Algebra liniowa

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiIB AGH

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2026

Zestaw 1. Podstawowe struktury algebraiczne

1. Ile różnych działań wewnętrznych można określić w zbiorze zawierającym n elementów? Ile spośród nich to działania przemienne?

2. W zbiorze $K = \{a, b\}$ wprowadzamy działania $\circ$ i $\times$:

$$\begin{array}{c|c|c} \circ & a & b \\ \hline a & a & b \\ \hline b & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} \times & a & b \\ \hline a & a & a \\ \hline b & a & b \end{array} .$$

   Sprawdź, czy

   (a) działania $\circ$ i $\times$ są przemienne oraz łączne;

   (b) działanie $\circ$ jest rozdzielne względem działania $\times$;

   (c) istnieją elementy neutralne w K dla $\circ$ i $\times$;

   (d) istnieją w K elementy odwrotne dla elementów a i b względem działań $\circ$ i $\times$.

3. W zbiorze $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ wprowadzamy działanie $\circ_8$ mnożenia modulo 8, tj.

$$a \circ_8 b = a \cdot b \pmod 8,$$

   gdzie $x \pmod 8$ to reszta z dzielenia x przez 8, np. $6 \circ_8 5 = 30 \pmod 8 = 6$. Stwórz tabelę działań dla działania $\circ_8$; następnie, wykorzystując ją, oceń, czy działanie $\circ_8$ jest wewnętrzne w $\mathbb{Z}_8^*$, wskaż jego element neutralny oraz elementy symetryczne dla tych elementów zbioru $\mathbb{Z}_8^*$, które je posiadają.

4. Wyznacz elementy neutralne poniższych działań w zbiorze K; następnie znajdź elementy symetryczne dla tych elementów zbioru K, które je posiadają:

   (a) $K = \mathbb{Z}$ z działaniem $a \oplus b = a + b + 2$,

   (b) $K = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ z działaniem $a * b = a + b - ab$,

   (c) $K = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$ z działaniem

$*$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
$\triangle$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
$\square$	$\square$	$\bigcirc$	$\triangle$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$

   ,

   (d) $K = \mathbb{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$ z działaniem $+_m$ dodawania modulo m, tj.

$$a +_m b = (a + b) \bmod m,$$

   (e) $K = P(X)$ – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X z działaniem *różnica symetryczna*, tj.

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

5. Wykaż, że zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem

$$x * y = (-1)^x\, y + (-1)^y\, x$$

tworzy grupę. Następnie, wykorzystując odpowiednie własności struktury algebraicznej $(\mathbb{Z}, *)$, rozwiąż równanie $((2 * x) - x) * x = 0$.

6. Wykaż, że zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem

$$a \circ b = a + (-1)^a b$$

tworzy grupę. Następnie, wykorzystując odpowiednie własności struktury algebraicznej $(\mathbb{Z}, \circ)$, rozwiąż równanie $(x \circ 6) \circ 3 = -1$.

7. Niech

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

   (a) Udowodnij, że zbiór $G = \{f_1, \ldots, f_6\}$ z działaniem $\circ$ składania odwzorowań jest grupą. Czy jest to grupa abelowa?

   (b) Wykorzystując własności struktury $(G, \circ)$ znajdź funkcję g spełniającą równanie

$$f_6 \circ (g \circ f_4) = f_2.$$

8. Niech $(G, *)$ będzie grupą z elementem neutralnym e spełniającą warunek:

$$\forall a \in G: \qquad a * a = e.$$

Uzasadnij, że grupa $(G, *)$ jest abelowa.

9. W zbiorze $K = (0, +\infty)$ wprowadzamy działania:

$$a \oplus b = ab, \qquad a \odot b = a^{\ln b}.$$

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

10. W zbiorze $K = \{a, b\}$ wprowadzamy działania $\diamond$ i $\circ$:

$\diamond$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$\circ$	a	b
a	a	a
b	a	b

.

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \diamond, \circ)$ jest ciałem; następnie rozwiąż równanie

$$a \circ (x \diamond (b \circ a)) = (a \circ b) \diamond a.$$

Zestaw 2. Liczby zespolone, wielomiany

1. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb:

   (a) $\dfrac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$, (b) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{2+i}{2-i}$, (c) $\dfrac{1}{\sin\alpha+i\cos\alpha}$, (d) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, dla $n\in\mathbb{N}$.

2. Wykaż, że dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwe są nierówności:

   (a) $\mathfrak{Re}(z) \leqslant |z|$, (b) $\mathfrak{Im}(z) \leqslant |z|$, (c) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$, (d) $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2|$.

3. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

   $A=\{z\in\mathbb{C} : 1\leqslant |z+2|<4\}$, $B=\{z\in\mathbb{C} : |z+i|=1\}$,
   $C=\{z\in\mathbb{C} : \mathfrak{Re}(iz-1)\leqslant 2\}$, $D=\{z\in\mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z^2)\mathfrak{Im}(z^2)<0\}$,
   $E=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Arg}(z+iz)=\pi\}$, $F=\{z\in\mathbb{C} : \pi/2<\operatorname{Arg}(z^3)<3\pi/2\}$,
   $G=\{z\in\mathbb{C} : \pi/4\leqslant\operatorname{Arg}(i/z)\leqslant\pi/2\}$, $H=\{z\in\mathbb{C} : |z-1+i|=|z-2+2i|\}$,
   $I=\{z\in\mathbb{C} : |z+1|>2,\ \mathfrak{Im}(z+1)<1\}$, $J=\{z\in\mathbb{C} : |z-1|+|z+i|=a\}$, $a\in\mathbb{R}$.

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej poniższe liczby zespolone; w podpunktach d), g) oraz h) zakładamy, że $\varphi\in(\pi/2,3\pi/2)$:

   (a) $\sqrt{3}-i$, (b) $\dfrac{1}{-6+6i}$, (c) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{1+i}$, (d) $1+i\operatorname{tg}\varphi$,
   (e) $\sin\varphi-i\cos\varphi$, (f) $1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, (g) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}$, (h) $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi+i}{\operatorname{tg}\varphi-i}$.

5. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb:

   (a) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}$, (b) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(i-1)^5}$, (c) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$, (d) $\left(\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

6. Wyznacz zbiory

   (a) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$, (b) $\sqrt[3]{-64}$, (c) $\sqrt[4]{(2-i)^8}$, (d) $\sqrt{-7+24i}$.

7. Ile wynosi suma wszystkich pierwiastków algebraicznych stopnia n z 1?

8. Niech $\{z_0, z_1, \ldots, z_9\} = \sqrt[10]{\cos 1 + i\sin 1}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{|z_0|+2|z_1|+3|z_2|+4|z_3|+5|z_4|}{z_5^{20}+2z_6^{20}+3z_7^{20}+4z_8^{20}+5z_9^{20}}\cdot(-\sin 2+i\cos 2).$$

9. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0=\sqrt{3}+i$. Wyznacz pozostałe jego wierzchołki wiedząc, że środek leży w punkcie: (a) $s_0=0$; (b) $s_0=2\sqrt{3}+1$.

10. ☠ Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n$ nie występują dwa identyczne wyrazy.

11. Znajdź funkcję $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której:

    (a) $\cos 3x = \omega(\cos x)$, (b) $\sin 5x = \omega(\sin x)$, (c) $\operatorname{ctg} 4x = \omega(\operatorname{ctg} x)$.

12. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ oblicz:

    (a) $1 + \cos x + \ldots + \cos nx$,

    (b) $\sin 2x + \cos 3x + \sin 4x + \cos 5x + \ldots + \sin 2nx + \cos(2n+1)x$.

13. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $w(z) = z^3 - (2+3i)^9$.

14. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^5 + z^4 + (i-1)z + i - 1 = 0$, (b) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$,

    (c) $(z^2 + 1 + i)^4 + (1+2i)^4 = 0$, (d) $z^2 + (3-2i)z + 1 - 3i = 0$,

    (e) $(z-2)^2 + 2\mathfrak{Im}z + z = 1$, (f) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

15. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu

$$w(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2\,,$$

    którego podwójnym pierwiastkiem jest $z_0 = i$; następnie przedstaw wielomian w w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych możliwie niskich stopni.

16. Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(z) = -z^3 + 3z^2 + 1$. Znajdź wartość wyrażenia

$$w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3).$$

17. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(z) = -z^4 + (1+i)z^3 + iz + 1.$$

    Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\sum_{k=1}^{4} |\lambda + z_k|^2 < \sum_{k=1}^{4} \left|\overline{\lambda} + z_k\right|^2.$$

18. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $w(z) = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n$.

19. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^7 = \bar{z}(1-i)$, (b) $\overline{\bar{z}z^4} = z|z|^2$, (c) $\bar{z}z^4 = -|z|^2\bar{z}^3$, (d) $z^n = n|z|, \quad n \in \mathbb{N}$.

Zestaw 3. Przestrzenie wektorowe

1. Sprawdź, czy podana struktura jest przestrzenią wektorową nad podanym ciałem:

   (a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \ldots, x_n)$

   $$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, x_2 \ldots, x_n);$$

   (b) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \ldots, x_n)$

   $$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, 0 \ldots, 0);$$

   (c) $(\mathcal{W}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{W} = \{w \in \pi_n : w(-1) + w(1) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez skalar;

   (d) $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) - 2\mathfrak{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych;

   (e) $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{C}$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) - 2\mathfrak{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych

2. Niech $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ oznacza rzeczywistą przestrzeń wektorową wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar. Który ze zbiorów tworzy podprzestrzeń wektorową tej przestrzeni?

