Zestaw 1. Liczby zespolone

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z+2| < 4\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = |z-1|\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(iz-1) \leqslant 2\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2)\,\mathrm{Im}(z^2) < 0\},$$
$$E = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z+iz) = \pi\}, \qquad F = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \arg(z^3) < 3\pi/2\}.$$

2. Wykaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

3. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone

$$\text{(a)}\ -3+3i, \qquad \text{(b)}\ \frac{\sqrt{3}-i}{-1-i}, \qquad \text{(c)}\ \sin\alpha + i\cos\alpha, \qquad \text{(d)}\ 1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi.$$

4. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb

$$\text{(a)}\ \left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}, \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{i-1}\right)^{12}, \qquad \text{(c)}\ \left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{6}, \qquad \text{(d)}\ \left(\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}\right)^{14}.$$

5. Podane liczby zapisz w postaci trygonometrycznej ($n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)}\ -(\cos x + i\sin x)^n, \qquad \text{(b)}\ (\sin x + i\cos x)^n, \qquad \text{(c)}\ (\sin x - i\cos x)^n, \qquad \text{(d)}\ (\cos x + i\cos x)^n.$$

6. Wyznacz zbiory

$$\text{(a)}\ \sqrt{1-\sqrt{3}i}, \qquad \text{(b)}\ \sqrt[3]{-64}, \qquad \text{(c)}\ \sqrt[4]{(2-i)^8}, \qquad \text{(d)}\ \sqrt{3+4i}.$$

7. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. W zbiorze liczb zespolonych równanie $z^n = 1$ posiada n różnych rozwiązań $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Wyznacz:
   (a) $w_1 = \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$;
   (b) $w_2 = \varepsilon_0 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}$;
   (c) $w_3 = (i+\varepsilon_0)\cdots(i+\varepsilon_{n-1})$.

8. Niech $\{z_0, z_1, \ldots, z_9\} = \sqrt[10]{\cos 1 + i\sin 1}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{|z_0| + 2|z_1| + 3|z_2| + 4|z_3| + 5|z_4|}{z_5^{20} + 2z_6^{20} + 3z_7^{20} + 4z_8^{20} + 5z_9^{20}} \cdot (-\sin 2 + i\cos 2).$$

9. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0 = \sqrt{3} + i$. Wyznacz pozostałe jego wierzchołki wiedząc, że środek leży w punkcie: (a) $s_0 = 0$; (b) $s_0 = 2\sqrt{3} + i$.

10. ☠ Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n$ nie występują dwa identyczne wyrazy.

11. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $W(z) = z^3 - (2+3i)^9$.

12. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^5 + z^4 + (i-1)z + i - 1 = 0$, (b) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$,

    (c) $(z^2 + 1 + i)^4 + (1+2i)^4 = 0$, (d) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

13. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$W(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2\,,$$

    którego podwójnym pierwiastkiem jest $z_0 = i$. Następnie przedstaw wielomian W w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych możliwie niskich stopni.

14. Liczba $z_0 = 5 + 2i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

$$W(z) = (z^3 - 11z^2 + 39z - 29)(z^4 - (2-i)^{12});$$

    wyznacz pozostałe jego pierwiastki oraz wybierz z nich te, które leżą w drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej.

15. Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(z) = -z^3 + 3z^2 + 1$. Znajdź wartość wyrażenia

$$w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3).$$

16. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(z) = -z^4 + (1+i)\,z^3 + iz + 1.$$

    Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\sum_{k=1}^{4} |\lambda + z_k|^2 < \sum_{k=1}^{4} \left|\overline{\lambda} + z_k\right|^2.$$

17. ☠ Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$w(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2n};$$

    następnie przedstaw go jako iloczyn rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

18. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^7 = \bar{z}(1-i)$, (b) $\overline{\bar{z}z^4} = z|z|^2$, (c) $\bar{z}z^4 = |z|^2\bar{z}^3$, (d) $|z|^2\bar{z} = -iz^2$.

Zestaw 2. Elementy teorii liczb

1. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznacz największe wspólne dzielniki $\mathrm{NWD}(a,b)$ liczb a,b oraz przedstaw je jako kombinacje całkowitoliczbowe, tj. $\mathrm{NWD}(a,b)=\alpha\cdot a+\beta\cdot b$, gdzie $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. Wskaż pary liczb względnie pierwszych.

   (a) $a=252, b=231$, (b) $a=924, b=1105$, (c) $a=2891, b=1589$, (d) $a=645, b=363$.

2. Uzasadnij, że istnieją liczby całkowite x,y spełniające poniższe równanie

   $$412x+119y=1;$$

   wyznacz przykładową parę takich liczb.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ liczby $5n+3$ oraz $7n+4$ są względnie pierwsze.

