Wstęp do analizy numerycznej

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Matematyka

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2025

Zestaw 1. Arytmetyka zmiennopozycyjna

1. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieją dokładnie jedna liczba całkowita c oraz dokładnie jedna liczba $m \in [\beta^{-1}, 1)$, gdzie $\beta \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, takie że

$$x = \beta^c m.$$

2. Niech $\beta \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą parzystą oraz niech $m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}\beta^{-k}$, gdzie $e_{-1} \neq 0$ oraz $e_{-i} \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Rozważmy, dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$, funkcję

$$\mathrm{rd}_t : m \to m_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k}, & \text{gdy } 0 \leqslant e_{-(t+1)} \leqslant \frac{\beta}{2} - 1 \\ \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k} + \beta^{-t}, & \text{gdy } \frac{\beta}{2} \leqslant e_{-(t+1)} \leqslant \beta - 1 \end{cases}.$$

   Uzasadnij, że $|\mathrm{rd}_t(m) - m| \leqslant \frac{1}{2}\beta^{-t}$.

3. Sprawdź równości:

   (a) $\mathrm{fl}(a(b+c)) = \mathrm{fl}(ab + ac)$; (b) $\mathrm{fl}\,(a^2 - b^2) = \mathrm{fl}\,((a-b)\,(a+b))$.

4. Uzasadnij, że relacja równości w sensie jeden jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[1, \infty)$.

5. Sprawdź, czy zachodzą poniższe równości w sensie jeden ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):

   (a) $a2^{-t} + b2^{-2t} =_1 a2^{-t}$; (b) $\dfrac{a2^{-t}}{1 + b2^{-t}} =_1 a2^{-t}$; (c) $a2^{-2t} =_1 0$.

6. Przypuśćmy, że $a_1 =_1 b_1$ oraz $a_2 =_1 b_2$. Sprawdź, czy zachodzą poniższe równości w sensie jeden:

   (a) $a_1 a_2 =_1 b_1 b_2$,
   (b) $a_1 + a_2 =_1 b_1 + b_2$,
   (c) $|a_1| + |a_2| = |b_1| + |b_2|$.

7. Sprawdź, czy zachodzą poniższe równości w sensie jeden:

   (a) $t^2 + 1 + \mathrm{arctg}\, t \cdot 2^{-t} =_1 t^2 + 1$; (b) $\sin t \cdot 2^{-t} + \cos t \cdot 2^{-2t} =_1 \sin t \cdot 2^{-t}$.

8. Wykaż poniższe zależności:

   (a) jeżeli $1 + E = (1 + a_1)\,(1 + a_2)$ oraz $|a_i| \leqslant K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$, to $|E| \leqslant_1 (K_1 + K_2)\,2^{-t}$;
   (b) jeżeli $1 + E = \dfrac{1 + a_1}{1 + a_2}$ oraz $|a_i| \leqslant K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$, to $|E| \leqslant_1 (K_1 + K_2)\,2^{-t}$;
   (c) jeżeli $1 + E = \sqrt{1 + a}$ oraz $|a| \leqslant K2^{-t}$, to $|E| \leqslant_1 \dfrac{K}{2}2^{-t}$.

Zestaw 2. Uwarunkowanie, numeryczna poprawność

1. Wyznacz wskaźniki uwarunkowania dla zadań:

   (a) $w(a,b,c) = ab - 2c$;

   (b) $w(a,b) = a^2 + b^2$;

   (c) $w(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$;

   (d) $w(b) = A^{-1}b$, gdzie $b \in \mathbb{R}^n$; macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest znaną macierzą nieosobliwą;

   (e) $w(a,b) = a - \sqrt{a^2 - b}$, dla $a^2 - b > 0$.

2. Rozważmy dwa układy równań

$$u_1 : \begin{cases} x + 3y &= 4 \\ -2x - 6,0001y &= -8 \end{cases}, \qquad u_2 : \begin{cases} x + 3y &= 4 \\ -2x - 6,0001y &= -8,01 \end{cases}.$$

   Rozwiązania tych układów to $(x_1, y_1) = (4, 0)$ dla układu u_1 oraz $(x_2, y_2) = (-296, 100)$ dla układu u_2. Pomimo tego, że macierze układów u_1, u_2 są identyczne, a ich wektory prawych stron różnią się niewiele, rozwiązania tych układów różnią się istotnie. Wyjaśnij dlaczego tak się dzieje.