   (a) $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$– funkcja parzysta$\}$;

   (b) $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) + f(2) = 0\}$;

   (c) $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\}$.

3. Zbadaj liniową niezależność wektorów (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):

   (a) $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, -5, 1), v_3 = (3, 1, 0)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$;

   (b) $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, -2, 1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$;

   (c) $v_1(x) = 1, v_2(x) = \sin x, v_3(x) = \cos x$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$;

   (d) $v_1(x) = e^x, v_2(x) = e^{2x}, v_3(x) = e^{2(x-1)}$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

4. Wyznacz wymiary oraz przykładowe bazy przestrzeni wektorowych z zadania 1.

5. Wyznacz bazę przestrzeni wektorowej (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$;

   (b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0, 2x - 3z + 2w = 0\}$;

   (c) $\{w \in \pi_2 : w(1) - w'(2) = 0\}$.

6. Podane wektory uzupełnij do bazy przestrzeni X (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):

   (a) $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-1, 0, 1)$; $X = \mathbb{R}^3$;

   (b) $v_1(x) = x(x-1)(x+1), v_2(x) = x(x-1)(x-2)$; $X = \pi_3$;

   (c) $v_1(x) = 2x + 2$; $X = \{w \in \pi_3 : w(-1) = 0\}$.

7. Niech $f_0, \ldots, f_n \in \pi_n$ będą dowolnymi wielomianami takimi, że $\deg f_k = k$ $(k = 0, \ldots, n)$, $f_0 \not\equiv 0$. Uzasadnij, że wielomiany $f_0, \ldots, f_n$ stanowią bazę przestrzeni π_n.

8. ☠ Dla dowolnych, ustalonych, parami różnych liczb $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definiujemy wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$,

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

   (a) Uzasadnij, że $\deg \varphi_k = n$, dla $k = 0, \ldots, n$.

   (b) Wykaż, że wielomiany $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ stanowią bazę przestrzeni wielomianów π_n.

   (c) Wyznacz współrzędne wielomianu $v(x) = x^n$ w bazie $B = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$.

9. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B:

   (a) $v = (1, 2, 1); B = \big((0, 1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 0, 1)\big)$;

   (b) $v = (1, 2, 1); B = \big((2, -1, -1), (-1, 4, -3), (-3, 2, 0)\big)$;

   (c) $v(x) = x^2 - 1; B = \big(1, x - 2, (x - 2)(x - 3)\big)$;

   (d) $v(x) = x^2; B = \big(x^2 - x, x^2 + x, x^2 - 1\big)$.

10. Wektory v_1, v_2, v_3 są bazą pewnej rzeczywistej przestrzeni wektorowej. Który z poniższych zbiorów również jest jej bazą?

    (a) $v_1 + 2v_2 + v_3,\ v_2 - v_3,\ v_1 + 3v_3$;

    (b) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_2 + v_3,\ v_3$;

    (c) $v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - v_2 + v_3,\ v_1 + v_2 - v_3$.

11. ☠ Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ posiadają nieskończenie wiele elementów, jednak nie wszystkie te zbiory są równoliczne. Można pokazać, że

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \mathfrak{c};$$

    symbol # oznacza liczbę elementów zbioru.

    Rozważmy przestrzeń wektorową $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$; działania to naturalne działania dodawania oraz mnożenia liczb. Uzasadnij, że $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, +, \cdot) > \aleph_0$. Nieprzeliczalna baza przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$ to tzw. *baza Hamela*.

12. Wykaż liniową niezależność wektorów w przestrzeni $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$:

    (a) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}$;

    (b) $v_1 = \sqrt{2}, v_2 = \sqrt{3}, v_3 = \sqrt{6}$;

(c) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}, v_3 = \pi$.[1]

13. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(a) Z dowolnej bazy przestrzeni wektorowej można wybrać bazę dowolnej jej podprzestrzeni wektorowej.

(b) Bazę dowolnej podprzestrzeni wektorowej można uzupełnić do bazy całej przestrzeni.

(c) Z dowolnego zbioru wektorów generujących całą przestrzeń liniową można wybrać jej bazę.

(d) Z każdego zbioru wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej można wybrać jej bazę.

(e) Każda rzeczywista przestrzeń wektorowa posiada nieskończenie wiele baz.