4. Uzasadnij, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu dziesiętnym jest liczbą podzielną przez 3. Sformułuj i uzasadnij cechy podzielności liczby naturalnej przez 9 oraz przez 11.

5. Klasyczna cecha podzielności liczby naturalnej przez 7 jest mało wygodna do sprawdzania: liczba jest podzielna przez 7, jeśli różnica między liczbą składającą się z trzech ostatnich jej cyfr, a liczbą wyrażoną pozostałymi jej cyframi (lub odwrotnie) dzieli się przez 7.

   Wykaż, że liczba naturalna jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu ósemkowym jest liczbą podzielną przez 7. Wykorzystując to kryterium sprawdź podzielność przez 7 liczby 812.

6. Rozwiąż kongruencje:

   (a) $7x=3 \pmod{12}$, (b) $10x=13 \pmod{23}$, (c) $6x=9 \pmod{45}$, (d) $12x=2 \pmod{8}$.

7. Rozwiąż układ kongruencji:

   (a) $\begin{cases} x=4 \pmod 6 \\ x=5 \pmod{35} \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x=4 \pmod 5 \\ x=3 \pmod 7 \\ x=2 \pmod 9 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 3x=2 \pmod 4 \\ 4x=1 \pmod 5 \\ x=1 \pmod 3 \end{cases}$.

8. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez $4, 13$ oraz 7 daje odpowiednio reszty $1, 2$ oraz 1.

9. Jeśli podzielić czekoladę na cztery równe części, zostaną dwie kostki; przy podziale na pięć części pozostaną cztery kostki, a przy podziale na trzy części pozostanie jedna kostka. Ile kostek pozostanie przy podziale czekolady na dziesięć równych części?

Zestaw 3. Grupy, pierścienie, ciała

1. Sprawdź, czy poniższe pary tworzą grupę abelową:
   (a) zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $x \circ y = (-1)^x\, y + (-1)^y\, x$;
   (b) zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ z działaniem $a \circ b = a^{\ln b}$;
   (c) zbiór $\mathbb{C}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$;
   (d) zbiór $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$.
2. Wyznacz rząd grupy: (a) $\mathbb{Z}^*_{120}$, (b) $\mathbb{Z}^*_{93}$, (c) $\mathbb{Z}^*_{200}$.
3. Wyznacz element odwrotny dla elementu
   (a) 4 w $\mathbb{Z}^*_7$, (b) 35 w $\mathbb{Z}^*_{101}$, (c) 11 w $\mathbb{Z}^*_{31}$, (d) 24 w $\mathbb{Z}^*_{29}$, (e) 11 w $\mathbb{Z}^*_{120}$.
4. Znajdź wszystkie podgrupy grupy: (a) $\mathbb{Z}_6$, (b) $\mathbb{Z}^*_6$, (c) $\mathbb{Z}^*_8$.
5. Wypisz wszystkie elementy grupy i podaj ich rzędy: (a) $\mathbb{Z}^*_5$, (b) $\mathbb{Z}^*_9$, (c) $\mathbb{Z}^*_{15}$.
6. Sprawdź, czy grupy z poprzedniego zadania są cykliczne oraz wyznacz wszystkie generatory tych z nich, które są cykliczne.
7. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $n \circ k = n + k + 1$ tworzy grupę cykliczną; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz wszystkie jej generatory.
8. Wyznacz trzy ostatnie cyfry liczby: (a) 17^{2002}, (b) $7^{4004} - 3^{4004}$.
9. Korzystając z twierdzenia Eulera oblicz: $13^{26} \pmod{20}$, $7^{74} \pmod{30}$, $5^{40} \pmod{18}$.
10. Korzystając z małego twierdzenia Fermata oblicz: $15^{54} \pmod{53}$, $15^{16} \pmod{17}$.
11. Sprawdź, która z poniższych struktur algebraicznych jest pierścieniem, pierścieniem przemienny, pierścieniem z jednością, pierścieniem całkowitym, ciałem, ciałem przemiennym:
    (a) zbiór wielomianów rzeczywistych z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów;
    (b) zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych;
    (c) $(A, \star, \bullet)$, gdzie $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 1\}$ oraz $a \star b = \min(a, b)$, $a \bullet b = \max(a, b)$;
    (d) $(\mathbb{R}[x]_1, +, \circ)$, gdzie $+$ oraz $\circ$ oznaczają dodawanie oraz składanie funkcji.
12. Wykaż, że w dowolnym pierścieniu z jednością dzielnikami zera mogą być jedynie te elementy, które nie posiadają elementu odwrotnego.
13. Wykaż, że jeżeli działanie wewnętrzne posiadające element neutralny jest łączne, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

14. W zbiorze $G = \{a, b, c\}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone poniższą tabelą:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

Wykorzystując poprzednie zadanie wykaż, że działanie to nie jest łączne.