3. Rozważmy układ równań liniowych u_1 oraz układ *zaburzony* u_2:

$$u_1 : \quad \begin{cases} ax + by = 4 \\ cx + dy = -6 \end{cases}; \qquad u_2 : \quad \begin{cases} ax^* + by^* = 4,001 \\ cx^* + dy^* = -5,998 \end{cases},$$

   gdzie $ad - bc \neq 0$. Jak mały powinien być wskaźnik uwarunkowania zadania polegającego na rozwiązaniu układu u_1, aby błąd względny

$$\frac{\|(x,y) - (x^*,y^*)\|_1}{\|(x,y)\|_1}$$

   był nie większy niż $\varepsilon = 10^{-2}$? Czy dla $a = 2, b = c = 3, d = 4$ wskaźnik uwarunkowania układu u_1 spełnia ten warunek? Odpowiedzi szczegółowo uzasadnij.

4. Zaproponuj numerycznie poprawne algorytmy wyliczenia poniższych wyrażeń; uzasadnij numeryczną poprawność wskazanych algorytmów.

   (a) $w(a,b) = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$, $(a,b) \neq (0,0)$;

   (b) $w(a,b,c) = ab + a + c - ac$;

   (c) $w(a,b,c) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a}$, $ab \neq 0$.

5. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} a^2x - aby = 1 \\ bx + ay = -1 \end{cases},$$

   gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, którego rozwiązaniem jest para (x, y). Zaproponuj numerycznie poprawny algorytm wyliczenia x; wykaż numeryczną poprawność tego algorytmu.

6. Załóżmy, że dysponujemy algorytmem obliczania wartości funkcji f, którego realizacja w arytmetyce fl przedstawia się następująco:

$$\mathrm{fl}(f(x)) = f(x(1+\varepsilon))(1+\delta), \qquad |\varepsilon|, |\delta| < 2^{-t}.$$

Zaproponuj numerycznie poprawny algorytm obliczenia wartości wyrażenia

$$w(a,b) = \frac{f(a^2-b^2)}{a^2 - b(2a-b)}$$

dla danych $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$; szczegółowo uzasadnij numeryczną poprawność zaproponowanego algorytmu.

7. Wartość funkcji f w punkcie x obliczono algorytmem numerycznie poprawnym, tj.

$$\mathrm{fl}\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x\left(1+\varepsilon\right)\right)\left(1+\delta\right),$$

gdzie $|\varepsilon| \leqslant K_1 2^{-t}$, $|\delta| \leqslant K_2 2^{-t}$. Zakładając, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$, oszacuj błąd względny uzyskanej wartości.

Zestaw 3. Interpolacja wielomianowa

1. Wyznacz wielomian interpolacyjny interpolujący węzły

$$\left\{(-2,-1), (-1,-1), (1,-1), (2,11)\right\};$$

zapisz go wykorzystując bazy Lagrange'a oraz Newtona.

2. Wielomian $p\left(x\right) = -x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ interpoluje pięć pierwszych węzłów z poniższej tabeli:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	8	5	4	-1	0

Wyznacz wielomian interpolujący całą tabelę.

3. Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ będą wielomianami postaci (3.1) oraz niech $c_i = \varphi_i\left(0\right)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Uzasadnij, że

$$\sum_{k=0}^{n} c_k {x_k}^{n+1} = (-1)^n x_0 \cdots x_n.$$

4. Z jaką dokładnością można obliczyć wartość $\ln 100,5$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego mając dane wartości $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$?

5. Funkcję $f \in \mathcal{C}^3_{[a,b]}$ spełniającą warunek $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant 1$ przybliżamy funkcją ciągłą p zdefiniowaną w sposób następujący: przedział $[a,b]$ dzielimy na podprzedziały punktami $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$; w każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym opartym na węzłach x_i, $\left(x_i + x_{i+1}\right)/2$, x_{i+1} – sklejenie tych wielomianów to funkcja p. Wykaż, że

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6^3}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3.$$

6. Wykaż, że dla parami różnych punktów $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ oraz funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix};$$

następnie uzasadnij, że

(a) dla $f \in \pi_n$: $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(b) dla $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $f[x_0, \ldots, x_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \dfrac{1}{x_i}$;

(c) jeżeli funkcja f jest parzysta, to $f[-x_0, \ldots, -x_n] = (-1)^n f[x_0, \ldots, x_n]$;

(d) jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $f[-x_0, \ldots, -x_n] = (-1)^{n+1} f[x_0, \ldots, x_n]$.

