Zestaw 1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

1. Przedstaw graficznie dziedziny naturalne podanych funkcji:
   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-2)(y+1)}$, (b) $f(x,y) = \log_{x^2+y^2}(4-x^2-y^2)$, (c) $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x-y)}$.

2. Jakie powierzchnie w układzie O_{xyz} opisane są poniższymi zależnościami?
   (a) $y = x^2 - 2x + 3$, (b) $x^2 + y^2 = 1$, (c) $2x + y - z + 1 = 0$, (d) $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$,
   (e) $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$, (f) $z = 4x^2 + y^2$, (h) $z = 1 - 3x^2 - 3y^2$, (i) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. Dla podanych funkcji wyznacz granice iterowane w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$:
   (a) $f(x,y) = \dfrac{|x| - |y| + x^2 + y^2}{|x| + |y|}$, (b) $f(x,y) = \dfrac{x\sin\dfrac{1}{x} + y}{x+y}$, (c) $f(x,y) = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{y}$,
   (d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$, (e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, (f) $f(x,y) = \dfrac{\sin(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   Co na podstawie wyznaczonych granic iterowanych możemy powiedzieć o granicy podwójnej?

4. Wyznacz lub uzasadnij, że nie istnieją poniższe granice:
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x\sqrt{|y|}}$ (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^y + y)^{1/y}$
   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$ (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2-1}{(y-2)^2}$
   (k) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} \dfrac{\sin(x\sin y)}{xy}$ (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/2)} \dfrac{\cos xy}{(y-\pi/2)^2}$ (m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+2y^2}$

5. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y+x|y|}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}-1} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x+y|}{|x|+|y|} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (f) ☠ $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^4+y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x\cos x + y & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$

6. ☠ Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+ay)(x+by)}{x^2-y^2} & \text{dla } |x| \neq |y| \\ x^2 & \text{dla } |x| = |y| \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1} & \text{dla } x^2+y^2 \geqslant 1 \\ ax+by & \text{dla } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$

Zestaw 2. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

1. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1,-1)$, $\overrightarrow{v} = (-3,-4)$;
   (b) $f(x,y) = x \ln y + y \ln x$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,0)$;
   (c) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$;
   (d) $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,1)$.

2. Przypuśćmy, że funkcja f posiada pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0)$ w punkcie p_0 w kierunku wektora $\overrightarrow{v} \neq 0$. Uzasadnij, że

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + t\overrightarrow{v}) - f(p_0)}{t\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0).$$

   Wykorzystując wykazaną zależność wyznacz ponownie pochodną kierunkową wybranej funkcji z poprzedniego zadania.

3. Zachodzi następujące twierdzenie:

> **Twierdzenie** Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w otoczeniu pewnego punktu $p_0 \in \mathbb{R}^n$, to dla dowolnego wersora $\overrightarrow{v}$ mamy
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(p_0) = \overrightarrow{v} \circ \operatorname{grad} f(p_0),$$
>
> gdzie $\operatorname{grad} f(p_0) = \left(f'_{x_1}(p_0), \ldots, f'_{x_n}(p_0)\right)$ to gradient funkcji f w punkcie p_0, a $\circ$ to naturalny iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

   Wykorzystując powyższy fakt, wyznacz ponownie pochodne kierunkowe z zadania 1.

4. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2+2y}$,
   (b) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$,
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,
   (d) $f(x,y) = xy \operatorname{sgn}(xy)$,
   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
   (f) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

5. (a) Niech $g(x,y) = f(xy, x^2+y^2)$, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Wyznacz

$$y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

(b) Wykaż, że funkcja $g(x,y) = y + f(x^2+y^2)$ spełnia równanie

$$x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x;$$

funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to dowolna funkcja różniczkowalna.