[1]Liczbę rzeczywistą będącą miejscem zerowym wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy *liczbą algebraiczną*. Dowolna liczba wymierna p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, jako miejsce zerowe wielomianu o współczynnikach całkowitych $x \to qx - p$, jest liczbą algebraiczną. Podobnie, liczba $\sqrt{2}$, jako miejsce zerowe wielomianu $x \to x^2 - 2$, jest liczbą algebraiczną. Można wykazać, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb jest ciałem. Przykładami liczb niealgebraicznych (czyli *liczb przestępnych*) są π oraz e. Fakt ten może być przydatny w rozwiązaniu zadania 12(c).

Zestaw 4. Macierze

1. Sprawdź, czy:

   (a) struktura $(\mathbb{R}^{n\times m}, +)$ jest grupą, $+$ to naturalne działanie dodawanie macierzy;

   (b) struktura $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ jest grupą, $\cdot$ to naturalne działanie mnożenia macierzy;

   (c) struktura $(\mathbb{R}^{n\times m}, +, \cdot)$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową, działania to naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, wyznacz przykładowe bazy tej przestrzeni.

2. Sprawdź, czy dla $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ prawdziwe są poniższe zależności:

   (a) $AB = BA$;

   (b) $AB = \mathbf{0} \Rightarrow (A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

   (c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

   (d) $AB = BA \Rightarrow (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

3. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Znajdź macierz X spełniającą równanie

   (a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;

   (b) $B^T X = [1\ 1\ 0]^T$.

4. Wyznacz $f(A)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 5x + 3$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

5. ☠ Uzasadnij, że dla każdej macierzy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ istnieje wielomian rzeczywisty $f \neq 0$, taki że $f(A) = \mathbf{0}$.

6. Rozwiąż macierzowy układ równań
$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

7. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy:
$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Uzasadnij, że wyznacznik macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n > 1)$ o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.

9. Jaką wartość może przyjąć wyznacznik macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniającej podane równanie?

   (a) $A^2 = A^T$; (b) $A^T - A^{-1} = 0$; (c) $A^2 + A^{-1} = 0$; (d) $A^3 - 4A^{-1} = 0$.

10. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych. Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

11. Liczby 1798, 2139, 3255, 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

   również dzieli się przez 31.

12. Nie obliczając wyznaczników znajdź rozwiązania podanych równań:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Wyznacz macierze odwrotne dla macierzy nieosobliwych z zadania 7.

14. W zbiorze $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

   Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

   jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

15. Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

16. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

   jest: (a) największy; (b) najmniejszy?

Zestaw 5. Układy równań liniowych

1. Znajdź rozwiązania układów równań:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x+3y-z &= -4 \\ -x-y+z &= 3 \\ 5x+6y+3z &= 8 \end{cases}; \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-y+2z &= -1 \\ 4x+5y-7z &= 5 \end{cases}; \quad \text{(c)} \begin{cases} 3x-5y+2z+4t &= 2 \\ 7x-4y+z+3t &= 5 \\ 5x+7y-4z-6t &= 3 \end{cases};$$

$$\text{(d)} \begin{cases} 3x+2y+z &= -1 \\ 7x+6y+5z &= 0 \\ 3z+5x+6y &= 2 \end{cases}; \quad \text{(e)} \begin{cases} x-y-3z &= 2 \\ 2x-5y+6z &= -5 \\ 4x-5y-8z &= 5 \end{cases}; \quad \text{(f)} \begin{cases} x+2y-z+2w = 1 \\ 2x+4y+z-2w = 2 \\ -x-2y-2z+4w = 1 \end{cases}.$$

2. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$; wyznacz rozwiązania dla tych wartości parametru, dla których układ jest nieoznaczony:

$$\text{(a)} \begin{cases} (5-p)\,x-2y-z &= 1 \\ -2x+(2-p)\,y-2z &= 2 \\ -x-2y+(5-p)\,z &= 1 \end{cases}; \quad \text{(b)} \begin{cases} px+y &= 2 \\ 2x-y &= p \\ 2x-y &= 1 \end{cases}; \quad \text{(c)} \begin{cases} x+y+pz &= 2 \\ x+py+z &= -1 \\ px+y+z &= -1 \end{cases}.$$

3. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ w rzeczywistej przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ zachodzi:

$$(3, p-4, p-5, p-6) \in \operatorname{lin}\{(-p,1,p,p), (-p,p,2,p), (-p,p,p,3)\}\,?$$

   Zapisz odpowiedni układ równań, określ rząd macierzy uzupełnionej tego układu w zależności od parametru p oraz wyznacz te jego wartości, dla których rozważany układ jest niesprzeczny.

