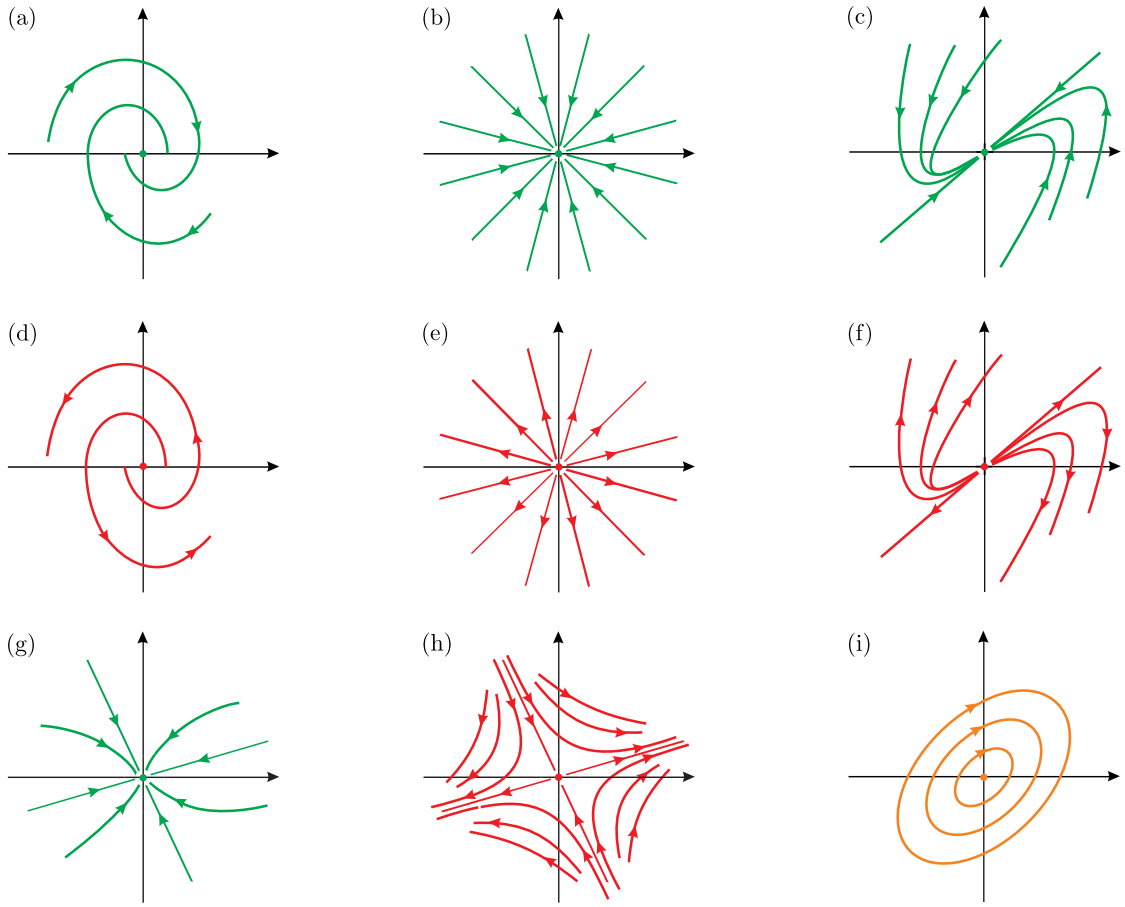
$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = -3x + y \end{cases}. \tag{6.8}$$

Jego jedynym punktem równowagi jest punkt $(x^*, y^*) = (0,0)$. Zbadamy jego stabilność. Pary własne macierzy układu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

to

$$\lambda_1 = -2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 4,\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Rysunek 6.1. (a) ognisko asymptotycznie stabilne, (b) węzeł gwiaździsty asymptotycznie stabilny, (c) węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny, (d) ognisko niestabilne, (e) węzeł gwiaździsty niestabilny, (f) węzeł zdegenerowany niestabilny, (g) węzeł asymptotycznie stabilny, (h) siodło niestabilne, (i) centrum stabilne.