7. Niech $x_0 < \ldots < x_n$ oraz niech $\varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Rozważmy wielomiany

$$A_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\varphi_i'(x_i)]\,\varphi_i^2(x) \qquad \text{oraz} \qquad B_i(x) = (x - x_i)\,\varphi_i^2(x),$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Wyznacz wartości $A_i(x_j)$, $B_i(x_j)$, $A_i'(x_j)$ oraz $B_i'(x_j)$, następnie skonstruuj wielomian $p \in \pi_{2n+1}$ interpolujący funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – każdy o krotności dwa.

8. Wyznacz wielomian $f \in \pi_4$ spełniający warunki:

x	0	1
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	2	0
$f''(x)$		6

.

9. Wykaż, że wielomian $w \in \pi_n$ interpolujący funkcję parzystą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w $n+1$ różnych punktach węzłowych $x_0, \ldots, x_n$ położonych symetrycznie względem zera (tj. jeżeli x_i jest węzłem, to $-x_i$ też) również jest funkcją parzystą. Czy podobne stwierdzenie, ale dotyczące wielomianu interpolacyjnego Hermite'a interpolującego funkcję parzystą w węzłach $x_0, \ldots, x_k$ o łącznej krotności $n+1$ i położonych symetrycznie względem zera również jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij, negatywną podając stosowny przykład.

10. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, niech $x_1 < \ldots < x_n$ oraz niech $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Rozważmy następujące zadanie interpolacyjne:

Znaleźć wielomian $H \in \pi_n$ spełniający warunek

$$H(x_i) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad H'(x_0) = y_0. \tag{4.1}$$

Uzasadnij, że problem (4.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $w'(x_0) \neq 0$, gdzie $w(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$.

11. Wykorzystując ideę rozwiązania poprzedniego zadania sformułuj i uzasadnij warunek konieczny i wystarczający dla istnienia dokładnie jednego rozwiązania $H \in \pi_n$ problemu

$$H(x_i) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad H^{(k)}(x_0) = y_0,$$

gdzie $k \in \{1, \ldots, n\}$ jest ustalone.

12. Wykorzystując algorytm różnic dzielonych wyznacz wielomian $w \in \pi_2$ interpolujący poniższą tabelę

x_i	-2	-1	1
w_i	1	0	4

;

następnie, opierając się na rozwiązaniu poprzedniego zadania, zmodyfikuj go tak, aby otrzymać wielomian h możliwie niskiego stopnia, który dodatkowo spełnia warunek:

(a) $h''(0) = -2$;

(b) $h''(-2/3) = -2$.

13. Wielomian $p \in \pi_n$ interpoluje funkcję różniczkowalną f w punktach $x_0 < \ldots < x_n$. Czy wielomian p' interpoluje funkcję f'? Jeżeli tak, podaj błąd tej interpolacji (przy założeniu, że $f \in \mathcal{C}^{n+1}$).

Zestaw 4. Interpolacja funkcjami sklejanymi oraz trygonometryczna

1. Wyznacz kubiczną funkcję sklejaną S spełniającą warunki:

$$S(0) = 1, \; S(1) = 0, \; S(2) = 2, \; S''(0) = S''(2) = 0.$$

2. Wyznacz naturalną funkcję sklejaną S stopnia pierwszego interpolującą funkcję

$$f(x) = 2\sqrt{x(x-2)+1} + x - 3$$

w węzłach $x_0 = -1, \; x_1 = 1, \; x_2 = 3$. Sporządź poglądowy rysunek.

3. Sprawdź, czy naturalna kubiczna funkcja sklejana dla podziału $\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$ interpolująca tabelę

x_i	0	1	2	3
y_i	1	1	0	10

jest, dla $x \in [0, 3]$, określona wzorem

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}.$$

W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz wartość $S(-1)$.