15. Udowodnij, że
    (a) zbiór $A = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania liczb zespolonych tworzy grupę;
    (b) zbiór $B = \{2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem mnożenia liczb tworzy grupę;
    (c) grupy A i B są izomorficzne.

16. Udowodnij, że
    (a) zbiór $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb jest pierścieniem;
    (b) odwzorowanie $f : A \ni a + b\sqrt{3} \longrightarrow a - b\sqrt{3} \in A$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

17. Niech $A = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ będzie pierwiastkiem algebraicznym stopnia czwartego z jedności, tj. $\varepsilon_k^4 = 1$ dla $k = 0, 1, 2, 3$.
    (a) Wykaż, że zbiór A z działaniem mnożenia liczb zespolonych tworzy grupę. Sprawdź, czy jest to grupa cykliczna, a w przypadku pozytywnej odpowiedzi wskaż wszystkie jej generatory.
    (b) Wyznacz wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ w grupę $(A, \cdot)$. Czy któryś z tych homomorfizmów jest izomorfizmem?

18. Uzasadnij, że każda grupa cykliczna rzędu n jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_n, +)$.

19. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?
    (a) Każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.
    (b) Wszystkie grupy cykliczne tego samego rzędu $n \in \mathbb{N}$ są izomorficzne.
    (c) Grupa cykliczna rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z grupą cykliczną rzędu $m \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$.
    (d) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest homomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.
    (e) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest izomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.

20. Wykaż, że odwzorowanie h jest homomorfizmem grupy G_1 w grupę G_2; następnie sprawdź, czy jest ono izomorfizmem:
    (a) $h(z) = |z|$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
    (b) $h(n) = n - 3$, $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $m \circ n = m + n + 3$;
    (c) $h(x) = \ln x$, $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
    (d) $h(z) = z^5$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$;
    (e) $h(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx$, $G_1 = (\mathcal{C}_{[0,1]}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
    (f) $h(A) = (\det A)^2$, $G_1 = (M^*_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, gdzie $M^*_{n\times n}(\mathbb{R})$ to zbiór nieosobliwych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$.

21. ☠ Znajdź wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ w grupę $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Zestaw 4. Przestrzenie wektorowe

1. Sprawdź, czy podana struktura jest przestrzenią wektorową:

   (a) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \ldots, x_n)$

   $$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, x_2 \ldots, x_n);$$

   (b) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \ldots, x_n)$

   $$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, 0 \ldots, 0);$$

   (c) $(\mathcal{W}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w(-1) + w(1) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez skalar;

   (d) $(\mathcal{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych;

   (e) $(\mathcal{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych

2. Niech $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar. Które ze zbiorów tworzą podprzestrzeń wektorową tej przestrzeni?

   (a) $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$– funkcja parzysta$\}$;

   (b) $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) + f(2) = 0\}$;

   (c) $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\}$.

3. Zbadaj liniową niezależność wektorów:

   (a) $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, -5, 1), v_3 = (3, 1, 0)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

   (b) $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, -2, 1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

   (c) $v_1(x) = x, v_2(x) = \sin x, v_3(x) = \cos x$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$;

   (d) $v_1(x) = e^x, v_2(x) = e^{2x}, v_3(x) = e^{2(x-1)}$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

4. Wyznacz wymiary oraz przykładowe bazy przestrzeni wektorowych z zadania 1.

5. Wyznacz bazę przestrzeni wektorowej (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):

   (a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}$;

   (b) $\left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0, 2x - 3z + 2w = 0\right\}$;

   (c) $\left\{w \in \mathbb{R}[x]_2 : w(1) - w'(2) = 0\right\}$.

   (d) $\mathrm{lin}\{(1, 2, 1, 0), (-1, -2, 0, 1), (3, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$; podaj współrzędne wektorów $u = (5, 4, 2, 1)$ oraz $v = (3, 0, 1, -2)$ względem znalezionej bazy.

6. Dane są dwa układy wektorów:

$$B_1 = \big((1,i,1+i),\ (i,-1,2-i),\ (0,0,3)\big) \quad \text{oraz} \quad B_2 = \big((2i,1,0),\ (2,-i,1),\ (0,1+i,1-i)\big).$$

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$. Znajdź współrzędne wektora $(1,0,1)$ w znalezionej bazie.

7. Sprawdź, czy zachodzi równość podprzestrzeni w $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\operatorname{lin}\{(1,3,-5,2),(2,-4,1,-1)\} = \operatorname{lin}\{(1,-7,6,-3),(-5,-5,14,-5)\}.$$

8. Dana jest podprzestrzeń wektorowa $\operatorname{lin}\{(1,2+i,i,0),(-1-i,-2,0,1)\}$ w $\mathbb{C}^4(\mathbb{C})$. Jaki jest wymiar i przykładowa baza tej podprzestrzeni w $\mathbb{C}^4(\mathbb{R})$?

9. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$.

   (a) Wykaż, że układ $B_2 = (1, x-2, (x-2)^2)$ stanowi bazę w $\mathbb{R}[x]_2$.

   (b) Podaj współrzędne wielomianu $p(x) = 2x^2 + 3$ względem baz B_1 oraz B_2.

   (c) Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 :\ p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń $\mathbb{R}[x]_2$? Jeżeli tak, wyznacz jej przykładową bazę i wymiar.

10. Niech $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x]_n$ będą dowolnymi wielomianami takimi, że $\deg f_k = k$ $(k = 0, \ldots, n)$, $f_0 \not\equiv 0$. Uzasadnij, że wielomiany $f_0, f_1, \ldots, f_n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

11. ☠ Dla dowolnych, ustalonych, parami różnych liczb $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definiujemy wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$,

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

   (a) Uzasadnij, że $\deg \varphi_k = n$, dla $k = 0, \ldots, n$.

   (b) Wykaż, że wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ stanowią bazę przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_n$.

   (c) Wyznacz współrzędne wielomianu $v(x) = x^n$ w bazie $B = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$;

   (d) dla zadanej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wyznacz wielomian $\varphi \in \mathbb{R}[x]_n$ interpolujący funkcję f w punktach węzłowych $x_0, \ldots, x_n$, tj. spełniający warunek $\varphi(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 0, \ldots, n$.

12. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B:

   (a) $v = (1,2,1); B = \big((0,1,1),(-1,2,1),(-1,0,1)\big)$;

   (b) $v = (1,2,1); B = \big((2,-1,-1),(-1,4,-3),(-3,2,0)\big)$;

   (c) $v(x) = x^2 - 1; B = \big(1, x-2, (x-2)(x-3)\big)$;

   (d) $v(x) = x^2; B = \big(x^2 - x, x^2 + x, x^2 - 1\big)$.

13. Wektory v_1, v_2, v_3 są bazą pewnej przestrzeni wektorowej. Który z poniższych zbiorów również jest jej bazą?

   (a) $v_1 + 2v_2 + v_3,\ v_2 - v_3,\ v_1 + 3v_3$;

   (b) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_2 + v_3,\ v_3$;

   (c) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - v_2 + v_3,\ v_1 + v_2 - v_3$.

14. ☠ Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ posiadają nieskończenie wiele elementów, jednak nie wszystkie te zbiory są równoliczne. Można pokazać, że

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \mathfrak{c};$$

symbol # oznacza liczbę elementów zbioru.

Rozważmy przestrzeń wektorową $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$; działania to naturalne działania dodawania oraz mnożenia liczb. Uzasadnij, że $\dim(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot) > \aleph_0$. Nieprzeliczalna baza przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ to tzw. *baza Hamela*.

15. Wykaż liniową niezależność wektorów w przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$:

    (a) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}$;
    (b) $v_1 = \sqrt{2}, v_2 = \sqrt{3}, v_3 = \sqrt{6}$;
    (c) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}, v_3 = \pi$.[1]

16. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

    (a) Z dowolnej bazy przestrzeni wektorowej można wybrać bazę dowolnej jej podprzestrzeni wektorowej.
    (b) Bazę dowolnej podprzestrzeni wektorowej można uzupełnić do bazy całej przestrzeni.
    (c) Z dowolnego zbioru wektorów generujących całą przestrzeń liniową można wybrać jej bazę.
    (d) Z każdego zbioru wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej można wybrać jej bazę.
    (e) Każda rzeczywista przestrzeń wektorowa posiada nieskończenie wiele baz.

[1] Liczbę rzeczywistą będącą miejscem zerowym wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy *liczbą algebraiczną*. Dowolna liczba wymierna p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, jako miejsce zerowe wielomianu o współczynnikach całkowitych $x \to qx - p$, jest liczbą algebraiczną. Podobnie, liczba $\sqrt{2}$, jako miejsce zerowe wielomianu $x \to x^2 - 2$, jest liczbą algebraiczną. Można wykazać, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb jest ciałem. Przykładami liczb niealgebraicznych (czyli *liczb przestępnych*) są π oraz e. Fakt ten może być przydatny w rozwiązaniu zadania 15(c).

Zestaw 5. Macierze

1. Sprawdź, czy:
   (a) struktura $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), +)$ jest grupą abelową, $+$ to naturalne działanie dodawanie macierzy.
   (b) struktura $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ jest grupą abelową, $\cdot$ to naturalne działanie mnożenia macierzy.
   (c) struktura $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, działania to naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, podaj wymiar tej przestrzeni.

2. Niech $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ będzie ustaloną macierzą. Czy zbiór
   (a) $V_B = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = 0\}$,
   (b) $W_B = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$

   z naturalnymi działaniami dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar jest rzeczywistą przestrzenią liniową? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę przyjmując
   $$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Niech
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Znajdź macierz X spełniającą równanie
   (a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;
   (b) $B^T X = [1\ 1\ 0]^T$.

