Algebra liniowa

Wykład dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiIB

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2026

Spis treści

Rozdział 1. Struktury algebraiczne . . . 4
1.1. Działania wewnętrzne . . . 4
1.1.1. Własności działań wewnętrznych . . . 4
1.2. Grupy . . . 5
1.3. Pierścienia, ciała . . . 6
Rozdział 2. Liczby zespolone . . . 8
2.1. Sprzężenie oraz moduł liczby zespolonej . . . 9
2.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej . . . 9
2.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej . . . 10
2.2.2. Wzór de Moivre'a . . . 11
2.3. Pierwiastek $n-$tego stopnia z liczby zespolonej . . . 12
2.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej . . . 12
2.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej . . . 14
2.5. Logarytm oraz potęgi zespolone ☠ . . . 14
Rozdział 3. Wielomiany – podstawowe wiadomości . . . 16
3.1. Jak efektywnie wyznaczać wartości wielomianu w punkcie? . . . 16
3.2. Miejsca zerowe wielomianu . . . 16
3.2.1. Pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych . . . 17
3.3. Rozkład wielomianu na iloczyn wielomianów nierozkładalnych . . . 18
3.4. Wzory Viète'a . . . 19
3.5. Równania algebraiczne . . . 20
3.5.1. Równania algebraiczne stopnia pierwszego . . . 20
3.5.2. Równania algebraiczne stopnia drugiego . . . 20
3.5.3. Równania algebraiczne stopnia trzeciego ☠ . . . 21
3.5.4. Równania algebraiczne stopnia czwartego ☠ . . . 22
3.5.5. Równania algebraiczne stopnia $n \geqslant 5$ . . . 23
Rozdział 4. Przestrzenie wektorowe . . . 24
4.1. Podprzestrzeń liniowa . . . 25
4.2. Liniowa niezależność wektorów . . . 25
4.3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej . . . 26
Rozdział 5. Macierze . . . 28
5.1. Działania na macierzach . . . 29
5.1.1. Dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar . . . 29
5.1.2. Mnożenie macierzy . . . 29
5.1.3. Macierz transponowana . . . 30
5.1.4. Macierz sprzężona . . . 30
5.2. Wyznacznik macierzy . . . 31
5.2.1. Definicja aksjomatyczna . . . 31
5.2.2. Postać permutacyjna wyznacznika ☠ . . . 32
5.2.3. Własności wyznacznika macierzy . . . 33
5.2.4. Metoda Laplace'a . . . 33
5.2.5. Metoda przekształceń elementarnych . . . 34

5.3. Macierz odwrotna . . . 34
5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej . . . 35
5.4. Rząd macierzy . . . 36
Rozdział 6. Przekształcenia liniowe . . . 38
6.1. Rodzaje odwzorowań liniowych . . . 39
6.2. Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego . . . 39
6.3. Macierz złożenia odwzorowań liniowych . . . 40
6.4. Jądro i obraz odwzorowania liniowego . . . 41
6.5. Macierzowa charakterystyka odwzorowania liniowego . . . 43
6.6. Macierz odwzorowania odwrotnego . . . 44
Rozdział 7. Układy równań liniowych . . . 46
7.1. Twierdzenie Cramera . . . 46
7.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego . . . 47
7.3. Metoda eliminacji Gaussa . . . 49
Rozdział 8. Wartości i wektory własne . . . 52
8.1. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona . . . 54
8.2. Podprzestrzeń własna . . . 55
8.3. Diagonalizowalność . . . 56
Rozdział 9. Postać Jordana macierzy . . . 59
9.1. Macierz Jordana . . . 59
9.1.1. Własności macierzy Jordana . . . 60
9.2. Rzeczywista macierz Jordana ☠ . . . 63
Rozdział 10. Baza Jordana . . . 66
10.1. Wektory główne . . . 66
10.2. Macierz przejścia . . . 70
10.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego . . . 71
10.3.1. Baza złożona z wektorów własnych . . . 72
10.3.2. Baza Jordana . . . 72
Rozdział 11. Formy kwadratowe . . . 74
11.1. Określoność formy kwadratowej . . . 75
11.2. Metody badania określoności formy kwadratowej . . . 75
11.2.1. Kryterium Sylvestera . . . 75
11.2.2. Kryterium wartości własnych . . . 77
11.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a) . . . 78
Rozdział 12. Przestrzenie unitarne . . . 81
12.1. Norma określona przez iloczyn skalarny . . . 82
12.2. Ortogonalność . . . 83
12.3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta . . . 84
12.4. Abstrakcyjna wersja twierdzenia Pitagorasa . . . 85
12.5. Rzut prostopadły na podprzestrzeń liniową . . . 85
12.5.1. Wyznaczanie rzutu ortogonalnego . . . 86
Rozdział 13. Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$ . . . 89
13.1. Iloczyny wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany . . . 90
13.1.1. Iloczyn skalarny . . . 90
13.1.2. Iloczyn wektorowy . . . 90
13.1.3. Iloczyn mieszany . . . 92
13.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego . . . 92
13.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ . . . 94
13.2.1. Równanie normalne płaszczyzny . . . 94
13.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny . . . 94
13.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny . . . 94
13.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty . . . 95
13.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ . . . 95
13.3.1. Równanie parametryczne prostej . . . 95
13.3.2. Równanie kierunkowe prostej . . . 95

13.3.3. Równanie krawędziowe prostej 95
13.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych 95
13.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi 95
13.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny 96
13.4.3. Odległość punktu od prostej 96
13.4.4. Odległość między płaszczyznami 96
13.4.5. Odległość między prostymi 96
Rozdział 14. Zadania egzaminacyjne 97

Rozdział 1

Struktury algebraiczne

1.1. Działania wewnętrzne

Niech X będzie zbiorem niepustym. Dowolną funkcję $\circ : X \times X \to X$ nazywamy **działaniem wewnętrznym** w zbiorze X. Działanie wewnętrzne, jak każdą funkcję, możemy określać na wiele sposobów:

- słownie: w grupie studentów jednej z krakowskich uczelni uczęszczających regularnie na wykład z algebry (zakładamy, że jest to zbiór niepusty) wprowadzamy działanie, które z pary elementów wybiera element starszy (decyduje numer PESEL);
- graficznie: aby zdefiniować funkcję $\circ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wystarczy w układzie $Oxyz$ zaznaczyć stosowne kropki;
- tabelą działań (tzw. *tabelą Cayleya*): w zbiorze $X = \{\clubsuit, \spadesuit, ✠\}$ wprowadzamy działanie $\circ$,

$\circ$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	✠
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	✠
$\spadesuit$	$\spadesuit$	✠	$\clubsuit$
✠	$\clubsuit$	✠	$\spadesuit$

,

  na przykład: $\spadesuit \circ ✠ = \clubsuit$; $✠ \circ \spadesuit = ✠$;
- wzorem: $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to x + y \in \mathbb{R}$.

1.1.1. Własności działań wewnętrznych

Niech $\circ$ będzie działaniem wewnętrznym w zbiorze X.

Definicja 1.1. *Element $e \in X$ spełniający warunek*

$$\forall x \in X : \quad e \circ x = x \circ e = x \tag{1.1}$$

nazywamy **elementem neutralnym** *działania $\circ$.*

Zakładając, że w zbiorze X dla pewnego działania wewnętrznego $\circ$ istnieją dwa elementy neutralne e_1 i e_2, mamy:

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

Stąd wynika następujące

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.*

Definicja 1.2. *Działanie wewnętrzne* $\circ : X \times X \to X$ *nazywamy* **działaniem łącznym**, *jeżeli*

$$\forall x, y, z \in X: \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z. \tag{1.2}$$

Definicja 1.3. *Działanie wewnętrzne* $\circ : X \times X \to X$ *nazywamy* **działaniem przemiennym**, *jeżeli*

$$\forall x, y \in X: \quad x \circ y = y \circ x. \tag{1.3}$$

Niech $\circ : X \times X \to X$ będzie działaniem wewnętrznym o elemencie neutralnym e.

Definicja 1.4. *Jeżeli dla elementu* $x \in X$ *istnieje element* $x' \in X$ *spełniający warunek*

$$x' \circ x = x \circ x' = e,$$

to element x' *nazywamy* **elementem symetrycznym dla elementu** x **względem działania** $\circ$.

Załóżmy, że x'_1, x'_2 są dwoma elementami symetrycznymi dla elementu x względem działania łącznego (!) $\circ$ posiadającego element neutralny e. Wówczas

$$x'_1 = e \circ x'_1 = (x'_2 \circ x) \circ x'_1 = x'_2 \circ (x \circ x'_1) = x'_2 \circ e = x'_2,$$

skąd wynika następujące

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.*

Przykład 1.1. *W zbiorze* $X = \{a, b, c\}$ *wprowadzamy działanie określone poniższą tabelą Cayleya:*

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

.