4. Znajdź dowolną bazę rzeczywistej podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $(\mathbb{C}^3, +, \cdot)$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-z = 0 \end{cases}.$$

   W wybranej bazie podaj współrzędne tych z poniższych wektorów, które należą do tej podprzestrzeni:

$$u = (-2i, i, -2i)\,, \qquad v = (-2i, 4i, -2i)\,, \qquad w = (2-i, -4+2i, 2-i).$$

5. Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \pi_3$ spełniającego warunki $p(-2) = 3$, $p(-1) = 2$, $p(1) = 6$. Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu p. Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej, zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania.

6. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (2x+(a-1)\,y+2z+1, x-y, 2x+2y+(a+1)\,z-2) \in \mathbb{R}^3$$

   w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zestaw 6. Odwzorowania liniowe

1. Sprawdź, które z podanych odwzorowań jest liniowe:
   (a) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x-1, y+z)$;
   (b) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{L}(x,y,z) = (x+y, 2x-z, 3x+y, 0)$;
   (c) $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \mathcal{L}(A) = A + A^T$;
   (d) $\mathcal{L}\colon \pi_3 \to \pi_2, \quad (\mathcal{L}p)(x) = xp''(x) + p(0)$;
   (e) $\mathcal{L}\colon \pi \to \pi, \quad (\mathcal{L}p)(x) = p(x)p'(x)$.

2. Dla odwzorowań liniowych z poprzedniego zadania wyznacz bazę jądra $\ker \mathcal{L}$ i bazę obrazu $\operatorname{im} \mathcal{L}$ oraz określ, które z nich jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

3. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jest przez warunki
$$f(1,1,1) = (1,4), \quad f(1,-1,1) = (-1,2), \quad f(1,1,0) = (2,2).$$
   (a) Znajdź $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$.
   (b) Zbadaj, czy odwzorowanie f jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

4. Wyznacz macierze odwzorowań liniowych z zadania 1. w dowolnie wybranych bazach.

5. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym postaci
$$f(x,y,z,t) = (3x - 2y + z + at, 5x - 8y + 9z + 3t, 2x + y + az - t).$$
   Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ dla jakich wartości parametru a odwzorowanie f jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

6. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L\colon \pi_4 \to \pi_4$,
$$(Lw)(x) = xw'(x) + pw(-x).$$
   Wyznacz jego macierz w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ, dla jakich wartości parametru p odwzorowanie L jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

7. Dane jest odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (2y, x+z) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź macierz $M_{B_1,B_2}(f)$, jeżeli
   (a) $B_1 = (\,(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\,), \quad B_2 = (\,(1,0),(0,1)\,)$;
   (b) $B_1 = (\,(2,1,0),(1,1,1),(0,0,1)\,), \quad B_2 = (\,(1,1),(0,-1)\,)$.

8. Rozważmy odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy
$$M_{B_1,B_2}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Znajdź wartość $g(1,2,0)$, jeżeli w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ zadano bazy takie jak w zadaniu poprzednim.

9. Niech $X = \lin\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$. Wyznacz macierz endomorfizmu $L : X \to X$ (w dowolnej bazie przestrzeni X), gdzie

   (a) $L(f) = f'$;

   (b) $L(f) = f + f''$.

   Podaj wymiary obrazu i jądra tego odwzorowania (wykorzystując rząd wyznaczonej macierzy odwzorowania) oraz wyznacz ich bazy. Korzystając z macierzowej reprezentacji odwzorowania L wyznacz wartość $L(f)$, gdzie $f(x) = 3\sin x(1 - 4\cos x)$.

10. Rozważmy bazę $B = (v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ oraz endomorfizm f, taki że $f(v_1) = v_2 - v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = v_3 - v_1$.

    (a) Wyznacz macierz $M_B(f)$ i na jej podstawie sprawdź, czy f jest izomorfizmem.

    (b) Wyznacz bazę B jeżeli wiadomo, że macierz przejścia z bazy kanonicznej B_k do bazy B ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (c) Wyznacz wartość $f(0, 1, 2)$ dwoma sposobami: korzystając z macierzy $M_B(f)$ oraz z macierzy $M_{B_k}(f)$.

11. Znajdź macierz $M_{B_1,B_2}(L)$ odwzorowania liniowego $L\colon \pi_2 \to \pi_3$ postaci $(L\,w)(x) = xw(-x)$, gdzie $B_1 = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$, $B_2 = (x^3 + x, x^3 - x, x^2 + 1, x^2 - 1)$. Ponadto

    (a) wyznacz wymiar przestrzeni $\ker L$ badając rząd macierzy $M_{B_1,B_2}(L)$,

    (b) wyznacz macierz odwzorowania liniowego L w bazach kanonicznych.