4. Wyznacz $f(A)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 5x + 3$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Następnie, wykorzystując otrzymaną zależność, znajdź macierz B, dla której $A \cdot B = B \cdot A = I$.

5. ☠ Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ istnieje wielomian rzeczywisty $f \not\equiv 0$, taki że $f(A) = 0$.

6. Rozwiąż macierzowy układ równań
   $$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

7. Sprawdź czy zbiór
   $$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$
   z działaniem mnożenia macierzy jest grupą abelową.

8. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ i & i & 1 \\ 2+i & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};\quad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} i & i & i & i \\ -i & 1-i & -i & -i \\ 1 & 1 & 1+i & 1 \\ -i & -i & -i & 1-i \end{bmatrix}.$$

9. Uzasadnij, że wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n > 1)$ o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.

10. Znajdź możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ spełniającej równanie:

$$\text{(a)}\ A^2 = A^T;\quad \text{(b)}\ A^T - A^{-1} = 0;\quad \text{(c)}\ A^2 + A^{-1} = 0;\quad \text{(d)}\ A^3 - 16A^{-1} = 0;$$

rozważ dwa przypadki: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

11. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych. Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

12. Liczby 1798, 2139, 3255, 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

również dzieli się przez 31.

13. Nie obliczając wyznaczników znajdź rozwiązania podanych równań:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0,\qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Wyznacz macierze odwrotne dla macierzy nieosobliwych z zadania 8.

15. W zbiorze $G = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.

(b) Sprawdź, czy para (G, h) jest grupą.

(c) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

16. Niech A będzie macierzą kwadratową. Wykaż, że jeśli $A^k = 0$ dla pewnego $k \geq 1$, to

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

17. Rozwiąż równanie $AX = B^T$, w którym

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2i-1 & 0 & 2i \\ 0 & 3i & 0 & 2i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

19. Wyznacz rzędy (metodą minorów) następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Obliczając wyznacznik odpowiedniej macierzy sprawdź, czy wektory $u = (2+i, i, 2)$, $v = (1-2i, 1, -2i)$, $w = (0, i, 0)$ są liniowo niezależne w $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}, +, \cdot)$.

21. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

jest: (a) największy; (b) najmniejszy?

22. Sprawdź, dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa.

23. Wyznacz wymiar rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$\operatorname{lin}\{(1,p,p,p), (p,1,p,p), (p,p,1,p), (p,p,p,1)\}$$

w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

Zestaw 6. Układy równań liniowych

1. Metodą Gaussa rozwiąż układy równań:

(a) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 8 \\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 &= 0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5 &= 7 \\ x_1-4x_2+x_3-2x_4-x_5 &= -9 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 &= 2 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 8 \\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 &= 0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5 &= 7 \\ x_1-4x_2+x_3-2x_4-x_5 &= -9 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &= -2 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4 &= 6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4 &= 4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4 &= 2 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3+2x_4 &= 2 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4 &= 3 \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4 &= 1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 5 \\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4 &= 7 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4+2x_6 &= -2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4+x_6 &= 0 \\ -2x_1-x_2-3x_3+3x_4+x_5-2x_6 &= 3 \\ -4x_1-2x_2-x_3-4x_4-3x_5-2x_6 &= -3 \end{cases}$;

(f) $\begin{cases} 2x+y &= -3 \\ 3x+4y &= 1 \\ 5x-y &= 6 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} -3x+6y-3z &= 2 \\ x-2y+z &= -1 \end{cases}$;

(h) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t &= 2 \\ 7x-4y+z+3t &= 5 \\ 5x+7y-4z-6t &= 3 \end{cases}$.

2. Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ 2x+7y-2z &= 0 \\ -x+3y+z &= 0 \end{cases}.$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= k \\ x+y+kz &= k^2 \end{cases};$$

w przypadku, gdy układ jest oznaczony znajdź jego rozwiązanie stosując: (a) wzory Cramera, (b) metodę macierzy odwrotnej.

4. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$; wyznacz rozwiązania dla tych wartości parametru, dla których układ jest nieoznaczony:

(a) $\begin{cases} (5-p)\,x-2y-z &= 1 \\ -2x+(2-p)\,y-2z &= 2 \\ -x-2y+(5-p)\,z &= 1 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} px+y &= 2 \\ 2x-y &= p \\ 2x-y &= 1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x+y+pz &= 2 \\ x+py+z &= -1 \\ px+y+z &= -1 \end{cases}$.