4. Niech S będzie funkcją sklejaną stopnia pierwszego interpolującą funkcję $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ w węzłach $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Wykaż, że jeżeli $f \in \mathcal{C}^2_{[-1,3]}$, to zachodzi następujące oszacowanie błędu interpolacji w normie supremum:

$$\|f - S\|_{[-1,3]} \leqslant \frac{1}{2}\|f''\|_{[-1,3]}.$$

Czy istnieje wartość węzła $x_1 \in (-1, 3)$, dla której oszacowanie błędu interpolacji jest lepsze?

5. Symbolem $\mathcal{S}_m(\Delta)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji sklejanych stopnia m dla podziału $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

   (a) Uzasadnij, że zbiór $\mathcal{S}_m(\Delta)$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar tworzy rzeczywistą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich funkcji; podaj przykładową bazę tej podprzestrzeni.

   (b) Wykaż, że każdą funkcję sklejaną stopnia $m = 1$ dla podziału $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ można zapisać w postaci

$$S(x) = ax + b + \sum_{k=0}^{n} a_k|x - x_k|,$$

   gdzie $a, b, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

6. Niech $x_1 < \ldots < x_n$ oraz niech $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Wyznacz funkcję S spełniającą następujące warunki:

   $(\mathbf{w}_1)$ $S(x_i) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$;

   $(\mathbf{w}_2)$ $S \in \mathcal{C}^{n-1}_{\mathbb{R}}$;

   $(\mathbf{w}_3)$ $S^{(n)}(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x < \xi \\ b, & \text{dla } x > \xi \end{cases}$, $\xi \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

7. Niech $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Uzasadnij, że funkcja

$$t_{2n}(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin\frac{x - x_k}{2}$$

jest wielomianem trygonometrycznym stopnia $2n$, tj.

$$t_{2n}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

dla pewnych stałych $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

8. Uzasadnij, że trygonometryczny wielomian interpolacyjny

$$t_{2n}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

interpolujący funkcję f w węzłach $0 \leqslant x_0 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$ można wyrazić w postaci

$$t_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\,\psi_k(x),$$

gdzie, dla $k = 0, \ldots, 2n$,

$$\psi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{\sin\frac{x - x_j}{2}}{\sin\frac{x_k - x_j}{2}}.$$

9. Wyznacz trygonometryczny wielomian interpolacyjny interpolujący funkcję

$$\psi : [0, 2\pi) \ni x \to \cos^2 x - |\sin 2x| \in \mathbb{R}$$

w punktach $x_k = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

10. Wielomian trygonometryczny

$$t_2(x) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}e^{ix} + \frac{5}{4}e^{2ix}$$

interpoluje funkcję $f(x) = \left(\sqrt{3}|\sin x| - 2\right)^2$ w punktach $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi/3$, $x_2 = 4\pi/3$. Wykorzystując tę informację wyznacz wielomian trygonometryczny t_3 interpolujący funkcję f również w punkcie $x_3 = \pi$.

11. Funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi) : \qquad f(2\pi - x) = f(x)$$

nazwiemy funkcją parzystą; funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi) : \qquad f(2\pi - x) = -f(x)$$

nazwiemy funkcją nieparzystą.

Jakiej postaci są wielomiany trygonometryczne będące funkcjami parzystymi (nieparzystymi)?

12. Niech $x_k = 2k\pi/(n+1)$, dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Niech t_n będzie wielomianem trygonometrycznym interpolującym funkcję parzystą (w sensie definicji z poprzedniego zadania) w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Czy wielomian trygonometryczny t_n jest również funkcją parzystą?

Zestaw 5. Aproksymacja

1. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Wyznacz elementy optymalne dla elementu $u = (2, 0)$ względem podprzestrzeni $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Podaj błąd aproksymacji.