6. Wyznacz macierze Jacobiego oraz różniczki zupełne podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;
(b) $f(x,y) = x^2y + y^2x$, $(x_0, y_0) = (0,1)$;
(c) $f(x) = (x, x^2+x, 2x-1)$, $x_0 = 1$;
(d) $f(x,y,z) = (xy+yz, x^2+y^2)$, $(x_0,y_0,z_0) = (-1,2,1)$.

7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

9. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ w punkcie $(1,1)$.

Zestaw 3. Ekstrema lokalne, warunkowe, globalne

1. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:
   (a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$;
   (b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
   (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
   (d) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 1$;
   (e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;
   (f) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$;
   (g) $f(x,y,z) = 2x^2/y + y^2/z - 4x + 2z^2$;
   (h) $f(x,y,z) = x + y + z + 16/xyz$.
2. Wyznacz ekstrema warunkowe podanych funkcji przy zadanych warunkach:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2, \quad 2x^2 + y^2 = 4$;
   (b) $f(x,y) = x + y, \quad e^{x+y} - xy - 1 = 0$;
   (c) $f(x,y) = y - \ln x, \quad x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$;
   (d) $f(x,y) = x + 2y, \quad x^2 + y^2 = 5$;
   (e) $f(x,y,z) = x + y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
   (f) $f(x,y,z) = xyz, \quad x + y + z = 1$;
   (g) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad xyz = 1$;
   (h) $f(x_1,\ldots,x_n) = 2\ln|x_1 \cdot \ldots \cdot x_n|, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$;
   (i) $f(x_1,\ldots,x_n) = 2(x_1^4 + \ldots + x_n^4), \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.
3. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w podanym obszarze:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leqslant 2$;
   (b) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójkącie ograniczonym osiami O_x, O_y oraz prostą $x + y = 2\pi$;
   (c) $f(x,y) = xy$, $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$;
   (d) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ w trójkącie domkniętym o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$;
   (e) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$;
   (f) $f(x,y,z) = x - 2y + 3z$, $0 \leqslant z \leqslant 2 - x^2 - y^2$.

4. Niech
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \ni x \to x^T A x \in \mathbb{R}.$$
Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji φ w zbiorze $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Porównaj otrzymane wyniki z wartościami własnymi macierzy A.

5. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.

6. Oblicz odległość punktu $A = (0, 1, 0)$ od powierzchni o równaniu $y = xz$.

7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:
   (a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$; (b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x+2)(y-1)}$.

8. Wyznacz te wartości parametrów $a \in [-3, 3]$, $b \in [-1, 1]$ dla których wykres funkcji
$$f : [-1, 1] \ni x \to 5x^3 - ax - b \in \mathbb{R}$$
obrócony wokół osi O_x ogranicza bryłę o najmniejszej objętości.

9. Wyznacz ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej przez równanie
   (a) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;
   (b) $x^5 + y^4 = 20xy^2$;
   (c) $x^2 e^y - y^4 + 1 = 0$;
   (d) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.

Zestaw 4. Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadaj zbieżność punktową oraz jednostajną ciągów funkcyjnych $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, \quad x \geqslant 0;$ (b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^\alpha x^2}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha \in \{2,4\};$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{2}{1+x^n}, \quad x \geqslant 0;$ (d) $f_n(x) = \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^{-x}+n^x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (e) $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{x+n}, \quad x \geqslant 0;$ (f) $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2x^2}, \quad x \in [0,1];$

   (g) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}, \quad x \in [0,1];$ (h) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}, \quad x \in [0,+\infty).$

2. Zbadaj zbieżność punktową, bezwzględną oraz jednostajną[1] podanych szeregów funkcyjnych:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{kx}{1+k^6x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \sin\dfrac{x}{k}, \quad x \in [-1,1];$

   (c) ☠ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1,1);$ (d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^k \ln^k x}{k!}, \quad x \in (0,1];$