12. ☠ Wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz endomorfizmu $L : (x, y, z) \to (x - y, y + z, -z)$ ma postać

$$M_B(L) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zestaw 7. Elementy teorii Jordana

1. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x - y + z, x - y - z, 2x - 2y) \in \mathbb{R}^3$;

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + y + z, 2y + z, 2z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $f : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (5a + 9c)x^2 - (3a + 4b + 3c)x + 3a - c \in \pi_2$;

   (d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3a + c - d & 2a + 2b - 2d \\ 2c & a + d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

   oblicz: (a) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, (b) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$; λ_1, λ_2, λ_3 to wartości własne macierzy A.

4. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. Wyznacz wielomiany charakterystyczne macierzy: (a) $2A - I$; (b) $(A + 2I)^T$; (c) A^{-1}.

5. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. Oblicz wyznacznik oraz ślad macierzy $A^3 - A^2 - 3A + I$.

6. Niech $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} : \det(AB) \neq 0$. Udowodnij, że jeżeli λ jest wartością własną macierzy AB, to λ jest również wartością własną macierzy BA. Czy założenie $\det(AB) \neq 0$ można osłabić?

7. Sprawdź, czy macierz A jest diagonalizowalna; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierze diagonalną D oraz nieosobliwą P, takie że $A = PDP^{-1}$:

   (a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v jest wektorem własnym macierzy A. Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

9. Rozważmy endomorfizm $f : \pi_3 \to \pi_3$ określony przez warunki:

$$f(x^3) = -x^3, \quad f(x^2) = x^3 - 1, \quad f(x) = -x, \quad f(1) = 2x^3 + 2x^2 - 3.$$

Wykaż, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Następnie wyznacz bazę B przestrzeni π_3, w której macierz $M_B(f)$ jest diagonalna. Wypisz tę macierz i korzystając z niej znajdź $f^{10}(x^3 + x)$.

10. Dla macierzy A wyznacz jej macierz Jordana J_A oraz macierz nieosobliwą P, taką że $A = PJ_AP^{-1}$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Dla macierzy z poprzedniego zadania wyznacz (a) A^{100}; (b) $I + A + A^2 + \cdots + A^{19}$.

12. Znajdź, dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jej rozkład Jordana PJ_AP^{-1}, gdzie J_A to macierz Jordana, a P macierz nieosobliwa. Następnie, wykorzystując ten rozkład, wskaż cztery różne macierze $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniające warunek $B^2 = A$.

13. Rozważmy funkcję $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ określoną wzorem

$$F : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2a - b + 2c - d & b + 2c - d \\ 2c & b - 2c + 3d \end{bmatrix}.$$

(a) Uzasadnij, że F jest endomorfizmem.

(b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu F; wyznacz bazy tych przestrzeni. Czy F jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem?

(c) W wybranej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wyznacz macierz A_F endomorfizmu F.

(d) Wyznacz wartości oraz wektory własne macierzy A_F.

(e) Wyznacz wartości oraz wektory własne endomorfizmu F.

(f) Wyznacz macierz Jordana macierzy A_F.

(g) Wyznacz bazę Jordana przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ względem endomorfizmu F.

Rozważmy endomorfizm φ,

$$\varphi : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (5a + 9c)\, x^2 - (3a + 4b + 3c)\, x + 3a - c \in \pi_2.$$

Pytanie 1. Potrafię wyznaczyć macierz A_φ endomorfizmu φ w zadanej bazie przestrzeni π_2:

a) $e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2,$

b) $e_0(x) = 1 + x, \quad e_1(x) = x + x^2, \quad e_2(x) = 1 + x^2.$

Pytanie 2. Potrafię sprawdzić, czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny; potrafię wyznaczyć jego wartości własne oraz liniowo niezależne wektory własne.

Pytanie 3. Potrafię sprawdzić, czy istnieje baza przestrzeni π_2, w której macierzą endomorfizmu φ jest

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -12 \\ 1 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi, potrafię wyznaczyć tę bazę.

Pytanie 4. Potrafię wyznaczyć dowolną naturalną potęgę macierzy A_φ endomorfizmu φ; np. A_φ^{100}.

Pytanie 5. Potrafię wyznaczyć wielomian $\varphi^{100}\left(-x^2 + x + 1\right)$, gdzie φ^n to n–krotne złożenie endomorfizmu φ.

Pytanie 6. Potrafię sprawdzić, czy dwie macierze $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ są podobne,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku, gdy są podobne, potrafię wyznaczyć macierz P ustalającą to podobieństwo, tj. taką, że $A = PBP^{-1}$.

Pytanie 7. Znam odpowiedzi na poniższe pytania:

a) Czy prawdą jest, że macierz Jordana macierzy o elementach rzeczywistych jest macierzą o elementach rzeczywistych?

b) Czy prawdą jest, że macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny?

c) Czy prawdą jest, że macierze, które mają ten sam wielomian charakterystyczny, są podobne?

d) Czy prawdą jest, że dwie macierze podobne mają te same wartości własne?

e) Czy prawdą jest, że dwie macierze podobne mają te same wektory własne?