Oznacza to, że punkt $(x^*, y^*) = (0, 0)$ *to niestabilne siodło. Na rysunku 6.2 przedstawiono portret fazowy układu* (6.8)*) na którym zaznaczono również wektory własne* v_1 *oraz* v_2*.*

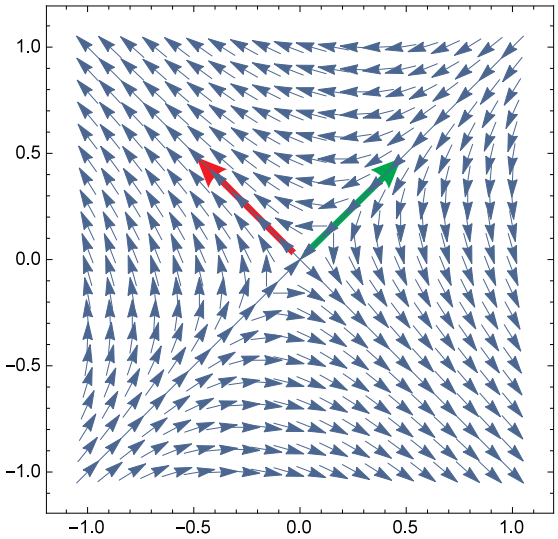
6.5. Linearyzacja

Rozważmy układ autonomiczny

$$x' = f(x) \tag{6.9}$$

zdefiniowany przez funkcję $f : G \to \mathbb{R}^n$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym. Funkcję f możemy zapisać jako zestawienie n funkcji skalarnych $f = (f_1, \ldots, f_n)$, gdzie $f_i : G \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Jeżeli f jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ w pewnym otoczeniu $U_{x^*} \subset G$ punktu $x^* \in G$ (tj. wszystkie pochodne cząstkowe $x \to \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$ są ciągłe) to funkcję f możemy zastąpić, wynikającym ze wzory Taylora, jej liniowym przybliżeniem

$$f(x) \approx f(x^*) + D_{x^*} f(x - x^*), \tag{6.10}$$



Rysunek 6.2. Portret fazowy układu (6.8) oraz jego wektory własne v_1 (zielony) oraz v_2 (czerwony).

gdzie $D_{x^*} f \in \mathbb{R}^{n\times n}$ to macierz Jacobiego funkcji f w punkcie x^*

$$D_{x^*} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}.$$

Jeżeli x^* jest punktem równowagi układu (6.9), tj. $f(x^*) = 0$, to liniowy układ równań różniczkowych

$$x' = D_{x^*} f\,(x - x^*) \tag{6.11}$$

powstały przez zastąpienie funkcji prawej strony układu (6.9) jej liniowym przybliżeniem (6.10) nazywamy **układem zlinearyzowanym** (albo *linearyzacją układu* (6.9)).

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.7. *Załóżmy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$ w pewnym otoczeniu punktu równowagi x^* układu* (6.9).

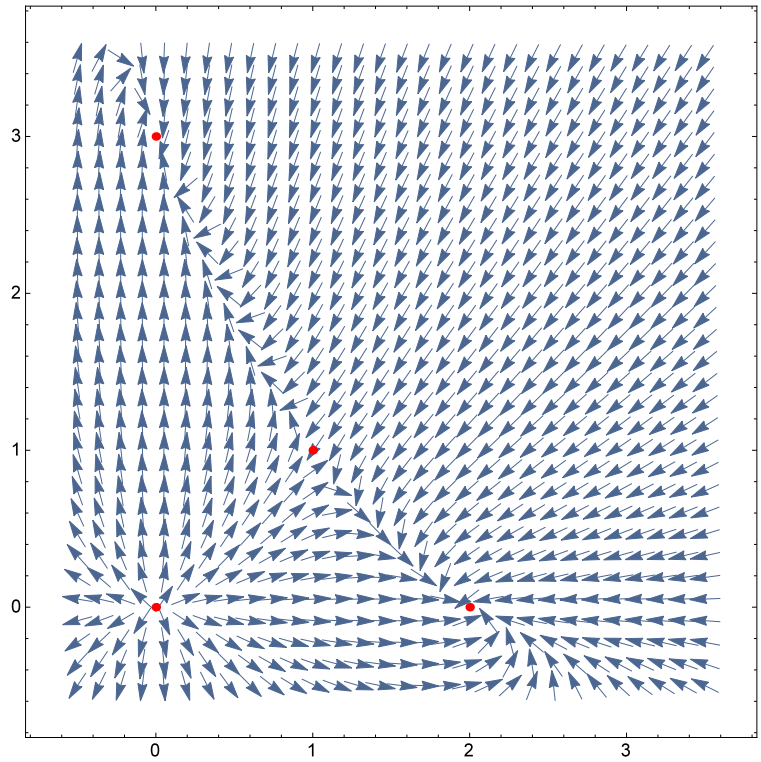
1. *Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $D_{x^*} f$ mają ujemne części rzeczywiste, to punkt równowagi x^* jest asymptotycznie stabilny.*
2. *Jeżeli istnieje wartość własna macierzy $D_{x^*} f$ o dodatniej części rzeczywistej, to punkt równowagi x^* jest niestabilny.*