   (e) ☠ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{x^2+k}, \quad x \in \mathbb{R};$ (f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. Wyznacz zbiory zbieżności podanych szeregów funkcyjnych:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(6-3x)^n}{3^n+2^n},$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}\,(x+1)^n,$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}\,(x+2)^n,$ (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n\ln^2 n},$

   (e) ☠ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!x^n}{n^n},$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2-3)^n}{n},$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n},$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x|x|+3)^n}{2^n\sqrt{n}}.$

4. Wyznacz promień i zbiór zbieżności danego szeregu oraz oblicz jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego zbioru:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-2)^n,$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+3)4^n},$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n+3}{5^n}x^{2n},$ (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n x^{3n}}{n+1},$

   (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(x+1)^n}{6^n},$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)},$ (g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+1}\big(x-\dfrac{1}{2}\big)^n.$

[1] W zadaniach oznaczonych symbolem ☠ pojawiają się pewne trudności jedynie przy badaniu zbieżności jednostajnej.

5. Uzasadnij poniższe równości:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, dla $|x|<1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, dla $|x|<1$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$, dla $|x|<1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Oblicz sumy podanych szeregów liczbowych:

   t (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$;

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)e^n}$.

7. Funkcję f przedstaw jako sumę szeregu potęgowego o środku w punkcie x_0, oblicz promień zbieżności otrzymanego szeregu oraz wyznacz wartość $f^{(100)}(x_0)$:

   (a) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, $x_0 = 0$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$, $x_0 = -1$;

   (c) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$; (d) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$;

   (e) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}$, $x_0 = -1$; (f) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi/2$;

   (g) $f(x) = \ln(x^2+2x+3)$, $x_0 = -1$; (h) $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$, $x_0 = 0$.

Zestaw 5. Szeregi Fouriera

1. Wyznacz szeregi Fouriera podanych funkcji i narysuj wykresy sum szeregów dla:

   (a) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-2, 2]$; (b) $f(x) = |x| + 1, \quad x \in [-2, 2]$;

   (c) $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$; (d) $f(x) = |\sin x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$;

   (e) $f(x) = |x + 2|, \quad x \in [-3, 1]$; (f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$.

   Wskaż punkty, w których szeregi te są zbieżne do funkcji f.

2. Dla funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ znajdź jej szereg Fouriera; do jakiej funkcji ten szereg jest zbieżny punktowo?

3. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, a następnie oblicz sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4. Podane funkcje rozwiń w szereg sinusów:

   (a) $f(x) = 1 - |x - 1|, \quad x \in [0, 2]$; (b) $f(x) = e^x - 1, \quad x \in (0, \pi)$;

   (c) $f(x) = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$; (d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$.

5. Podane funkcje rozwiń w szereg cosinusów:

   (a) $f(x) = 1 - |x - 1|, \quad x \in [0, 2]$; (b) $f(x) = \cos^2 x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

   (c) $f(x) = \sin x, \quad x \in (0, \pi)$; (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$.

6. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = x(\pi - x)$ dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$ oraz naszkicuj wykres sumy tego szeregu. Następnie korzystając z tego rozwinięcia znajdź sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

7. Rozwiń w szereg cosinusów funkcję $f(x) = \pi^2 - x^2$ dla $x \in (0, \pi)$ oraz naszkicuj wykres sumy tego szeregu. Następnie korzystając z tego rozwinięcia znajdź sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

8. Wykaż, że dla $x \in (0, \pi)$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2).$$

9. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ dla $x \in (0, 2\pi)$.