Rozważmy endomorfizm ψ,

$$\psi : \mathbb{R}^{2\times 2} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3a+c-d & 2a+2b-2d \\ 2c & a+d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Pytanie 8. Potrafię wyznaczyć macierz A_ψ endomorfizmu ψ w zadanej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pytanie 9. Potrafię wyznaczyć wartości własne oraz liniowo niezależne wektory własne endomorfizmu ψ.

Pytanie 10. Potrafię wyznaczyć macierz Jordana endomorfizmu ψ (bez wyznaczania jego wektorów własnych).

Pytanie 11. Potrafię wyznaczyć cztery liniowe niezależne wektory główne macierzy A_ψ; potrafię przy ich pomocy wyznaczyć cztery liniowo niezależne wektory główne endomorfizmu ψ.

Pytanie 12. Potrafię wyznaczyć macierz podobieństwa P, dla której $A_\psi = PJ_\psi P^{-1}$, gdzie J_ψ to macierz Jordana dla macierzy A_ψ.

Pytanie 13. Mając zadaną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ potrafię sprawdzić, czy jest ona bazą Jordana dla endomorfizmu ψ:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

b) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Pytanie 14. Potrafię sprawdzić, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$, w której macierzą endomorfizmu ψ jest

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Pytanie 15. Potrafię wyznaczyć dowolną naturalną potęgę macierzy A_ψ endomorfizmu ψ; np. A_ψ^{1000}.

Pytanie 16. Dla zadanej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ potrafię wyznaczyć macierz $\psi^{100}(A)$, gdzie ψ^n to n–krotne złożenie endomorfizmu ψ.

Zestaw 8. Formy kwadratowe

1. Formę kwadratową zapisz w postaci macierzowej, tj. $\varphi(x) = x^T A x$:

   (a) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$,
   (b) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$,
   (c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2$,
   (d) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,
   (e) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_3$.
   (f) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_2^2 + 6x_3x_4 + 2x_4^2 + x_5^2 + 12x_5x_6 + x_6^2$.

2. Zbadaj określoność form kwadratowych z poprzedniego zadania.

3. Zbadaj określoność formy kwadratowej φ w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$:

   (a) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + px_1x_2 + x_2^2$;
   (b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + px_1x_3 + x_3^2$;
   (c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2px_1x_3 + x_3^2$.

4. Rozważmy dwie formy kwadratowe:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2px_1x_3 + 2x_1x_2, \qquad G(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - x_3^2.$$

   Wyznacz te wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których nierówność $F(x_1, x_2, x_3) > G(x_1, x_2, x_3)$ jest prawdziwa dla każdego $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$.

5. Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

   Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T A x \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

6. Formę kwadratową φ sprowadź do postaci kanonicznej; zastosuj metodę Lagrange'a. Skomentuj określoność formy kwadratowej φ. Następnie wyznacz macierz symetryczną A_φ formy kwadratowej φ oraz macierz nieosobliwą P, dla której macierz $D = P^T A_\varphi P$ jest diagonalna:

   (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 2xy + 6xz - 8yz \in \mathbb{R}$;
   (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \in \mathbb{R}$;
   (c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 2xy - 2xz + 4yz - 8z^2 \in \mathbb{R}$.

   Sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz D.

Zestaw 9. Przestrzenie euklidesowe

1. Wykaż, że w przestrzeni wektorowej wyposażonej w iloczyn skalarny wektory $e_1, \ldots, e_n$ tworzące układ ortogonalny (zakładamy, że $e_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$) są liniowo niezależne.

2. Wykaż, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej z iloczynem skalarnym $\circ$ zachodzi twierdzenie Pitagorasa:

$$v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

   gdzie $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$.

3. Sprawdź, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wektory

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

   są ortonormalne, następnie znajdź wektory e_3 i e_4 takie, aby układ e_1, e_2, e_3, e_4 był jej bazą ortonormalną. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przyjmujemy naturalny iloczyn skalarny.

4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (6, 3, 3)$ na podprzestrzeń liniową $V = \{(x, y, z) : 2x + y + z = 0\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważ następujące iloczyny skalarne:

   (a) $s_1(x, y) = x^T y$;

   (b) $s_2(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} y.$

5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u(x) = 2x^2 + 1$ na podprzestrzeń $V = \pi_1$. W przestrzeni wielomianów rzeczywistych rozważamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

6. Rozważmy przestrzeń unitarną funkcji ciągłych na przedziale $[-1, 1]$ z iloczynem skalarnym określonym w poprzednim zadaniu.