5. Wyznacz te wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których w przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ zachodzi

$$(3, p-4, p-5, p-6) \in \operatorname{lin}\{(-p, 1, p, p), (-p, p, 2, p), (-p, p, p, 3)\}.$$

6. Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

W wybranej bazie podaj współrzędne tych z poniższych wektorów, które należą do tej podprzestrzeni:

$$u = (-2i, i, -2i)\,, \qquad v = (-2i, 4i, -2i)\,, \qquad w = (2-i, -4+2i, 2-i).$$

7. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + (1-a)y - iz &= 0 \\ (1-i)x + (3+i)y - (1+i)z &= 0 \\ ax + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

dla wartości parametru $a \in \mathbb{C}$ będących pierwiastkami wielomianu

$$\varphi(a) = (1+i)a^2 - (4-4i)a - 4 - 4i.$$

Wyznacz te rozwiązania.

8. Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_3$ spełniającego warunki

$$p(-2) = 3, \quad p(-1) = 2, \quad p(1) = 6.$$

Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu p. Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania. Sprawdź, czy wyznaczony wielomian istotnie spełnia pożądane warunki.

9. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + (a-1)\,y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)\,z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zestaw 7. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdź, które z podanych odwzorowań jest liniowe:
   (a) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x-1, y+z)$;
   (b) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x+y, 2x-z, 3x+y, 0)$;
   (c) $\mathcal{L}\colon M_{3\times3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times3}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(A) = A + A^T$;
   (d) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2, \quad (\mathcal{L}p)(x) = xp''(x) + p(0)$;
   (e) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad (\mathcal{L}p)(x) = p(x)p'(x)$.

2. Dla odwzorowań liniowych z poprzedniego zadania wyznacz bazę jądra $\ker \mathcal{L}$ i bazę obrazu $\operatorname{im} \mathcal{L}$ oraz określ, które z nich jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

3. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jest przez warunki
$$f(1,1,1) = (1,4), \quad f(1,-1,1) = (-1,2), \quad f(1,1,0) = (2,2).$$
   (a) Znajdź $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$.
   (b) Podaj rząd odwzorowania f.
   (c) Zbadaj, czy odwzorowanie f jest monomorfizmem.

4. Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech (u_1, u_2, u_3) i (v_1, v_2) będą bazami rzeczywistych przestrzeni wektorowych U i V. Wiedząc że
$$f(u_1) = 2v_1,\ f(u_2) = -v_2,\ f(u_1+u_3) = v_1+v_2,\ f(u_1-u_3) = 3v_1 - v_2,$$
   wyznacz $\ker f$.

5. Wyznacz macierze odwzorowań liniowych z zadania 1. w dowolnie wybranych bazach.

6. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym postaci
$$f(x,y,z,t) = (3x - 2y + z + at, 5x - 8y + 9z + 3t, 2x + y + az - t).$$
   Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ dla jakich wartości parametru a odwzorowanie f jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

7. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L\colon \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$,
$$(Lw)(x) = xw'(x) + pw(-x).$$
   Wyznacz jego macierz w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ, dla jakich wartości parametru p odwzorowanie L jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

8. Dane są następujące odwzorowania liniowe: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z)$ oraz $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) = (y, x, x+y)$.
   (a) Znajdź $\ker f$, $\ker g$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} g$, ich bazy i wymiary.

(b) Podaj macierz złożenia $g \circ f$ w bazie kanonicznej (wykorzystaj macierze odwzorowań f i g) i odczytaj z tej macierzy przepis tego odwzorowania.

9. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i niech $B = (e_1, e_2, e_3)$ będzie jej bazą.
Udowodnij, że $B' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ też jest bazą w V. Wyznacz macierz przejścia $P = P_{B \to B'}$ oraz współrzędne wektora $e_1 - 2e_2 + 3e_3$ w bazie B'.

10. Dane jest odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2y, x + z) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź macierz $M_f(B_1, B_2)$ tego przekształcenia w bazach B_1, B_2:

(a) $B_1 = (\,(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\,)$, $\quad B_2 = (\,(1,0), (0,1)\,)$;
(b) $B_1 = (\,(2,1,0), (1,1,1), (0,0,1)\,)$, $\quad B_2 = (\,(1,1), (0,-1)\,)$.

Jaka zależność łączy macierze uzyskane w powyższych podpunktach?

11. Rozważmy odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy $M_g(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź wartość $g(1, 2, 0)$, jeżeli w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ zadano bazy takie jak w zadaniu poprzednim.

12. Niech $X = \operatorname{lin}\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$. Wyznacz macierz endomorfizmu $L : X \to X$ (w dowolnej bazie przestrzeni X), gdzie

(a) $L(f) = f'$;
(b) $L(f) = f + f''$.

Podaj wymiary obrazu i jądra tego odwzorowania (wykorzystując rząd wyznaczonej macierzy odwzorowania) oraz wyznacz ich bazy. Korzystając z macierzowej reprezentacji odwzorowania L wyznacz wartość $L(f)$, gdzie $f(x) = 3 \sin x(1 - 4 \cos x)$.