Przykład 6.6. *Rozważmy nieliniowy układ równań różniczkowych*

$$\begin{cases} x' = x\,(2 - x - y) \\ y' = y\,(3 - 2x - y) \end{cases}. \tag{6.12}$$

Zbadamy stabilność jego punktów równowagi. Łatwo sprawdzić, że układ równań

$$\begin{cases} x\,(2 - x - y) = 0 \\ y\,(3 - 2x - y) = 0 \end{cases}$$



Rysunek 6.3. Portret fazowy układu (6.12) oraz jego punkty równowagi (czerwone kropki).

posiada cztery rozwiązania $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$, $(x_2^*, y_2^*) = (1,1)$, $(x_3^*, y_3^*) = (2,0)$, $(x_4^*, y_4^*) = (0,3)$. *Macierz Jacobiego* $D_{(x^*,y^*)}f$ *odpowiadająca funkcji definiującej układ* (6.12), *tj.*

$$f(x,y) = \left(2x - x^2 - xy, 3y - 2xy - y^2\right),$$

ma postać

$$D_{(x^*,y^*)}f = \begin{pmatrix} 2 - 2x^* - y^* & -x^* \\ -2y^* & 3 - 2x^* - 2y^* \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$D_{(x_1^*,y_1^*)}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D_{(x_2^*,y_2^*)}f = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$D_{(x_3^*,y_3^*)}f = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D_{(x_4^*,y_4^*)}f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Macierze $D_{(x_1^*,y_1^*)}f$ *oraz* $D_{(x_2^*,y_2^*)}f$ *posiadają dodatnią wartość własną, zatem punkty równowagi* $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ *oraz* $(x_2^*, y_2^*) = (1,1)$ *układu (6.12) są niestabilne (punkt* (x_1^*, y_1^*) *to węzeł niestabilny, punkt* (x_2^*, y_2^*) *to siodło). Z kolei macierze* $D_{(x_3^*,y_3^*)}f$ *oraz* $D_{(x_4^*,y_4^*)}f$ *posiadają jedynie rzeczywiste ujemne wartości własne, zatem punkty równowagi* $(x_3^*, y_3^*) = (2,0)$ *oraz* $(x_4^*, y_4^*) = (0,3)$ *to asymptotycznie stabilne węzły.*

Dodatek A

Symboliczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych z wykorzystaniem języka programowania Python oraz biblioteki SymPy

W języku Python,[1] w celu znalezienia postaci analitycznej rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego możemy wykorzystać bibliotekę do obliczeń symbolicznych SymPy.[2]

Obliczenia rozpoczynamy od zaimportowania niezbędnych funkcji (w tym tych, które wykorzystamy przy tworzeniu wykresów rozwiązań):

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

Dodatkowo określamy zmienną niezależną t, zmienną zależną $x = x(t)$ oraz symboliczne pochodne $x'(t)$ oraz $x''(t)$:

```
t = symbols('t')
x = Function('x')
dx = Derivative(x(t),t)
dxx = Derivative(x(t),t,t)
```

Rozwiązywane równanie różniczkowe zapisujemy w postaci $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$; w kodzie odwołujemy się do niego określając funkcję F oraz wskazując zmienną oznaczającą poszukiwaną funkcję.