2. Uzasadnij, że zbiór elementów optymalnych jest zbiorem wypukłym.

3. Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji średniokwadratowej (tj. w sensie normy określonej przez naturalny iloczyn skalarny przestrzeni X) dla elementu u w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji:

   (a) $X = \mathcal{L}_2([0, 1])$, $V = \pi_1$, $u(x) = 2x^2 + 2$;

   (b) $X = \mathcal{L}_2\left([-1, 1], 1/\sqrt{1 - x^2}\right)$, $V = \pi_2$, $u(x) = (x + 1)^3$;

   (c) $X = \mathcal{L}_2\left([-1, 1], 1/\sqrt{1 - x^2}\right)$, $V = \pi_n$, $u \in \pi_{n+1}$;

   (d) $X = \mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$, $V = \pi_1$, $u(x) = x^2$;

   (e) $X = \mathcal{L}_2([1, e])$, $V = \pi_1$, $u(x) = \ln(x)$;

(f) $X = \mathcal{L}_2([-1,1])$, $V = \pi_1$, $u(x) = \sin(x)$.

4. Niech $X = \mathcal{L}_2(-a,a)$ $(a > 0)$ oraz niech $u \in X$ będzie dowolną funkcją parzystą (nieparzystą). Niech u^* będzie elementem optymalnym w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji u w podprzestrzeni π_n. Czy u^* również jest funkcją parzystą (nieparzystą)?

5. Wyznacz te wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których bryła powstała przez obrót wykresu funkcji $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ na przedziale $[-1,1]$ wokół osi Ox ma najmniejszą objętość. Wyznacz tę objętość.

6. ☠ Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową skończenie wymiarową, niech $V \subset X$ będzie jej podprzestrzenią liniową oraz niech $f \in X$ oraz $h^* \in V$ będą dowolnymi ustalonymi elementami. Czy w przestrzeni X można zdefiniować iloczyn skalarny tak, aby element h^* był elementem optymalnym (w sensie normy zdefiniowanej przez ten iloczyn skalarny) dla f?

7. Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej (tj. w sensie normy supremum) dla elementu u w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji:

   (a) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_m$, $u(x) = x^{m+1}$;
   (b) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_{m-1}$, $u(x) = x^{m+1}$;
   (c) $X = \mathcal{C}_{[1,e]}$, $V = \pi_0$, $u(x) = \ln x$;
   (d) $X = \mathcal{C}_{[1,e]}$, $V = \pi_1$, $u(x) = \ln x$;
   (e) $X = \mathcal{C}_{[0,2]}$, $V = \pi_2$, $u(x) = 4x^3 - 11x^2 + 10x$;
   (f) $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$, $V = \pi_1$, $u(x) = \exp|x|$.

8. Niech $X = \mathcal{C}_{[0,1]}$. Wyznacz elementy optymalne względem podprzestrzeni π_1 w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $u_1(x) = x^2$, $u_2(x) = x^3$ oraz $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

9. Niech $X = \mathcal{C}_{[-1,1]}$ oraz niech $V = \operatorname{lin}\{f\}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \in [-1,0] \\ x + 1 & \text{dla } x \in (0,1] \end{cases}.$$

   Wyznacz element optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla elementu $u(x) = 1$ względem podprzestrzeni V.

10. Niech $X = \mathcal{C}_{[a,b]}$. Uzasadnij, że element optymalny w przestrzeni $V = \pi_n$ w sensie aproksymacji jednostajnej dla dowolnej funkcji $u \in X$ jest wielomianem interpolującym tę funkcję.

11. Niech $X = \mathcal{C}_{[-a,a]}$ $(a > 0)$ oraz niech $u \in X$ będzie dowolną funkcją parzystą (nieparzystą). Niech u^* będzie elementem optymalnym dla funkcji u w skończenie wymiarowej przestrzeni V spełniającej warunek Haara. Czy u^* również jest funkcją parzystą (nieparzystą)?

Zestaw 6. Kwadratury

1. Znajdź rząd i wyrażenie na błąd dla kwadratury interpolacyjnej przybliżającej całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.1}$$

i opartej na informacji $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$.

2. Całkę $I(f) = \int_2^4 f(x)\,dx$ przybliżamy kwadraturą

$$S(f) = A_1 f(a) + A_2 f(3) + A_3 f(b) + A_4 f'(b),$$

gdzie $a, b \in [2,4]$. Dobierz współczynniki A_i $(i = 1,2,3,4)$ oraz węzły a, b, dla których rząd kwadratury S jest największy; wyznacz ten rząd.