Łatwo stwierdzić, że działanie $\circ$ *posiada element neutralny* $e = a$. *Ponieważ elementy* b *oraz* c *posiadają po dwa elementy odwrotne, którymi są* b *oraz* c*:*

$$b \circ b = b \circ c = c \circ b = c \circ c = e = a,$$

zatem, na podstawie twierdzenia 1.2, działanie to nie jest łączne. Istotnie,

$$c = (b \circ b) \circ c \neq b \circ (b \circ c) = b.$$

Przykład 1.2. *Rozważmy ponownie grupę krakowskich studentów uczęszczających na wykład z algebry. Łatwo sprawdzić, że wprowadzone w tym zbiorze działanie jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym względem tego działania jest najmłodszy element, tj. .....; jest on jednocześnie jedynym elementem, który posiada element symetryczny – jest nim on sam.*

1.2. Grupy

Niech G będzie dowolnym zbiorem niepustym.

Definicja 1.5. *Parę* $(G, \circ)$ *nazywamy* **grupą**, *jeżeli:*

- *działanie* $\circ$ *jest wewnętrzne w* G, *tj. dla dowolnych* $a, b \in G$ *zachodzi* $a \circ b \in G$;
- *działanie* $\circ$ *jest łączne;*
- *działanie* $\circ$ *posiada w* G *element neutralny;*
- *każdy element* G *posiada w* G *element symetryczny względem działania* $\circ$.

Jeżeli dodatkowo działanie $\circ$ *jest przemienne, to grupę* $(G, \circ)$ *nazywamy* **grupą abelową** (*przemienną*).

Przykład 1.3. *Każda z poniższych struktur jest grupą:*

(a) *zbiór liczb całkowitych (ale również wymiernych, rzeczywistych, zespolonych) z działaniem dodawania liczb;*
(b) *zbiór liczb rzeczywistych (ale również wymiernych, zespolonych) bez zera z działaniem mnożenia liczb;*
(c) *zbiór* $(\mathcal{B}(X), \circ)$, *tj. zbiór bijekcji określonych na niepustym zbiorze* X *o wartościach w* X, *z działaniem składania odwzorowań:* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, *dla* $x \in X$. *Elementem neutralnym jest funkcja identyczność* $\mathrm{id}_X : X \ni x \to x \in X$; *elementem symetrycznym dla bijekcji* f *jest funkcja do niej odwrotna* f^{-1}.

Grupy z punktów $(a), (b)$ *są abelowe; grupa z punktu* (c), *w przypadku, gdy zbiór* X *liczy więcej niż dwa elementy, nie jest abelowa.*

1.3. Pierścienia, ciała

Niech symbole $+$ oraz $\times$ oznaczają dowolne działania wewnętrzne w niepustym zbiorze F.

Definicja 1.6 (ciało). *Strukturę algebraiczną* $(F, +, \times)$ *nazywamy* **ciałem**, *jeżeli:*

- *para* $(F, +)$ *jest grupą abelową z elementem neutralnym* e_+,
- *para* $(F \setminus \{e_+\}, \times)$ *jest grupą,*
- *działanie* $\times$ *jest rozdzielne względem działania* $+$, *tj. dla dowolnych* $x, y, z \in F$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \quad \text{oraz} \quad (y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x).$$

Jeżeli dodatkowo działanie $\times$ *jest przemienne, to strukturę algebraiczną* $(F, +, \times)$ *nazywamy* **ciałem przemiennym**.

Strukturę $(F, +, \times)$, *która spełnia wszystkie warunki powyższej definicji, za wyjątkiem warunku, który gwarantuje, że każdy element zbioru* $F \setminus \{e_+\}$ *posiada element symetryczny względem działania* $\times$, *nazywamy* **pierścieniem**.

Przykład 1.4. *Niech* $\pi(\mathbb{R})$ *oznacza zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:*

$$\pi(\mathbb{R}) = \left\{x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R} \ \ (i = 0, \ldots, n), n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że struktura $(\pi(\mathbb{R}), +, \cdot)$, *gdzie* $+$ *oraz* $\cdot$ *to naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów, jest pierścieniem przemiennym. Struktura ta nie jest ciałem, gdyż wielomiany stopnia* $n \geqslant 1$ *nie posiadają w przestrzeni* $\pi(\mathbb{R})$ *elementów symetrycznych względem mnożenia.*

Przykład 1.5. *Każda z poniższych struktur jest ciałem (ćwiczenie):*

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *gdzie* $+$ *oraz* $\cdot$ *to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathbb{Q}[r], +, \cdot)$, *gdzie* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *oraz* $\mathbb{Q}[r] = \{x + ry : x, y \in \mathbb{Q}\}$, $a +$ *oraz* $\cdot$ *to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \circ)$, *gdzie* $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ni x \to ax \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}\}$ *oraz* $+$ i $\circ$ *to naturalne działania dodawania oraz składania funkcji.*

Przykład 1.6. *Na zakończenie wykażemy, że zbiór* $\mathbb{R}^2$ *z działaniami dodawania i mnożenia określonymi w następujący sposób*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

jest ciałem przemiennym.

Fakt, że para $(\mathbb{R}^2, +)$ *jest grupą abelową z elementem neutralnym* $e_+ = (0, 0)$ *wydaje się oczywisty – wewnętrzność, łączność oraz przemienność działania* $+$ *są prostymi konsekwencjami tych samych własności dodawania liczb rzeczywistych. Jako proste ćwiczenie pozostawiam wykazanie, że działanie*

$\cdot$ *jest wewnętrzne w zbiorze* $\mathbb{R}^2 \setminus \{e_+\}$*, łączne, przemienne oraz rozdzielne względem działania* $+$*. Rozwiązując układ równań*

$$\begin{cases} xe_1 - ye_2 = x \\ xe_2 + ye_1 = y \end{cases}$$

ze względu na niewiadome e_1, e_2*, znajdziemy element neutralny* $e_\cdot = (e_1, e_2)$ *dla działania* $\cdot$*. Po prostych rachunkach otrzymujemy* $e_\cdot = (1, 0)$*. Podobnie, rozwiązując układ równań*

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases}$$

ze względu na niewiadome x', y' *znajdziemy element symetryczny* (x', y') *(w przypadku działania oznaczanego* $\cdot$ *nazywany elementem odwrotnym) dla dowolnego niezerowego elementu* (x, y)*. Po prostych rachunkach otrzymujemy:*

$$(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Rozdział 2

Liczby zespolone

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ z działaniami $+$ oraz $\cdot$ określonymi poniżej:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \tag{2.1}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{2.2}$$

jest ciałem przemiennym (zob. przykład 1.6, str. 6); jest to tzw. **ciało liczb zespolonych**. Należy podkreślić, że różnica między zbiorami $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{C}$ nie polega na ich elementach – geometrycznie oba zbiory opisują tę samą płaszczyznę – lecz na *strukturze algebraicznej* wyznaczonej przez działania dodawania i mnożenia zdefiniowano w zbiorze $\mathbb{R}^2$. Innymi słowy, zbiór $\mathbb{R}^2$ oznacza jedynie zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych, w którym można zdefiniować nieskończenie wiele różnych działań dodawania i mnożenia. Dopiero wtedy, gdy działania te są określone wzorami (2.1)-(2.2) otrzymujemy ciało liczb zespolonych, oznaczane symbolem $\mathbb{C}$.

Przypomnijmy, że elementem neutralnym dla dodawania jest $\mathbf{0} = (0, 0)$, dla mnożenia $\mathbf{1} = (1, 0)$. Elementem przeciwnym dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$, elementem odwrotnym dla dowolnego niezerowego elementu (x, y) jest

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Dowolny element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ możemy interpretować jako punkt (wektor) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Ponieważ

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \tag{2.3}$$

zatem, utożsamiając liczbę zespoloną $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x oraz przyjmując oznaczenie $i = (0, 1)$, uwzględniając równość (2.3), otrzymujemy **postać kanoniczną** (dwumienną) liczby zespolonej

$$z = x + iy;$$

$x = \mathrm{Re}\,(z)$ nazywamy **częścią rzeczywistą**, $y = \mathrm{Im}\,(z)$ **częścią urojoną** liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają równe części rzeczywiste oraz części urojone. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**. Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Postać kanoniczna liczby zespolonej umożliwia dodawanie i mnożenie liczb zespolonych tak samo jak wielomianów, tzn. *podobny do podobnego* (w przypadku dodawania):

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

oraz *każdy przez każdy* (w przypadku mnożenia):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \dots$$

i dalej, uwzględniając warunek $i^2 = -1$,

$$\dots = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Porównaj te wyniki ze wzorami (2.1) oraz (2.2).

2.1. Sprzężenie oraz moduł liczby zespolonej

Z każdą liczbą zespoloną $z = x + iy$ możemy stowarzyszyć liczbę zespoloną $\overline{z} = x - iy$ nazywaną **sprzężeniem** liczby z oraz nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywaną **modułem** liczby zespolonej.

Poniżej zebrane zostały najważniejsze związki łączące liczbę zespoloną, jej części rzeczywistą i urojoną, jej moduł oraz jej sprzężenie. Własności te będziemy wielokrotnie wykorzystywać.