[1] Programowanie w języku Python można wygodnie prowadzić w działającej w chmurze usłudze Google Colaboratory. Poniżej przesyłam link do notatnika zawierającego kody zamieszczone w tym oraz w następnym rozdziale: https://s.agh.edu.pl/0DH1t

[2] Więcej informacji na temat rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych (ang. ODE, i.e. Ordinary Differential Equations) z wykorzystaniem biblioteki SymPy można znaleźć na stronie https://docs.sympy.org/latest/modules/solvers/ode.html

A.1. Rozwiązywanie równań skalarnych rzędu pierwszego

Przykład rozwiązywania równania liniowego niejednorodnego

Znajdziemy ogólną postać rozwiązania równania z przykładu 1.1, tj.

$$x' + x = -\cos t - 4\sin t + t.$$

Mamy

```
F1 = dx+x(t)+cos(t)+4*sin(t)-t
dsolve(F1, x(t))
```

Otrzymamy rozwiązanie zapisane w postaci

$$x(t) = \left(C_1 + te^t - \frac{5e^t\sin(t)}{2} + \frac{3e^t\cos(t)}{2} - e^t\right)e^{-t}$$

a po uproszczeniu

```
simplify(dsolve(F1, x(t)).rhs)
```

$$C_1e^{-t} + t - \frac{5\sin(t)}{2} + \frac{3\cos(t)}{2} - 1$$

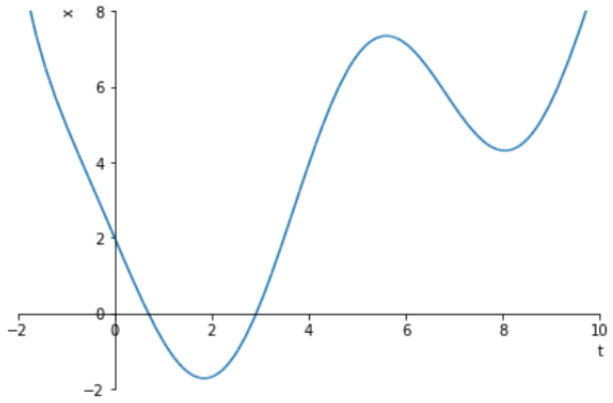
Aby spośród wszystkich rozwiązań rozważanego równania wyznaczyć to, dla którego $x(0) = 2$ (zob. rysunek 1.3) musimy odpowiednio zmodyfikować kod dodając warunek początkowy:

```
sol=dsolve(F1, x(t),ics={x(0):'2'})
simplify(sol.rhs)
```

$$t - \frac{5\sin(t)}{2} + \frac{3\cos(t)}{2} - 1 + \frac{3e^{-t}}{2}$$

Wyznaczmy jeszcze wykres uzyskanego rozwiązania:

```
wykres = plot(sol.rhs, (t,-2,10), line_color='C0', show=False,
          xlim=[-2,10], ylim=[-2,8], title="",
          legend=False, xlabel="t", ylabel="x")
wykres.show()
```



Przykład rozwiązywania równania jednorodnego

Tym razem znajdziemy ogólną postać rozwiązań równania z przykładu 2.2, tj.

$$tx' = x(\ln x - \ln t).$$

Mamy

```
F2 = t*dx-x(t)*(log(x(t))-log(t))
dsolve(F2, x(t))
```

$x(t) = te^{C_1 t+1}$

Przykład rozwiązywania równania zupełnego

Dla równania z przykładu 2.5, tj.

$$\frac{t}{x^2}x' = \frac{1}{x} + t$$

mamy:

```
F3 = t/(x(t)**2)*dx-1/x(t)-t
dsolve(F3, x(t))
```

$$x(t) = -\frac{2x}{C_1 + x^2}$$

Wykorzystywana biblioteka dobrze radzi sobie również z rozwiązywaniem równań niezupełnych, które można sprowadzić do równania zupełnego metodą czynnika całkującego. Dla równania z przykładu 2.6, tj.