   (a) Wyznacz miarę kąta utworzonego przez wektory $u(x) = -2|x|$ oraz $v(x) = x - |x|$.

   (b) Wykaż, że wielomiany

$$u_0(x) = 1, \; u_1(x) = x, \; u_2(x) = 3x^2 - 1$$

   tworzą bazę ortogonalną przestrzeni π_2; następnie wyznacz rzut ortogonalny elementu u_2 na podprzestrzeń π_1.

7. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ iloczyn skalarny zdefiniowano wzorem $A \circ B = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$, gdzie $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy. Wyznacz rzut ortogalny macierzy I_2 na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez macierze

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zestaw 10. Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$

1. Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$ jest ostrokątny. Oblicz jego pole oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A.

2. Sprawdź, czy punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D(2, -3, 1)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

3. Oblicz objętość

   (a) czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, 1)$, $D = (0, 0, 1)$;

   (b) równoległościanu rozpiętego przez wektory $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-2, -1, 3)$.

4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-1, 0, 1)$ i równoległej do płaszczyzny $2x + y = 0$.

5. Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (2, 4, -1)$.

6. Wyznacz równanie płaszczyzny zawierającej proste

$$l_1 : x = y = z \qquad \text{oraz} \qquad l_2 : 2x = y = -z.$$

7. Dane są trzy punkty $A\,(1, -5, 4)$, $B\,(-4, 3, 2)$, $C\,(2, 1, 3)$. Wyznacz płaszczyznę przechodzącą przez punkt C i równoległą do wektora $\overrightarrow{AB}$.

8. Dana jest prosta

$$l : \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y - 5z - 1 = 0 \end{cases}.$$

   Zapisz jej równanie w postaci parametrycznej oraz kanonicznej.

9. Na płaszczyźnie $x - y - z = 0$ wyznacz dwie proste przecinające się pod kątem $\varphi = \pi/4$.

10. Znajdź rzut prostokątny punktu $P = (2, -1, 0)$ na płaszczyznę $2x + 2y - 2z + 1 = 0$.

11. Wyznacz rzut prostokątny prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -at \\ z = 2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

    na płaszczyznę $x + 2y - z = 1$; rozważ dwa w przypadki: (a) $a = 1$; (b) $a = -1$.

12. Wyznacz równanie płaszczyzny, której punkt $(1, 2, -1)$ jest rzutem prostokątnym punktu $(0, 0, 0)$.

13. Znajdź punkt A symetryczny względem płaszczyny π do punktu przecięcia się prostych l_1 oraz l_2, jeżeli

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}; \qquad \pi : x + y + z = -2.$$

14. Zbadaj wzajemne położenie prostych l i k:

(a) $l\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+3t \\ z = -3+2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}, \quad k\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-4t \\ z = 2+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R};$

(b) $l\colon \begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}, \qquad k\colon \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5-t \\ z = 2+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

15. Zbadaj wzajemne położenie prostej k i płaszczyzny π

$$\pi\colon 3x-y+z-17=0, \qquad k\colon \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \\ z = 2-3t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$$

16. Zbadaj wzajemne położenie płaszczyzn

$$\pi_1\colon -3x+y-z-3=0, \qquad \pi_2\colon 6x-2y+2z-5=0.$$

17. Oblicz odległość

(a) punktu $P=(0,0,0)$ od prostej $l\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$;

(b) punktu $P=(0,-1,0)$ od płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $(0,1,2)$, $(1,1,0)$ $(-1,0,1)$;

(c) między płaszczyznami $\pi_1\colon -3x+y-z-3=0$ oraz $\pi_2\colon 6x-2y+2z-4=0$.

(d) między prostymi

$$l\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = -3-3t \\ z = 2-2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad k\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 6t \\ z = 4t \end{cases}, t\in\mathbb{R};$$

(e) między prostymi

$$l\colon \begin{cases} x = 1 \\ x+z=0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad k\colon \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases};$$

(f) prostej

$$k\colon \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1-t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

od płaszczyzny $\pi\colon x+y-z=1$.

18. Dana jest płaszczyzna $\pi\colon x+2y+3z-6=0$ oraz prosta $l\colon x=y=z$. Wyznacz równania parametryczne prostej l oraz prostej będącej jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę π.

Karta wzorów

1. (a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, (b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

2. (a) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$, (b) $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$

3. (a) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$, (b) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

4. (a) $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$, (b) $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$,

   (c) $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$

5. (a) $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, (b) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, (c) $\sin x \cos x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

6. (a) $\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$, (b) $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$, (c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$

7. (a) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, (b) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$,

   (c) $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$

8. (a) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, (b) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + a b^{n-2} + b^{n-1})$