Twierdzenie 2.1. *Dla dowolnych liczb zespolonych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi:*

(*a*) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$;

(*b*) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$;

(*c*) $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$, $\operatorname{Im} z \leqslant |z|$;

(*d*) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ *oraz* $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$, *o ile* $z_2 \neq 0$;[1]

(*e*) $z\overline{z} = |z|^2$;

(*f*) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *oraz* $|z_1/z_2| = |z_1| / |z_2|$, *o ile* $z_2 \neq 0$;

(*g*) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Dowód: Uzasadnienie punktów (*a*)-(*f*) pozostawiam jako proste ćwiczenie. Aby uzasadnić punkt (*g*) przypuśćmy, że $z_1 + z_2 \neq 0$; w przeciwnym przypadku teza jest oczywista. Wykorzystując kolejno zależności (*b*), (*c*) oraz (*f*) możemy zapisać

$$1 = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \leqslant \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|}.$$

Stąd, po obustronnym pomnożeniu przez $|z_1 + z_2|$, otrzymujemy tezę. ∎

2.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy$ będzie dowolną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas

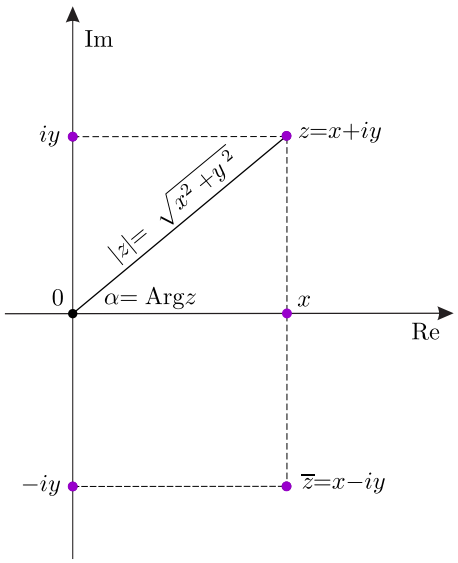
$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \tag{2.4}$$

gdzie kąt $\alpha = \arg(z)$, nazywany **argumentem** liczby zespolonej, wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}.$$

Można łatwo wykazać, że w dowolnym przedziale postaci $[r, r + 2\pi)$ lub $(r, r + 2\pi]$ $(r \in \mathbb{R})$ układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, a dowolne dwa jego rozwiązania różnią się o całkowitą wielokrotność 2π. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\operatorname{Arg}(z)$.

[1] Dzielenie przez liczbę zespoloną $z \neq 0$ rozumiemy jako mnożenie przez liczbę z^{-1}.



Wykres 1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej, jej modułu, sprzężenia oraz argumentu.

Przykład 2.1. *Dla liczby* $z = 1 - i$ *mamy:* $\operatorname{Re}(1-i) = 1$, $\operatorname{Im}(1-i) = -1$, $|1-i| = \sqrt{2}$. *Aby wyznaczyć argument liczby* $1 - i$ *musimy rozwiązać układ równań*

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest każda z liczb $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, *zatem* $\operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$. *Ostatecznie*

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Znając moduł $|z|$ oraz argument α liczby zespolonej z możemy zapisać ją w postaci

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

nazywanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej. Dwie niezerowe liczby zespolone są równe jeżeli mają równe moduły i argumenty główne (ich argumenty mogą się natomiast różnić o całkowitą wielokrotność 2π). Liczba 0 jest jedyną liczbą zespoloną jednoznacznie określoną przez jej moduł, a jej argument nie jest określony – każda liczba rzeczywista α spełnia powyższą zależność. Z tego powodu przyjmujemy, że każda liczba rzeczywista jest argumentem liczby 0, tj. $\arg(0) = \mathbb{R}$.

2.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\,|z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ &= |z_1|\,|z_2|\left((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2)\right) \end{aligned}$$

oraz dla $z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{|\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2|^2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2)\right). \end{aligned}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów

$$\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \mp \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$
$$\sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \pm \sin\alpha_2 \cos\alpha_1$$

otrzymujemy prosty przepis na iloczyn oraz iloraz liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej:
(a) $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$;
(b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$, gdzie $z_2 \neq 0$.

Ze wzorów tych wynikają następujące własności argumentu iloczynu oraz argumentu ilorazu liczb zespolonych:

- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;

ponadto, ponieważ $\operatorname{Arg}(z \cdot \overline{z}) = 0$,

- $\arg\overline{z} = -\arg z + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.2. Wzór de Moivre'a

Ze wzoru na iloczyn liczb zespolonych wyrażonych w postaci trygonometrycznej wynika, że

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

Zależność tę można w prosty sposób uogólnić uzyskując tzw. **wzór de Moivre'a** (prosty dowód indukcyjny pozostawiam jako ćwiczenie):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha), \qquad \text{dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 2.2. *Aby obliczyć wartość wyrażenia*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4}$$

wygodnie jest jego licznik i mianownik sprowadzić do postaci trygonometrycznej, a następnie zastosować do nich wzór de Moivre'a.

Niech $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ *oraz* $z_2 = -1 + i$. *Wówczas*

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \textit{oraz} \quad \begin{cases} \cos\alpha_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Zatem $\operatorname{Arg}(z_1) = -2\pi/3$ *oraz* $\operatorname{Arg}(z_2) = 3\pi/4$. *Mamy więc:*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4} = \frac{\left(2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right)^4} = \ldots$$

stosując teraz wzór de Moivre'a, otrzymujemy

$$\ldots = \frac{\left(2^9(\cos(-6\pi) + i\sin(-6\pi))\right)}{\left(2^2(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)\right)} = 2^7(\cos(-9\pi) + i\sin(-9\pi)) = -2^7.$$

2.3. Pierwiastek $n-$tego stopnia z liczby zespolonej

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą naturalną, a $c \in \mathbb{C}$ ustaloną liczbą zespoloną. Rozważmy następujące równanie

$$z^n = c. \tag{2.5}$$

Każdą liczbę zespoloną z dla której równanie (2.5) jest prawdziwe nazywać będziemy jego rozwiązaniem. Celem naszym będzie podanie przepisu pozwalającego znajdywać (wszystkie) rozwiązania równania (2.5).

Zapiszmy szukane rozwiązanie z oraz zadaną liczbę c w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha), \qquad c = |c| (\cos\gamma + i \sin\gamma),$$

a następnie podstawmy je do równania (2.5). Po zastosowaniu wzoru de Moivre'a otrzymujemy równanie

$$|z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = |c| (\cos\gamma + i \sin\gamma),$$

z którego natychmiast wynika, że

$$|z|^n = |c| \quad \text{oraz} \qquad n\alpha = \gamma + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

lub równoważnie:

$$|z| = \sqrt[n]{|c|} \quad \text{oraz} \qquad \alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ to równanie $z^n = c$ posiada n różnych rozwiązań $z_0, \ldots, z_{n-1}$ postaci*

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos\frac{\gamma + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\gamma + 2k\pi}{n} \right), \tag{2.6}$$

dla $k = 0, \ldots, n-1$; $\gamma \in \arg c$.

Uwaga Dla $c \in \mathbb{C}$ zapis $\sqrt[n]{c}$ oznacza zbiór (!) wszystkich liczb zespolonych, których n–ta potęga to c; jest to więc zbiór rozwiązań równania $z^n = c$, tj.

$$\sqrt[n]{c} = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\},$$

gdzie liczby z_k określa wzór (2.6). Ten sam zapis stosuje się również do funkcji pierwiastkowej

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+.$$

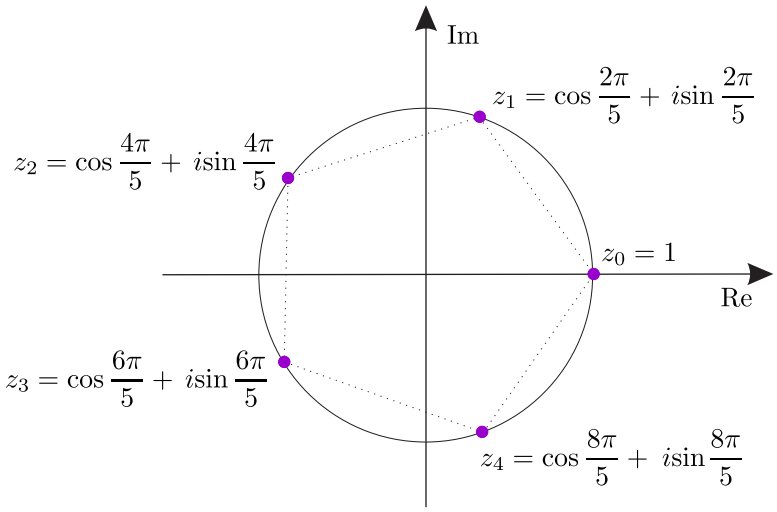
W tych dwóch przypadkach ten sam zapis ma zastosowanie do różnych obiektów: w pierwszym przypadku oznacza zbiór, w drugim liczbę.