$$(t + xt^2)dx - xdt = 0,$$

które przekształcimy do dwóch równoważnych postaci (w pierwszej poszukujemy funkcji $x = x(t)$, w drugiej funkcji $t = t(x)$)

$$(t + xt^2)x' - x = 0 \qquad \text{oraz} \qquad t + xt^2 - xt' = 0$$

mamy odpowiednio

```
F4 = (t+x(t)*t**2)*dx-x(t)
dsolve(F4, x(t))
```

$$\left[x(t) = \frac{\sqrt{C_1 t^2 + 1} - 1}{t},\ x(t) = \frac{-\sqrt{C_1 t^2 + 1} - 1}{t}\right]$$

oraz

```
x=symbols('x')
t=Function('t')
dt=Derivative(t(x),x)
F5 = t(x)+x*t(x)**2-x*dt
dsolve(F5, t(x))
```

$$t(x) = \frac{2x}{C_1 - x^2}$$

A.2. Rozwiązywanie równań skalarnych rzędu $n > 1$

Przykład rozwiązywania równania liniowego

Znajdziemy ogólną postać rozwiązania równania

$$x'' + 9x = 0$$

```
F6 = dxx+9*x(t)
dsolve(F6, x(t))
```

$x(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)$

Spośród wszystkich tych rozwiązań wyznaczymy to, które spełnia warunek początkowy

$$x(\pi/4) = 0, \quad x'(\pi/4) = 3\sqrt{2}.$$

```
t0 = pi/4
dsolve(F6, x(t),
ics = {x(t0): 0, x(t).diff(t).subs(t, t0): 3*sqrt(2)})
```

$x(t) = -\sin(3t) - \cos(3t)$

Rozważmy jeszcze równanie niejednorodne rzędu trzeciego (zob. przykład 3.3):

$$x''' - 4x'' + 4x' = 1 + t^2 + \cos t.$$

Mamy

```
dxxx = Derivative(x(t),t,t,t)
F7 = dxxx-4*dxx+4*dx-1-t**2-cos(t)
dsolve(F7,x(t))
```

$$x(t) = C_1 + \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} + \frac{5t}{8} + (C_2 + C_3 t)e^{2t} + \frac{3\sin(t)}{25} + \frac{4\cos(t)}{25}$$

A.3. Rozwiązywanie układów równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego

```
x, y = symbols("x y", cls=Function)
t = symbols("t")
dx = x(t).diff(t)
dy = y(t).diff(t)
```

Przykład rozwiązywania układu liniowego jednorodnego

Znajdziemy rozwiązania układu równań różniczkowych z przykładu 4.3:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}$$

Mamy

```
f = Eq(dx, 2*x(t)-y(t))
g = Eq(dy, 5*x(t)-2*y(t))
dsolve([f, g], [x(t), y(t)])
```

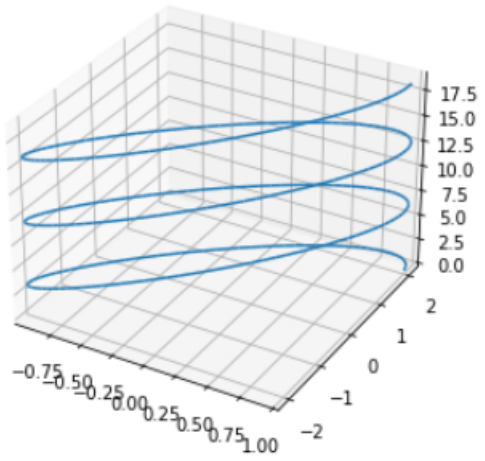
$$x(t) = -\left(\frac{C_1}{5} - \frac{2C_2}{5}\right)\cos(t) - \left(\frac{2C_1}{5} + \frac{C_2}{5}\right)\sin(t), \quad y(t) = -C_1\sin(t) + C_2\cos(t)$$

Spośród wszystkich tych rozwiązań wyznaczymy to, które spełnia warunek $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ oraz wyznaczymy jego wykres dla $t \in [0, 6\pi]$.

```
war = {x(0): 1, y(0): 2}
sol=dsolve([f, g], [x(t), y(t)], ics=war)
sol
```

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t) + 2\cos(t)$$

```
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
plot3d_parametric_line(sol[0].rhs, sol[1].rhs, t, (t,0,6*pi))
```