13. Rozważmy bazę $B = (v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ oraz endomorfizm f, taki że $f(v_1) = v_2 - v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = v_3 - v_1$.

(a) Wyznacz macierz $M_f(B)$ i na jej podstawie sprawdź, czy f jest izomorfizmem.
(b) Wyznacz bazę B jeżeli wiadomo, że macierz przejścia z bazy kanonicznej B_k do bazy B ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Wyznacz wartość $f(0, 1, 2)$ dwoma sposobami: korzystając z macierzy $M_f(B)$ oraz z macierzy $M_f(B_k)$.

14. Znajdź macierz $M_L(B_1, B_2)$ odwzorowania liniowego $L\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ postaci $(L\,w)(x) = xw(-x)$, gdzie $B_1 = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$, $B_2 = (x^3 + x, x^3 - x, x^2 + 1, x^2 - 1)$. Ponadto

(a) wyznacz wymiar przestrzeni $\ker L$ badając rząd macierzy $M_L(B_1, B_2)$,
(b) wyznacz macierz odwzorowania liniowego L w bazach kanonicznych.

15. Rozważmy rzeczywiste przestrzenie wektorowe U, V, W oraz odwzorowania liniowe $f : U \to V$ i $g : V \to U$. Niech

$$M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz $M_{f \circ g}(B_2, B_2)$ jeśli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3$, $w_2 = -v_1$, $w_3 = -v_2 - v_3$.

16. ☠ Wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz endomorfizmu $L : (x, y, z) \to (x - y, y + z, -z)$ ma postać

$$M_L(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Rozważmy endomorfizm $\Phi_n : \mathbb{R}[x]_n \ni f \to f' \in \mathbb{R}[x]_n$.

    (a) Wyznacz $\ker \Phi_n$, $\operatorname{im} \Phi_n$ oraz bazy tych przestrzeni.

    (b) Wyznacz macierz $M_{\Phi_n}(B)$ odwzorowania Φ_n w bazie $B = (b_0, \ldots, b_n)$, gdzie

    $$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = 1 + x, \quad b_2(x) = 1 + x + x^2, \quad \ldots, \quad b_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n.$$

    (c) Rozważmy bazę $C = (c_0, \ldots, c_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$, gdzie $c_k(x) = x^k$ $(k = 0, \ldots, n)$. Wyznacz macierz przejścia P z bazy B do bazy C oraz macierz P^{-1}.

    (d) Wykorzystując macierzową reprezentację endomorfizmu Φ_3 oblicz $\left(1 + x^2 + 6x^3\right)'$.

18. Rozważmy endomorfizm $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ postaci

$$F : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2a - b + 2c - d & b + 2c - d \\ 2c & b - 2c + 3d \end{bmatrix}.$$

    (a) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu F; wyznacz bazy tych przestrzeni.

    (b) W wybranej bazie B przestrzeni $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ wyznacz macierz $M_F(B)$ endomorfizmu F.

    (c) Sprawdź, czy F jest izomorfizmem; w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznacz odwzorowanie odwrotne F^{-1}.

Zestaw 8. Wartości i wektory własne, diagonalizowalność

1. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne poniższych endomorfizmów. Czy te endomorfizmy są diagonalizowalne?

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x - y + z, x - y - z, 2x - 2y) \in \mathbb{R}^3$;

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + y + z, 2y + z, 2z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $f : \mathbb{R}[x]_2 \ni ax^2 + bx + c \to (5a + 9c)x^2 - (3a + 4b + 3c)x + 3a - c \in \mathbb{R}[x]_2$;

   (d) $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3a + c - d & 2a + 2b - 2d \\ 2c & a + d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Przypuśćmy, że macierz z zadania 1(d) jest macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ w bazie $(1, x, x^2)$. Wyznacz wartości własne endomorfizmu f oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne; wskaż bazę B złożoną z jego wektorów własnych oraz wyznacz macierz $M_f(B)$.

4. Rozważmy endomorfizm $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ określony przez warunki:

$$f(x) = -x, \quad f(x^2 + 1) = 2x^2 + 2, \quad f(2x + 1) = 0.$$

   Wyznacz jego wartości własne oraz bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, w której macierz endomorfizmu f jest diagonalna. Wykorzystując tę macierz wyznacz wielomian $f^k(1 + x + x^2)$ dla $k \in \mathbb{N}$; f^k oznacza k-krotne złożenie endomorfizmu f.

5. Sprawdź, czy macierz jest diagonalizowalna; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierze diagonalną D oraz nieosobliwą P, takie że $A = PDP^{-1}$.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Wykorzystując otrzymany rozkład macierzy A wyznacz macierz A^{100}.

6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Znajdź te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz A jest diagonalizowalna. Dla wyznaczonych wartości a znajdź taką macierz nieosobliwą P, dla której macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna.