Zestaw 6. Ciała Galois

1. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.
2. Czy zbiór $\{a+b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem całkowitym? A czy jest ciałem?
3. Czy zbiór $\{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest podpierścieniem w $\mathbb{C}$?
4. Znajdź wszystkie dzielniki zera w pierścieniu $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
5. Znajdź wszystkie ideały w pierścieniu: (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, (b) $\mathbb{Z}_7$, (c) $\mathbb{Q}$.
6. Podziel z resztą wielomian $x^7 + x^6 + x^4 + x + 1$ przez $x^3 + x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$.
7. Podziel z resztą wielomian $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$ przez $x^3 + 2x + 2$ w $\mathbb{Z}_3[x]$.
8. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4 + x^3 + 3x - 9$, $b(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$ w $\mathbb{Q}[x]$.
9. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4+x+1$, $b(x) = x^3+x^2+x$ w $\mathbb{Z}_3[x]$, następnie wyznacz wielomiany $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, dla których
$$\mathrm{NWD}(a(x), b(x)) = a(x)p(x) + b(x)q(x).$$
10. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4+2$, $b(x) = x^3+3$ w $\mathbb{Z}_5[x]$, następnie wyznacz wielomiany $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$, dla których
$$\mathrm{NWD}(a(x), b(x)) = a(x)p(x) + b(x)q(x).$$
11. Rozłóż wielomiany na czynniki nierozkładalne we wskazanym pierścieniu:
    (a) $x^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[x]$;
    (b) $x^5 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$.
12. Znajdź nierozkładalny wielomian stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_5$.
13. Znajdź nierozkładalny wielomian stopnia 3 nad $\mathbb{Z}_7$.
14. Czy wielomian $4x^3 + 3x^2 + x + 1$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$?
15. Które z następujących pierścieni sa ciałami? (a) $\mathbb{Z}_6/(3)$, (b) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + 1)$, (c) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$.

16. Oblicz sumę i iloczyn danych elementów we wskazanym pierścieniu:
    (a) $3x + 4$ oraz $5x - 2$ w $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 7)$;
    (b) $x^2 + 1$ oraz $x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.
17. Wykaż, że $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 1)$ jest 27-elementowym ciałem i znajdź w nim odwrotność elementu x^2 stosując algorytm Euklidesa.
18. Skonstruuj ciało $GF(9)$ i oblicz w nim sumę oraz iloczyn wybranych dwóch wielomianów stopnia 1.
19. Skonstruuj ciało $GF(8)$ i oblicz w nim sumę oraz iloczyn wybranych dwóch wielomianów stopnia 2.
20. Podaj rząd i charakterystykę ciała $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)$, a także stopień rozszerzenia $[\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2) : \mathbb{Z}_3]$.
21. Jaka jest charakterystyka ciała $GF(32)$?
    Mamy $GF(32) \cong \mathbb{Z}_2(\alpha)$, gdzie $\alpha^5 + \alpha^2 + 1 = 0$. Znajdź element odwrotny do α w tym ciele.

Zestaw 7. Krzywe eliptyczne

1. Punkty $P = (-3, 9)$ i $Q = (-2, 8)$ leżą na krzywej eliptycznej $y^2 = x^3 - 36x$. Znajdź punkty $P + Q$ oraz $2P$. Wyliczenia zinterpretuj graficznie.
2. Każdy z zadanych punktów na krzywej eliptycznej nad Q ma skończony rząd. Znajdź ten rząd.
    (a) $P = (0, 16)$ na krzywej $y^2 = x^3 + 256$,
    (b) $Q = (1/2, 1/2)$ na krzywej $y^2 = x^3 + x/4$.
3. Wypisz wszystkie punkty krzywej eliptycznej $y^2 = x^3 - 2 \pmod 7$. Oblicz $(3, 2) + (6, 5)$ oraz $2 \cdot (3, 2)$.
4. Wypisz wszystkie punkty krzywej eliptycznej $y^2 = x^3 + x + 6 \pmod{11}$. Wskaż jej generator. Z jaką grupą rozważana krzywa eliptyczna jest izomorficzna?

Karta wzorów

Trygonometria

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}+c, \quad \int \frac{1}{x^2-k^2}dx = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{k}+c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$

Szeregi funkcyjne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-1,1]; \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ x\in(-1,1),\ \alpha\in\mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\ n=0,1,2,\ldots \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\ n=1,2,3,\ldots$$