2.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Użytecznym przepisem na rozwiązania równania (2.5) jest również, wynikająca ze wzoru (2.6), formuła

$$z_k = z_{k-1} \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} \right), \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

w której z_0 jest jednym z rozwiązań równania (2.5). Wynika z niej, że liczba zespolona (wektor płaszczyzny zespolonej) z_1 powstaje w wyniku obrotu z_0 o kąt $2\pi/n$; podobnie z_2 to wynik obrotu z_1 o ten sam kąt. Ogólnie, z_{k+1} powstaje z obrotu z_k o kąt $2\pi/n$. Innymi słowy, liczby $z_0, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = c$ stanowią wierzchołki $n-$kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $r = \sqrt[n]{|c|}$.



Wykres 2. Interpretacja geometryczna rozwiązań równania $z^5 = 1$.

Przykład 2.3. *Rozważmy równanie $z^3 = 1 - i$. Aby znaleźć jego rozwiązania posłużymy się wzorem (2.6). Ponieważ $|c| = |1 - i| = \sqrt{2}$ oraz $\gamma = \operatorname{Arg}(1 - i) = -\pi/4$ (zob. przykład 2.1), mamy*

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}.$$

Przykład 2.4. *Wykorzystując wyliczoną w poprzednim przykładzie wartość pierwiastka z_2 oraz stosując wzór (2.7), obliczymy jawne wartości pozostałych dwóch pierwiastków. Otrzymujemy odpowiednio:*

$$z_0 = z_2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$z_1 = z_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Przykład 2.5. *Rozważmy równanie $z^4|z| = -\overline{z}$. Jego rozwiązań poszukamy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Mamy*

$$z^4|z| = r^5(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$$

oraz

$$-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = r(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)).$$

Porównując moduły oraz argumenty tych liczb otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 4\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $r \in \{0, 1\}$ *oraz* $\alpha \in \{\pm\pi/5, \pm 3\pi/5, \pi\}$. *Ostatecznie, rozwiązaniem wyjściowego równania są liczby*

$$\left\{-1, 0, \cos\frac{\pi}{5} \pm i \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5} \pm i \sin\frac{3\pi}{5}\right\}.$$

2.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wychodząc od postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

oraz uwzględniając wzór (którego uzasadnienie wymaga znajomości szeregów potęgowych)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \quad (\text{dla } \alpha \in \mathbb{R})$$

otrzymujemy tzw. **postać wykładniczą liczby zespolonej**:

$$z = re^{i\alpha},$$

w której $r \geqslant 0$ to moduł, a $\alpha \in \mathbb{R}$ argument liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ oraz $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ zapisane w postaci wykładniczej są równe, jeżeli mają te same moduły, a ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π, tj.

$$r_1 e^{i\alpha_1} = r_2 e^{i\alpha_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ oraz } \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi.$$

Ciekawostka Zapisując liczbę -1 w postaci wykładniczej otrzymujemy zwarty wzór łączący pięć najważniejszych stałych matematycznych: 0 (element neutralny dodawania), 1 (element neutralny mnożenia), i, e oraz π

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Przez wielu, wzór ten jest uznawany za najpiękniejszy wzór matematyki.

2.5. Logarytm oraz potęgi zespolone ☠

Jak wynika z powyższych rozważań, dla liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Powyższe rozszerzenie definicji funkcji wykładniczej na zbiór liczb zespolonych umożliwia zdefiniowanie logarytmu dla argumentu zespolonego: dla $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log z = w \Leftrightarrow z = e^w.$$

Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = |z| e^{i\alpha} = e^{\ln|z|} e^{i\alpha} = e^{\ln|z| + i\alpha}$$

skąd wynika, że

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcję

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

nazywamy **gałęzią główną logarytmu**.

Przykład 2.6. *Mamy*

$$\operatorname{Log}(1) = 0, \quad \operatorname{Log}(e) = 1, \quad \operatorname{Log}(-1) = i\pi, \quad \operatorname{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

Powyższe rozszerzenie definicji logarytmu na liczby zespolone umożliwia zdefiniowanie potęg zespolonych liczb zespolonych:

$$z^w := e^{w \log z},$$

gdzie $z, w \in \mathbb{C}$ oraz $z \neq 0$.

Przykład 2.7. *Mamy*

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\operatorname{Log} i + i2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad dla\ k \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(-1) + i2k\pi)} = e^{\frac{1}{2}(i\pi + i2k\pi)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm i.\end{aligned}$$

Rozdział 3

Wielomiany – podstawowe wiadomości

Funkcję postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \tag{3.1}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$ nazywamy **wielomianem rzeczywistym stopnia** n; jeżeli współczynniki a_i $(i = 0, \ldots, n)$ przyjmują wartości zespolone, to funkcję tę nazywamy **wielomianem zespolonym**. Stopień wielomianu f oznaczamy jako $\deg f$ (ang. degree).

3.1. Jak efektywnie wyznaczać wartości wielomianu w punkcie?

Zauważmy, że wielomian f postaci (3.1) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} f(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = \\ &= a_0 + s\left(a_1 + \ldots + s\left(a_{n-1} + s a_n\right)\right). \end{aligned}$$

Stąd wynika następujący algorytm Hornera wyznaczania wartości wielomianu w punkcie:

$$\begin{aligned} &b_n = a_n; \\ &\texttt{for } i = n-1, \ldots, 0 : b_i = s \cdot b_{i+1} + a_i. \end{aligned}$$

Oczywiście $f(s) = b_0$. Kolejne wartości $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ najczęściej wylicza się z pomocą znanej ze szkoły średniej tzw. *tabeli Hornera*.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
s	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_1	b_0

Tabela 1. Kolejne wartości $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ tworzące tabelę Hornera.

Ciekawostka Koszt wyliczenia wartości $f(s)$ algorytmem Hornera to w najgorszym przypadku $2n$ działań arytmetycznych – po n dodawań oraz mnożeń. Można wykazać, że nie istnieje algorytm wyliczania wartości wielomianu zapisanego w postaci naturalnej wymagający mniejszej liczby operacji arytmetycznych; zob. A. Borodin, *Horner's rule is uniquely optimal*, in Theory of Machines and Computations, New York, Academic Press 1971.

3.2. Miejsca zerowe wielomianu

Każdą liczbę $s_0 \in \mathbb{C}$ dla której $f(s_0) = 0$ nazywamy **miejscem zerowym** (zerem, pierwiastkiem) wielomianu f. Łatwo wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Prawdziwe jest również, dużo trudniejsze do wykazania, następujące

Twierdzenie 3.1 (podstawowe twierdzenie algebry, Gauss 1799).
Każdy wielomian (zespolony) dodatniego stopnia ma miejsce zerowe.

Twierdzenie to w połączeniu z poniższym twierdzeniem (tzw. twierdzeniem Bézouta; nie jest ono autorstwa Bézouta, ale pod taką nazwą jest znane) odgrywa kluczową rolę w wielu działach matematyki.

Twierdzenie 3.2 (twierdzenie Bézouta).
Jeżeli s_0 jest pierwiastkiem wielomianu f oraz $\deg f > 0$, to wielomian ten dzieli się bez reszty przez wielomian $s \to s - s_0$, tj.

$$f(s) = (s - s_0)\, g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem stopnia $\deg f - 1$.

Można wykazać, że jeżeli liczba s_0 jest miejscem zerowym wielomianu f, to wyznaczone algorytmem Hornera wartości $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2, b_1$ to współczynniki wielomianu g powstałego w wyniku podzielenia wielomianu f przez wielomian $s \to s - s_0$, tj.

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = (s - s_0)(b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \ldots + b_2 s + b_1).$$

Mówimy, że liczba s_0 jest pierwiastkiem k–krotnym ($k \geqslant 1$) wielomianu f jeżeli wielomian ten jest podzielny (bez reszty) przez wielomian $s \to (s - s_0)^k$, ale nie jest podzielny przez wielomian $s \to (s - s_0)^{k+1}$. Wykorzystując pochodne, warunki te możemy równoważnie wyrazić jako

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = ... = f^{(k-1)}(s_0) = 0, \qquad f^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

Przykład 3.1. *Wyznaczymy te wartości parametru $a \geqslant 0$, dla których wielomian*

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + (a + 27)\, x - a^2 - 3a - 27$$

ma pierwiastki wielokrotne.
Ponieważ

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 18x + a + 27 = 3(x - 3)^2 + a,$$

zatem dla $a > 0$ wielomian φ, jako ciągła funkcja rosnąca spełniająca warunek

$$\varphi(x) \to -\infty \quad (x \to -\infty) \qquad \text{oraz} \qquad \varphi(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

posiada dokładnie jeden rzeczywisty pierwiastek; musi zatem posiadać również dwa pojedyncze pierwiastki nierzeczywiste. Z kolei, dla $a = 0$ mamy

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3,$$

czyli φ posiada jeden pierwiastek $x_0 = 3$ o krotności $k = 3$.