Przykład rozwiązywania układu liniowego niejednorodnego

Znajdziemy rozwiązanie niejednorodnego układu równań różniczkowych liniowych

$$\begin{cases} x' = x - y + t^2 \\ y' = -x + y + e^t \end{cases}$$

spełniające warunek $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

```
f = Eq(dx, x(t) - y(t)+t**2)
g = Eq(dy, -x(t) + y(t) + exp(t))
dsolve([f, g], [x(t), y(t)], ics={x(0):0, y(0):1})
```

$$x(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{7e^{2t}}{8} + e^t - \frac{1}{8}, \quad y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{7e^{2t}}{8} + \frac{1}{8}$$

Dodatek B

Symboliczne wyznaczanie transformat Laplace'a z wykorzystaniem języka programowania Python oraz biblioteki SymPy

W celu wyznaczenia transformaty Laplace'a $\mathcal{L}$ oraz transformaty odwrotnej $\mathcal{L}^{-1}$ możemy ponownie wykorzystać bibliotekę do obliczeń symbolicznych SymPy.

```
from sympy import *
t, s = symbols('t s')
f = Function("f")
```

Zdefiniujmy funkcje zwracające transformatę Laplace'a

```
def L(f):
    return laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
L(f(t))
```

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$

oraz transformatę odwrotną

```
def invL(f):
  return inverse_laplace_transform(f, s, t)
invL(f(s))
```

$\mathcal{L}_t^{-1}[f(s)](t)$

Dla przykładu, dla funkcji $f(t) = \sin(2t)$ mamy

```
L(sin(2*t))
```

$$\frac{2}{s^2+4}$$

Z kolei, dla $F(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$

```
invL(2/(s**2+4))
```

$\sin(2t)\theta(t)$

Jak widać na powyższym przykładzie, transformatą odwrotną do transformaty funkcji $t \to f(t)$ nie jest funkcja $t \to f(t)$, ale pewna jej modyfikacja $t \to f(t)\theta(t)$. Występująca tu funkcja θ to tzw. funkcja Heaviside'a

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ponieważ transformatę Laplace'a zdefiniowaliśmy dla funkcji określonych na przedziale $[0, +\infty)$, a na nim $f(t) = f(t)\theta(t)$, zatem występująca tu funkcja Heaviside'a nie powinna wzbudzać jakiegokolwiek niepokoju :)

Poniżej wyznaczymy transformaty oraz transformaty odwrotne funkcji z wybranych przykładów z rozdziału 5.

Z przykładu 5.4:

```
L(t*exp(t))
```

$$\frac{1}{(s-1)^2}$$

```
invL(1/(s-1)+1/(s-1)**3)
```

$$\frac{(t^2+2)e^t\theta(t)}{2}$$

Z przykładu 5.5:

```
L(sin(t))
```

$$\frac{1}{s^2+1}$$

```
invL(1/(s**2+1)**2+(s+2)/(s**2+1))
```

$$\frac{(-t\cos(t) + 5\sin(t) + 2\cos(t))\theta(t)}{2}$$

Z przykładu 5.6:

```
-invL((s-2)/(s**3-5*s**2+9*s-5))
```

$$-\frac{(e^t\sin(t) + e^t\cos(t) - 1)e^t\theta(t)}{2}$$

Przy tej okazji warto wspomnieć, że w przypadku wyznaczania transformaty odwrotnej funkcji wymiernych można znacznie skrócić czas obliczeń dokonując najpierw rozkładu funkcji na ułamki proste, a następnie wyznaczając transformaty odwrotne kolejnych składników. W przypadku funkcji z przykładu 5.6 można to zrobić w następujący sposób:

```
(-(s-2)/(s**3-5*s**2+9*s-5)).apart(s)
```

$$-\frac{s-1}{2(s^2-4s+5)} + \frac{1}{2(s-1)}$$

```
-invL((s - 1)/(2*(s**2 - 4*s + 5)))+invL(1/(2*(s - 1)))
```

$$-\frac{(\sin(t) + \cos(t))e^{2t}\theta(t)}{2} + \frac{e^t\theta(t)}{2}$$