3. Całkę (6.1) przybliżamy kwadraturą interpolacyjną S opartą na węzłach: a (podwójny) oraz $x_0 \in (a,b)$ (pojedynczy). Znajdź tę wartość węzła x_0, dla której kwadratura S ma maksymalny rząd. Wyznacz rząd oraz błąd otrzymanej kwadratury.

4. Zbadaj rząd kwadratury S przybliżającej całkę (6.1):

$$S(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(s-h) + f(s+h)\right),$$

gdzie $s = \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

5. Całkę $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$ przybliżamy kwadraturą interpolacyjną

$$S(f) = A_1 f(-a) + A_2 f(0) + A_3 f(a),$$

gdzie $a \in (0,1)$. Co możemy powiedzieć o rzędzie tej kwadratury?

   (a) Jest równy 2 dla pewnego a.
   (b) Niezależnie od wybory a, rząd wynosi co najmniej 3.
   (c) Jest równy 3 dla pewnego a.
   (d) Jest równy 6 dla pewnego a.

6. Całkę $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ przybliżamy kwadraturą

$$S(f) = \frac{1}{6}(2f(0) + 4f(1) - f'(1)).$$

   (a) Wyznacz rząd oraz błąd kwadratury S.
   (b) Z jaką dokładnością, przy pomocy kwadratury S, można obliczyć całkę I z funkcji f spełniającej warunek $\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(3)}(x)\right| = M$?

Zestaw 7. Równania liniowe

1. Wykorzystując algorytm eliminacji Gaussa w dwóch wariantach: bez wyboru elementu głównego oraz z wyborem elementu głównego w kolumnie, wyznacz dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jej rozkłady LU oraz PLU, gdzie $L, U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ to macierze trójkątne (odpowiednio, dolna oraz górna), a $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ to macierz ortogonalna.

2. Uzasadnij, że dla każdej macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje dokładnie jeden rozkład trójkątno-trójkątny LU, gdzie $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ to macierz trójkątna dolna, której wszystkie elementy diagonalne równe są jedności, macierz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ to macierz trójkątna górna.

3. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Wykorzystując algorytm Householdera wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jest macierzą ortogonalną, a $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierzą uogólnioną trójkątną górną, tj. $r_{ij} = 0$ dla $i > j$.

   (b) Wykorzystując algorytm Grama-Schmidta wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierzą ortogonalną (tj. $Q^TQ = I_2$), a $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jest macierzą trójkątną górną.

4. Wyznacz rozkłady ortogonalno-trójkątne macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

zastosuj algorytmy Grama-Schmidta oraz Householdera.

5. Uzasadnij, że jeżeli macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nieosobliwa, to istnieje dla niej dokładnie jeden rozkład ortogonalno-trójkątny QR, gdzie $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, w którym elementy diagonalne macierzy R są dodatnie.

Zestaw 8. Równania nieliniowe

1. Zbadaj zbieżność zmodyfikowanej metody siecznych

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k}{f(x_k) - f(0)} f(x_k) \end{cases}$$

zastosowanej do równania $x^3 - 2 = 0$.

2. Wykaż, że metoda Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

zastosowana do równania $x^7 - a = 0$ $(a > 0)$ jest zbieżna do jego rozwiązania niezależnie od sposobu wyboru przybliżenia początkowego $x_0 > 0$.

3. Wykaż globalną zbieżność metody Newtona stosowanej do funkcji $f \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$ mającej miejsce zerowe i spełniającej warunek $f'(x)f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Wsk.: wykorzystując równość $e_{k+1} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} e_k^2$ pokaż monotoniczność oraz ograniczoność ciągu $\{x_k\}$.

4. ☠ Niech p będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 2$, którego wszystkie pierwiastki $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są rzeczywiste; załóżmy, że są one uporządkowane monotonicznie, tj.

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \cdots \geqslant \xi_n.$$

Uzasadnij, że dla dowolnego $x_0 > \xi_1$ metoda Newtona zwraca ciąg $\{x_k\}$ zbieżny do ξ_1.

5. Zakładając zbieżność poniższych metod iteracyjnych stosowanych do równania $f(\alpha) = 0$, wyznacz ich wykładniki zbieżności:

(a) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}$ $(k \in \mathbb{N})$, gdzie $f'(x_0) \neq 0$;

(b) $x_{k+1} = x_k - r\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, gdzie r to krotność α jako miejsca zerowego funkcji f.