3.2.1. Pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych

Przypuśćmy, że współczynniki wielomianu $f(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ są liczbami całkowitymi. Łatwo wówczas stwierdzić, że liczba całkowita $s_0 \neq 0$ jest jego pierwiastkiem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-s_0(a_n s_0^{n-1} + \ldots + a_2 s_0 + a_1) = a_0. \tag{3.2}$$

Ponieważ liczba $a_n s_0^{n-1} + \ldots + a_2 s_0 + a_1$ jest całkowita, zatem warunek (3.2) oznacza, że s_0 jest dzielnikiem wyrazu a_0. Wynika stąd następujące

Stwierdzenie 3.3. *Pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych należy poszukiwać jedynie wśród dzielników jego wyrazu wolnego.*

Przykład 3.2. *Rozważmy wielomian $f(s) = 2s^3 + 4s^2 - 10s - 12$. Jego całkowitymi miejscami zerowymi mogą być jedynie dzielniki wyrazu wolnego $a_0 = -12$, tj. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Niezbędne obliczenia wykonamy wykorzystując algorytm Hornera. Wyniki zebrano w tabeli 2, z której wynika, że miejsca zerowe wielomianu f to $-1, 2, -3$.*

	2	4	−10	−12
$s=1$	2	6	−4	−16
$s=-1$	2	2	−12	0 ✓
$s=2$	2	8	6	0 ✓
$s=-2$	2	0	−10	8
$s=3$	2	10	20	48
$s=-3$	2	−2	−4	0 ✓

Tabela 2. Kolejne elementy wyznaczone algorytmem Hornera zastosowanym do znalezienia całkowitych miejsc zerowych wielomianu z przykładu 3.2.

Liczba wymierna $s_0 = m/k$ (zakładamy tu, że liczby m, k są nieskracalne, tj. nie posiadają nietrywialnego wspólnego dzielnika) jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_n \left(\frac{m}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1} \ldots + a_1 \frac{m}{k} + a_0 = 0,$$

lub równoważnie

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} k + \ldots + a_1 m k^{n-1} + a_0 k^n = 0.$$

Wynika stąd, że

$$a_0 k^n = -m\left(a_n m^{n-1} + a_{n-1} m^{n-2} k + \ldots + a_1 k^{n-1}\right) \tag{3.3}$$

oraz

$$a_n m^n = -k(a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m k^{n-2} + a_0 k^{n-1}). \tag{3.4}$$

Ponieważ m nie dzieli k^n zatem z warunku (3.3) wynika, że m jest dzielnikiem a_0; podobnie, z warunku (3.4) wynika, że k jest dzielnikiem a_n.

Stwierdzenie 3.4. *Jeżeli liczba p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ są liczbami nieskracalnymi, jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q jest dzielnikiem współczynnika wiodącego.*

3.3. Rozkład wielomianu na iloczyn wielomianów nierozkładalnych

Z *podstawowego twierdzenia algebry* oraz z *twierdzenia Bézouta* wynika, że **każdy wielomian stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków** (licząc z krotnościami); oznaczając te pierwiastki przez $s_1, \ldots, s_n$, wielomian (3.1) możemy zapisać w postaci iloczynowej

$$f(s) = a_n (s - s_1) \cdots (s - s_n). \tag{3.5}$$

Przykład 3.3. *Rozważmy wielomian $f(s) = s^4 + 1$. Jego pierwiastkami są liczby*

$$s_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

postać iloczynowa wielomianu f to

$$f(s) = \left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Jeżeli f jest wielomianem rzeczywistym, to dla dowolnej liczby $s \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned}\overline{f(s)} &= \overline{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \overline{a_n s^n} + \overline{a_{n-1} s^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 s} + \overline{a_0} = \\ &= a_n \overline{s}^n + a_{n-1} \overline{s}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{s} + a_0 = f(\overline{s});\end{aligned}$$

oznacza to między innymi, że jeżeli liczba zespolona jest miejscem zerowym wielomianu rzeczywistego, to liczba do niej sprzężona również. Z twierdzenia Bézouta wynika więc, że jeżeli s_0 jest zespolonym nierzeczywistym pierwiastkiem wielomianu f, to wielomian ten dzieli się bez reszty przez trójamian kwadratowy $(s-s_0)(s-\overline{s_0}) = s^2 - 2\operatorname{Re}(s_0)\, s + |s_0|^2$:

$$f(s) = \left(s^2 - 2\operatorname{Re}(s_0)\, s + |s_0|^2\right) g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem, takim że $\deg g = \deg f - 2$. W przypadku gdy wielomian (3.1) jest rzeczywisty, każde dwa czynniki jego rozkładu (3.5) zawierające pierwiastki parami sprzężone, tj. $s - s_i$ oraz $s - \overline{s_i}$, mogą zostać wymnożone. Otrzymamy wówczas rozkład dowolnego wielomianu rzeczywistego na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego oraz trójmianów kwadratowych nierozkładalnych (tzn. o ujemnym wyróżniku):

$$f(s) = a_n (s-s_1)^{l_1} \cdots (s-s_m)^{l_m} \left(s^2 + \alpha_1 s + \beta_1\right)^{k_1} \cdots \left(s^2 + \alpha_r s + \beta_r\right)^{k_r},$$

gdzie $s_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, m)$; $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, r)$; $\deg f = l_1 + \ldots + l_m + 2(k_1 + \ldots + k_r)$.

Przykład 3.4. *Rozważmy ponownie wielomian $f(s) = s^4 + 1$. Rozkład tego wielomianu na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej dwa uzyskamy z jego postaci iloczynowej:*

$$\begin{aligned} f(s) &= s^4 + 1 \\ &= \left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right)\left(s^2 - \sqrt{2}s + 1\right). \end{aligned}$$

3.4. Wzory Viète'a

Niech f będzie wielomianem (rzeczywistym lub zespolonym) stopnia $n \geqslant 1$ postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s-s_1) \cdots (s-s_n).$$

Poniższe wzory Viète'a ustalają związki pomiędzy współczynnikami wielomianu f, a jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n &= -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_1 s_2 + \cdots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \cdots + s_2 s_n + \cdots + s_{n-1} s_n &= \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_n &= (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}.$$

Przykład 3.5. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ xy - xz - yz = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

Wprowadzając pomocniczą niewiadomą $w = -z$ otrzymujemy układ równoważny postaci

$$\begin{cases} x + y + w = -1 \\ xy + xw + yw = 1 \\ xyw = -1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniami, na podstawie wzorów Viète'a, są pierwiastki wielomianu $s \to s^3 + s^2 + s + 1$. Ponieważ

$$s^3 + s^2 + s + 1 = s^2(s+1) + s + 1 = \left(s^2 + 1\right)(s+1) = (s+i)(s-i)(s+1),$$

zatem poszukiwaną trójką rozwiązań (x, y, w) *jest każdy z elementów*

$$(-1, i, -i), (-1, -i, i), (i, -i, -1), (-i, i, -1), (i, -1, -i), (-i, -1, i).$$

Uwzględniając, że $z = -w$, *rozwiązania* (x, y, z) *wyjściowego układu tworzą poniższe trójki:*

$$(-1, i, i), (-1, -i, -i), (i, -i, 1), (-i, i, 1), (i, -1, i), (-i, -1, -i).$$

3.5. Równania algebraiczne

Równanie postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_{0,} = 0, \quad a_n \neq 0 \tag{3.6}$$

nazywamy **równaniem algebraicznym stopnia** n. Zauważmy, że równanie (3.6) jest uogólnieniem równania $z^n = c$, którego rozwiązanie było treścią poprzedniego wykłady (zob. podrozdział 2.3). Ponieważ lewą stronę równania (3.6) można sprowadzić do postaci iloczynowej (3.5), wnioskujemy, że równanie (3.6) ma n rozwiązań (liczonych z krotnościami).

3.5.1. Równania algebraiczne stopnia pierwszego

Dla $n = 1$ jedynym rozwiązaniem równania (3.6) jest $x_0 = -a_0/a_1$.

3.5.2. Równania algebraiczne stopnia drugiego

Dla $n = 2$ lewą stronę równanania (3.6) możemy sprowadzić do postaci kanonicznej

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 = a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2}.$$

W przypadku, gdy wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$ jest rzeczywisty i nieujemny, rozwiązania równania (3.6) możemy wyrazić w postaci

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$

Jeżeli wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$ jest ujemny rozwiązania te przyjmują postać

$$x_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2}.$$

W ogólnym przypadku, przyjmując $\sqrt{\Delta} = \{\delta, -\delta\}$ mamy

$$x_1 = \frac{-a_1 - \delta}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + \delta}{2a_2}.$$

Przykład 3.6. *Wyznaczymy pierwiastki wielomianu* $f(z) = z^2 + (2 + i)z + 2i$.
Ponieważ

$$\Delta = (2 + i)^2 - 8i = 3 - 4i,$$

zatem musimy wyznaczyć liczbę zespoloną δ, *dla której* $\delta^2 = 3 - 4i$. *Przyjmując* $\delta = x + iy$, *gdzie* $x, y \in \mathbb{R}$, *otrzymujemy*

$$3 - 4i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Stąd $x^2 - y^2 = 3$ *oraz* $xy = -2$. *Zauważmy, że z równości* $3 - 4i = (x + iy)^2$ *wynika*

$$5 = |3 - 4i| = |(x + iy)^2| = x^2 + y^2.$$

Otrzymujemy zatem dwie zależności

$$x^2 - y^2 = 3, \qquad x^2 + y^2 = 5,$$

z których, pod dodaniu stronami, wynika $x = -2$ *lub* $x = 2$*, a po odjęciu stronami,* $y = -1$ *lub* $y = 1$*. Ponieważ* $xy < 0$*, zatem*