7. Niech
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v jest wektorem własnym macierzy A. Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

8. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ określony przez warunki:
$$f(x^3) = -x^3, \quad f(x^2) = x^3 - 1, \quad f(x) = -x, \quad f(1) = 2x^3 + 2x^2 - 3.$$
Wykaż, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Następnie wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, w której macierz $M_f(B)$ jest diagonalna. Wypisz tę macierz i korzystając z niej znajdź $f^{10}(x^3 + x)$.

9. Rozważmy przestrzeń wektorową U o bazie $B = (\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ oraz endomorfizm $L : U \to U$ spełniający warunki: $L(\sin x - \cos x) = \cos x - \sin x$, $L(\sin x + \cos x) = \cos x + \sin x$, $L(\sin 2x - \cos 2x) = \cos 2x - \sin 2x$, $L(\cos 2x) = \cos 2x$. Oblicz $L^{1000}(\sin x \cos x)$ oraz $L^{-1}(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

10. Wyznacz jawną postać ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określonego rekurencyjnie:
$$\begin{cases} x_{n+1} = (1+i)x_n - ix_{n-1} \\ x_0 = 0,\ x_1 = 1 \end{cases}.$$

Zestaw 9. Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

1. Wyznacz miarę kąta ostrego utworzonego przez wektory $[3, \sqrt{2}, 1]$ oraz $[-1, -\sqrt{2}, 0]$.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których kąt między wektorami $[3, \sqrt{2}, a]$ oraz $[\sqrt{2}, -1, 0]$ ma miarę $\pi/6$.
3. Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$ jest ostrokątny. Oblicz jego pole oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A.
4. Sprawdź, czy punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D(2, -3, 1)$ leżą w jednej płaszczyźnie.
5. Oblicz objętość
   (a) czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D = (0, 0, 1)$;
   (b) równoległościanu rozpiętego przez wektory $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-2, -1, 3)$.
6. Napisz równanie parametryczne i równanie zwyczajne prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 3y + z - 17 = 0 \end{cases}.$$
7. Wyznacz równanie wektorowe i równanie krawędziowe prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = \ 5 - t \\ z = \ 2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$
8. Wyznacz równanie parametryczne prostej prostopadłej do płaszczyzny $\pi\colon 3x - y + 2z + 3 = 0$ i przecinającej ją w punkcie $(0, 3, 0)$.
9. Wyznacz równanie płaszczyzny π przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz prostopadłej do prostej l,
$$l\colon \begin{cases} x - 2y + z - 20 = 0 \\ -x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$
10. Wyznacz równanie parametryczne i równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$.
11. Wyznacz równanie płaszczyzny zawierającej proste
$$l_1 : x = y = z \qquad \text{oraz} \qquad l_2 : 2x = y = -z.$$
12. Wyznacz równanie płaszczyzny, której punkt $(1, 2, -1)$ jest rzutem prostokątnym punktu $(0, 0, 0)$.

13. Znajdź punkt A symetryczny do punktu przecięcia się prostych l_1 oraz l_2 względem płaszczyny π, jeżeli

$$l_1: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}; \qquad l_2: \quad \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

oraz $\pi: x+y+z=-2$.

14. Zbadaj wzajemne położenie prostych l i k:

(a) $l: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+3t \\ z = -3+2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad k: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-4t \\ z = 2+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R};$

(b) $l: \begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}, \qquad k: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

15. Zbadaj wzajemne położenie prostej k i płaszczyzny π

$$\pi: 3x-y+z-17=0, \qquad k: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \\ z = 2-3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

16. Zbadaj wzajemne położenie płaszczyzn

$$\pi_1: -3x+y-z-3=0, \qquad \pi_2: 6x-2y+2z-5=0.$$

17. Oblicz odległość

(a) punktu $P=(0,0,0)$ od prostej $l: \ \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$;

(b) punktu $P=(0,-1,0)$ od płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $(0,1,2)$, $(1,1,0)$ $(-1,0,1)$;

(c) między płaszczyznami $\pi_1: -3x+y-z-3=0$ oraz $\pi_2: 6x-2y+2z-4=0$.

(d) między prostymi

$$l: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -3-3t \\ z = 2-2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad k: \begin{cases} x = 2t \\ y = 6t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R};$$

(e) między prostymi

$$l: \begin{cases} x = 1 \\ x+z=0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad k: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases};$$

(f) prostej $k: x=-1+t, y=1-2t, z=1-t, \ t \in \mathbb{R}$ od płaszczyzny $\pi: x+y-z=1$.

18. Dana jest płaszczyzna $\pi: x+2y+3z-6=0$ oraz prosta $l: x=y=z$. Wyznacz równania parametryczne prostej l oraz prostej będącej jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę π.