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3 - 4i} = \{-\delta, \delta\} = \{-2 + i, 2 - i\}.$$

Ostatecznie, poszukiwane miejsca zerowe wielomianu f *to*

$$x_1 = \frac{-2 - i + 2 - i}{2} = -i, \qquad x_2 = \frac{-2 - i - 2 + i}{2} = -2.$$

3.5.3. Równania algebraiczne stopnia trzeciego ☠

Aby uzyskać ogólne wzory na rozwiązania równania algebraicznego stopnia trzeciego wygodnie jest przyjąć, nie tracąc ogólności, że $a_3 = 1$:

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{3.7}$$

Dokonując podstawienia

$$x = y - \frac{a_2}{3}$$

równanie (3.7) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2 \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1 \left(y - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 \\ &= y^3 + \frac{3a_1 - a_2^2}{3} y - \frac{9a_1 a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Przyjmując

$$p = \frac{3a_1 - a_2^2}{3}, \quad q = \frac{9a_1 a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}$$

otrzymujemy równanie

$$y^3 + yp - q = 0, \tag{3.9}$$

które, po dokonaniu kolejnego podstawienia

$$y = z - \frac{p}{3z},$$

prowadzi do równania

$$\left(z^3\right)^2 - qz^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0,$$

które jest równaniem algebraicznym stopnia drugiego względem niewiadomej $w = z^3$

$$w^2 - qw - \frac{1}{27} p^3 = 0.$$

Równanie to potrafimy już rozwiązać uzyskując poszukiwane rozwiązania dowolnego równania algebraicznego stopnia trzeciego – tzw. wzory Cardano.

Przykład 3.7. *Wyznaczymy pierwiastki wielomianu* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 18$*. Dokonując podstawienia* $x = y + 2$ *otrzymujemy*

$$\begin{aligned} 0 = f(y+2) &= (y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 18(y+2) - 18 \\ &= y^3 + 6y + 2. \end{aligned}$$

Ponieważ $p = 6$*,* $q = -2$*, zatem wprowadzając kolejną zamianę zmiennych* $y = z - 2/z$*, otrzymujemy*

$$\begin{aligned} 0 &= \left(z - \frac{2}{z}\right)^3 + 6\left(z - \frac{2}{z}\right) + 2 = z^3 - \frac{8}{z^3} + 2 = \\ &= z^{-3}\left(z^6 + 2z^3 - 8\right). \end{aligned}$$

Oznacza to, że pierwiastki wyjściowego wielomianu znajdziemy wyznaczając zera wielomianu $z \to z^6 + 2z^3 - 8$. *Podstawiając* $w = z^3$ *otrzymujemy*

$$0 = w^2 + 2w - 8 = (w+1)^2 - 9 = (w-2)(w+4),$$

skąd

$$z^3 - 2 = 0 \qquad \vee \qquad z^3 + 4 = 0.$$

Mamy kolejno

$$\begin{aligned}
0 = z^3 - 2 &= \left(z - \sqrt[3]{2}\right)\left(z^2 + \sqrt[3]{2}z + \sqrt[3]{4}\right) = \\
&= \left(z - \sqrt[3]{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{4}}\right)\left(z + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{4}}\right), \\
0 = z^3 + 4 &= \left(z + \sqrt[3]{4}\right)\left(z^2 - \sqrt[3]{4}z + \sqrt[3]{16}\right) = \\
&= \left(z + \sqrt[3]{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{16}}\right)\left(z - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} + i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{16}}\right).
\end{aligned}$$

Dla każdego z sześciu wyznaczonych powyżej pierwiastków z *wyliczamy kolejno wartości* $y = z - 2/z$, *a następnie* $x = y + 2$. *Otrzymujemy sześć pierwiastków*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2, \quad x_{2,3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 2 \pm i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\right), \\
x_4 &= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2, \quad x_{5,6} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 2 \pm i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

Zauważmy na koniec, że pierwiastki x_1, x_2, x_3 *równe są odpowienio pierwiastkom* x_4, x_5, x_6. *Ponieważ wyjściowy wielomian był stopnia trzeciego więc jego trzy różne miejsca zerowe to* x_1, x_2, x_3.

3.5.4. Równania algebraiczne stopnia czwartego ☠

Przyjmijmy, nie tracąc ogólności, że $a_4 = 1$, tj.

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{3.10}$$

Dokonując podstawienia $x = y - \dfrac{a_3}{4}$ równanie (3.10) przekształcamy do postaci zredukowanej

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{3.11}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
p &= a_2 - \frac{3}{8}a_3^2, \\
q &= \frac{1}{8}a_3^3 - \frac{1}{2}a_2a_3 + a_1, \\
r &= -\frac{3}{256}a_3^4 + \frac{1}{16}a_2a_3^2 - \frac{1}{4}a_1a_3 + a_0.
\end{aligned}$$

Równanie (3.11) przepisujemy w postaci równoważnej

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

a następnie

$$\left(y^2 + p\right)^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Stąd, dla dowolnego y_0, mamy

$$\begin{aligned}
\left(y^2 + p + y_0\right)^2 &= \left(y^2 + p\right)^2 + 2y_0\left(y^2 + p\right) + y_0^2 = \\
&= py^2 - qy - r + p^2 + 2y_0\left(y^2 + p\right) + y_0^2 = \\
&= (p + 2y_0)\,y^2 - qy + \left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Dobierzmy teraz y_0 w ten sposób, aby wielomian

$$y \to (p + 2y_0)\, y^2 - qy + \left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right)$$

posiadał jeden pierwiastek podwójny, tj. aby

$$\Delta\,(y_0) = q^2 - 4\,(p + 2y_0)\left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right) = 0. \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) jest równaniem stopnia trzeciego, które potrafimy już rozwiązać otrzymując poszukiwaną wartość y_0. Dla tej wartości, równanie (3.12) przyjmuje postać

$$\left(y^2 + p + y_0\right)^2 = (p + 2y_0)\left(y - \frac{q}{2\,(p + 2y_0)}\right)^2,$$

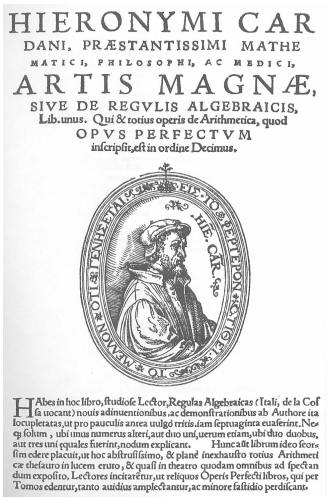
z którą umiemy sobie już poradzić.

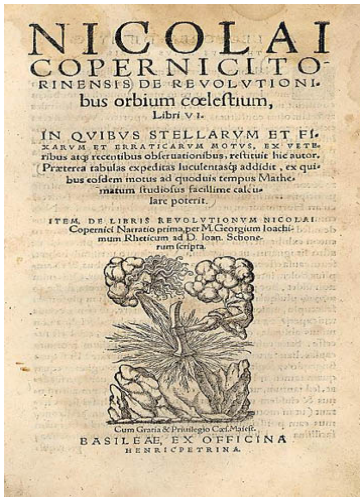
Ogólne wzory (uzyskane przez Ferrari, opublikowane przez Cardano w *Artis Magnae* w 1545 r.) pozwalające wyznaczać analityczną postać dowolnego równania stopnia czwartego są bardzo złożone.

3.5.5. Równania algebraiczne stopnia $n \geqslant 5$

Dla równań algebraicznych stopnia $n \geqslant 5$ wykazano, że podanie ogólnych wzorów na ich rozwiązania wykorzystujących wyłącznie działania dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz pierwiastkowanie nie jest możliwe (prace Abela, Ruffiniego, Galois'a).

Ciekawostka Liczba będąca rozwiązaniem równania algebraicznego o całkowitych współczynnikach nazywana jest **liczbą algebraiczną.** Na przykład $\sqrt[3]{2}$, jako rozwiązanie równania $s^3 - 2 = 0$, jest liczbą algebraiczną; z kolei liczby π, e czy $2^{\sqrt{2}}$ nie są liczbami algebraicznymi (dowody ich niealgebraiczności są bardzo trudne). Zbiór wszystkich liczb algebraicznych (jest ich przeliczalnie wiele), z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb, tworzy ciało.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.


NICOLAI
COPERNICI TO-
RINENSIS DE REVOLVTIONI-
bus orbium cœlestium,
Libri VI.
IN QVIBVS STELLARVM ET FI-
XARVM ET ERRATICARVM MOTVS, EX VETE-
ribus atq; recentibus observationibus, restituit hic autor.
Præterea tabulas expeditas luculentasq; addidit, ex quibus eosdem motus ad quoduis tempus Mathematum studiosus facillime calcu-
lare poterit.
ITEM, DE LIBRIS REVOLVTIONVM NICOLAI
Copernici Narratio prima, per M. Georgium Ioachimum Rheticum ad D. Ioan. Schonerum scripta.
Cum Gratia & Priuilegio Cæs. Maiest.
BASILEAE, EX OFFICINA
HENRICPETRINA.


ANDREAE VESALII
BRVXELLENSIS, SCHOLÆ
medicorum Patauinæ professoris, de
Humani corporis fabrica
Librorum
BASILEAE.

Najważniejsze dzieła naukowe renesansu: *Artis Magnae* H. Cardano (1545 r.), *De revolutionibus orbium coelestium* M. Kopernika (1543 r.) oraz *De humani corporis fabrica* A. Wezaliusza (1555 r.).

Rozdział 4

Przestrzenie wektorowe

Niech X będzie zbiorem niepustym.

Definicja 4.1. *Trójkę $(X, +, \cdot)$ nazywamy* **przestrzenią wektorową** *(liniową) nad ciałem $\mathbb{F}$, jeżeli:*

(a) $+ : X \times X \to X$ jest działaniem wewnętrznym w X, takim że struktura $(X, +)$ jest grupą abelową;

(b) $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ jest działaniem zewnętrznym w X, takim że poniższe równości zachodzą dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

- $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$;
- $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$;
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
- $1 \cdot x = x$.

Elementy przestrzeni wektorowej nazywamy **wektorami**; elementy ciała nazywamy **skalarami**.

Przykład 4.1. *Każda z poniższych struktur jest rzeczywistą przestrzenią wektorową:*

(a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n);$$

(b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb;

(c) $(\mathcal{F}(A, \mathbb{R}), +, \cdot)$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.

Przykład 4.2. *Poniższe struktury nie są przestrzeniami wektorowymi:*

(a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ z działaniami:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, 0, \ldots, 0);$$

(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 1\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.

Łatwo wykazać, że w dowolnej przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ prawdziwe są następujące zależności: dla dowolnych $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$

$$0 \cdot x = \alpha \cdot 0 = 0; \quad \alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ lub } x = 0; \quad -(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x).$$

Uwaga W powyższych warunkach występują dwa różne zera – jedno to element neutralny dla dodawania w grupie $(X,+)$, drugie to element neutralny dla dodawania w grupie $(\mathbb{F},+)$. Podobnie, znaki „$-$" występujące w ostatnim warunku to dwa różne minusy – pierwszy oraz trzeci oznacza element przeciwny dla elementu grupy $(X,+)$, drugi wskazuje element przeciwny w grupie $(\mathbb{F},+)$.

4.1. Podprzestrzeń liniowa

Niech $(X,+,\cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz niech $Y \subset X$.

Definicja 4.2. *Jeżeli zbiór Y oraz działania $+$ i $\cdot$ przestrzeni X spełniają warunki:*
- *dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{F}$ oraz $x \in Y$: $\alpha \cdot x \in Y$,*
- *dla dowolnych $x, y \in Y$: $x + y \in Y$,*
- $0 \in Y$,

to trójkę $(Y,+,\cdot)$ nazywamy **podprzestrzenią liniową** *przestrzeni $(X,+,\cdot)$.*

Łatwo pokazać, że każda podprzestrzeń liniowa Y przestrzeni liniowej X jest przestrzenią liniową z działaniami indukowanymi z przestrzeni X.

Przykład 4.3. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ będą dowolnymi ustalonymi liczbami. Zbiór*

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0\right\}$$

z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1(a).

Przykład 4.4. *Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0\}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb zespolonych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1(b).*

Przykład 4.5. *Zbiór $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x\ f(x) = f(-x)\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1.(c) (dla $A = \mathbb{R}$).*

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór pusty tworzy przestrzeń liniową, ale nie jest on podprzestrzenią liniową żadnej przestrzeni.

Przykład 4.6. *Niech $(X,+,\cdot)$ będzie niepustą przestrzenią liniową. Wówczas struktura $(\{0\},+,\cdot)$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią liniową przestrzeni $(X,+,\cdot)$; symbol 0 to element neutralny w grupie $(X,+)$.*

4.2. Liniowa niezależność wektorów

Niech $(X,+,\cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$.

Definicja 4.3. *Mówimy, że wektory $v_1, \ldots, v_n \in X$ są* **liniowo niezależne**, *jeżeli dla dowolnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ zachodzi:*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{4.1}$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne są **liniowo zależne**.

Wyrażenie

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni wektorowej X, tj. zbiór

$$\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_n\} := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\},$$

tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni X (ćwiczenie).

Zauważmy, że zaprzeczenie warunku (4.1), tj. liniowa zależność wektorów $v_1, \ldots, v_n$, oznacza, że przynajmniej jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład 4.7. *Aby sprawdzić liniową zależność wektorów*

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 1), v_3 = (3, -1, -3)$$

należy rozwiązać, wynikające z warunku (4.1)*, równanie*

$$\alpha_1 (1, 0, -1) + \alpha_2 (-1, 1, 1) + \alpha_3 (3, -1, -3) = (0, 0, 0)$$

ze względu na niewiadome $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$*. Równanie to prowadzi do układu równań*

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest: $\alpha_1 = -2t$, $\alpha_2 = \alpha_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$*. Oznacza to, że warunek* (4.1) *nie jest spełniony, czyli badane wektory są liniowo zależne. Istotnie, z postaci rozwiązania wynika, że* $v_2 = 2v_1 - v_3$*.*

4.3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą ustalonymi wektorami przestrzeni wektorowej X. Jeżeli każdy element y przestrzeni X można wyrazić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$, tzn.

$$y = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \tag{4.2}$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, to mówimy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ **generują** przestrzeń X. Każdy liniowo niezależny ciąg (istotna kolejność) wektorów przestrzeni wektorowej X generujący tę przestrzeń nazywamy jej **bazą**. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej X oznaczamy $\dim X$ i nazywamy **wymiarem** przestrzeni wektorowej. Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ występujące w równaniu (4.2) nazywamy **współrzędnymi wektora** y w bazie $v_1, \ldots, v_n$. Współrzędne te są wyznaczone jednoznacznie. Aby to wykazać przypuśćmy, że wektor y postaci (4.2) można również zapisać jako

$$y = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n. \tag{4.3}$$

Pokażemy, że wówczas $\alpha_i = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Z zależności (4.2)-(4.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n - (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n. \end{aligned}$$

Liniowa niezależność wektorów $v_1, \ldots, v_n$ prowadzi do warunków $\alpha_i - \beta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Własności bazy przestrzeni wektorowej

(i) *Każda niepusta przestrzeń wektorowa posiada bazę.*
(ii) *Jeżeli wektory* $v_1, \ldots, v_n$ *są bazą pewnej przestrzeni liniowej, to dla dowolnych niezerowych skalarów* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *wektory* $\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n$ *również są bazę tej przestrzeni.*
(iii) *Wszystkie bazy tej samej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*
(iv) *Wektory* $v_1, \ldots, v_n$ $n-$*wymiarowej przestrzeni liniowej są jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy są wektorami liniowo niezależnymi.*
(v) *Każdy ciąg wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być rozszerzony do jej bazy.*

Przykład 4.8. *Rozważmy rzeczywistą przestrzeń liniową* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*. Dla dowolnego wektora* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *mamy:*

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n (0, \ldots, 0, 1), \end{aligned}$$

zatem wektory $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ *generują przestrzeń* $\mathbb{R}^n$*; ponieważ wektory te są również liniowo niezależne, więc stanowią one bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *– jest to tzw.* **baza kanoniczna**. *Wniosek:* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Przykład 4.9. *Rozważmy rzeczywistą przestrzeń liniową* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. *Z postaci algebraicznej liczby zespolonej wynika, że każda liczba zespolona jest kombinacją liniową wektorów* $1, i$; *wektory te są liniowo niezależne, więc stanowią bazę przestrzeni* $\mathbb{C}$. *Wniosek:* $\dim \mathbb{C} = 2$.

Przykład 4.10. *Niech*

$$Y = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x + y + z = 0\right\}.$$

Łatwo wykazać, że Y *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathbb{R}^3$; *wyznaczmy więc jej bazę. Rozwiązując układ równań wynikający z definicji przestrzeni* Y, *otrzymamy:* $x = t, y = -t, z = 0$ $(t \in \mathbb{R})$. *Dowolny element przestrzeni* Y *ma więc postać:* $(t, -t, 0) = t\,(1, -1, 0)$. *Oznacza to, że* Y *jest jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *której bazą jest wektor* $(1, -1, 0)$.

Przykład 4.11. *Niech* π_n *oznacza zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż* n. *Łatwo sprawdzić, że struktura* $(\pi_n, +, \cdot)$, *gdzie* $+$ *oraz* $\cdot$ *to naturalne działania dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę, jest rzeczywistą przestrzenią wektorową. Bazę tej przestrzeni tworzą jednomiany*

$$x \to 1, \quad x \to x, \quad x \to x^2, \quad \ldots \quad x \to x^n;$$

mamy więc $\dim \pi_n = n + 1$.

Niech teraz, dla $a \in \mathbb{R}$,

$$V_a = \{w \in \pi_n \colon w\,(a) = 0\}.$$

Łatwo wykazać, że V_a *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* π_n. *Z twierdzenia Bézouta wynika, że dowolny element* $w \in V_a$ *można zapisać w postaci*

$$w\,(x) = (x - a)\,g\,(x), \tag{4.4}$$

dla pewnego $g \in \pi_{n-1}$. *Ponieważ bazą przestrzeni* π_{n-1} *są jednomiany* $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, *zatem na podstawie* (4.4), *wielomian* w *jest kombinacją liniową wielomianów*

$$x \to x - a, \quad x \to x(x - a), \quad x \to x^2(x - a), \quad \ldots \quad x \to x^{n-1}(x - a);$$

Wielomiany te są liniowo niezależne, zatem stanowią bazę przestrzeni V_a; *stąd* $\dim V_a = n$.

Ćwiczenie Wyznacz bazę oraz wymiar przestrzeni V_a w przypadku, gdy $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Rozdział 5

Macierze

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $a_{ij} \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F}$ to ciało przemienne, nazywamy **macierzą** (rzeczywistą, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; zespoloną, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

będziemy też stosować uproszczoną notację $A = [a_{ij}]_{n\times m}$. Macierz (5.1) to macierz wymiaru $n \times m$ – ma ona n wierszy (poziome) i m kolumn (pionowe). Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach z ciała $\mathbb{F}$ będziemy oznaczać $M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową stopnia** n. **Macierz zerowa** to macierz złożona z samych zer: $\mathbf{0} = [0]_{n\times m}$. Macierz kwadratowa, której wszystkie elementy – za wyjątkiem być może tych stojących na przekątnej – są równe zero nazywamy **macierzą diagonalną**:

$$\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną z jedynkami na przekątnej nazywamy **macierzą jednostkową** (ozn. I lub I_n, aby podkreślić, że jest to macierz wymiaru $n \times n$):

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy kwadratowej stojące pod (nad) przekątną są równe zero to macierz tę nazywamy macierzą **trójkątną górną (trójkątną dolną)**. Macierze diagonalne są jednocześnie trójkątne górne i trójkątne dolne.

5.1. Działania na macierzach

5.1.1. Dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar

W zbiorze macierzy $M_{n\times m}(\mathbb{F})$ wprowadza się naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar:

- dla $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ oraz $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ przyjmujemy $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times m}$;
- dla $\alpha\in\mathbb{F}$ oraz $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ przyjmujemy $\alpha A=[\alpha a_{ij}]_{n\times m}$.

Przykład 5.1. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy $M_{n\times m}(\mathbb{F})$ z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz $\dim M_{n\times m}(\mathbb{F})=nm$ (ćwiczenie).

5.1.2. Mnożenie macierzy

Niech $A=[a_{ij}]\in M_{n\times k}(\mathbb{F})$, $B=[b_{ij}]\in M_{k\times m}(\mathbb{F})$. Możemy wówczas zdefiniować macierz $C=[c_{ij}]\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$:

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}, \quad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m) \tag{5.2}$$

będącą iloczynem macierzy A i B; ozn. $C=AB$.

Uwaga Aby można było wyznaczyć macierz AB, liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B.

Przykład 5.2. *Mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 2+0\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot 0+0\cdot 1 \\ 1\cdot 1-2\cdot 2+1\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot(-2) & 2\cdot 0+0\cdot 1 \\ -1\cdot 2+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot(-2) & -1\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu macierzy

Zakładamy, że wymiary macierzy A, B, C występujących w poniższych warunkach są takie, że wszystkie wyrażenia mają sens.

Łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, że działanie określone wzorem (5.2)

- jest łączne:

$$A\,(BC)=(AB)\,C;$$

- jest rozdzielne względem dodawania:
$$A(B+C) = AB + AC;$$
- w przestrzeni macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru posiada element neutralny – jest nim macierz jednostkowa;
- nie jest przemienne, tj. na ogół:
$$AB \neq BA.$$

Można również łatwo wykazać, że
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ lub $B = 0$;
- $AB = AC, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$.

5.1.3. Macierz transponowana

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^T \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, gdzie
$$A^T = [a_{ij}]^T := [a_{ji}],$$
nazywamy **macierzą transponowaną**. Kolumny (wiersze) macierzy A są więc wierszami (kolumnami) macierzy A^T.

Własności operacji transponowania macierzy:

- dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ zachodzi
$$(A+B)^T = A^T + B^T;$$
- dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{F}$ oraz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ zachodzi
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T;$$
- dla dowolnych macierzy $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ zachodzi
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

5.1.4. Macierz sprzężona

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^* \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ określoną wzorem
$$A^* = [a_{ij}]^* := [\overline{a_{ji}}],$$
nazywamy **macierzą sprzężoną**.

Własności operacji sprzężenia macierzy:

- dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ zachodzi
$$(A+B)^* = A^* + B^*;$$
- dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ zachodzi
$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*;$$
- dla dowolnych macierzy $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C}), B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ zachodzi
$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Przykład 5.3. *Dla macierzy*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2-i & -1 \end{pmatrix}$$
mamy
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1-i & 2 & 2+i \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Wyznacznik macierzy

5.2.1. Definicja aksjomatyczna

Niech $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ lub $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Definicja 5.1. *Funkcję* $\det : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *spełniającą warunki*

(i) *dla macierzy kwadratowej* $A=[a_{ij}]=[A_1,\ldots,A_n]$, *gdzie* A_i *oznacza* i*-tą kolumnę* A, *przekształcenie* $A_i \to \det[A_1,\ldots,A_n]$ $(i=1,\ldots,n)$ *jest liniowe, tzn. dla* $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$

$$\det[A_1,\ldots,\alpha A_i+\beta B_i,\ldots,A_n]=\alpha\det[A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n]+\beta\det[A_1,\ldots,B_i,\ldots,A_n];$$

(ii) $\det$ *jest funkcją alternującą, tzn. dla* $A_i=A_j$ *(dla wszystkich* $i\neq j$*)*

$$\det[A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots,A_n]=0;$$

(iii) $\det(I_n)=1$

nazywamy **wyznacznikiem**.

Z powyższej definicji łatwo otrzymać następujący wniosek.

Wniosek 5.1. *Jeżeli w macierzy kwadratowej zamienimy miejscami dwie kolumny (dwa wiersze), to jej wyznacznik zmieni znak na przeciwny.*

Dowód: Rozważmy macierz powstałą z macierzy A przez dodanie do jej i–tej oraz j–tej kolumny odpowiednio kolumny j–tej oraz i–tej:

$$[\ldots,A_i+A_j,\ldots,A_i+A_j,\ldots].$$

Z warunku (ii) powyższej definicji wynika

$$\det[\ldots,A_i+A_j,\ldots,A_i+A_j,\ldots]=0.$$

Dodatkowo, z warunków (i) oraz (ii):

$$\begin{aligned}
0 &= \det[\ldots,A_i+A_j,\ldots,A_i+A_j,\ldots]\\
&= \det[\ldots,A_i,\ldots,A_i+A_j,\ldots]+\det[\ldots,A_j,\ldots,A_i+A_j,\ldots]\\
&= \det[\ldots,A_i,\ldots,A_i,\ldots]+\det[\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots]+\\
&\quad+\det[\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots]+\det[\ldots,A_j,\ldots,A_j,\ldots]\\
&= \det[\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots]+\det[\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots],
\end{aligned}$$

skąd ostatecznie wynika równość

$$\det[\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots]=-\det[\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots],$$

która kończy dowód. ∎

Przykład 5.4. *Rozważmy macierz* $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *postaci*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}.$$

Na podstawie definicji 5.1 mamy

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad + 2 \left(2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad - \left(2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= 2 \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad + 4 \left(-2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + 2 \left(-2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad - 2 \left(-2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad - \left(-2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

5.2.2. Postać permutacyjna wyznacznika ☠

Kolumny macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ są elementami przestrzeni $\mathbb{F}^n$; możemy więc wyrazić je jako kombinacje liniowe wektorów bazy kononicznej $e_1, \ldots, e_n$:

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Stąd

$$\det A = \det\left[\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} e_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n} e_{k_n}\right] \overset{(i)}{=} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1 1} \ldots a_{k_n n} \det\left[e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}\right]$$
$$\overset{(ii)-(iii)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

gdzie S_n to zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$ to znak permutacji σ, tj. $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, gdzie s to liczba transpozycji (transpozycja to zamiana kolejności dwóch elementów) tworzących permutację σ.

Twierdzenie 5.2. *Istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki (i)–(iii) definicji 5.1; funkcja ta określona jest wzorem*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}. \tag{5.3}$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(i) < i$, to dla pewnego $j \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(j) > j$. Stąd oraz ze wzoru (5.3) wynika następujący

Wniosek 5.3. *Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej.*

5.2.3. Własności wyznacznika macierzy

Dla dowolnych $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $\alpha \in \mathbb{F}$ zachodzi

- $\det A = \det A^T$;
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;
- *jeżeli do któregoś wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn), to wyznacznik się nie zmieni;*
- *zamiana kolejności dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

5.2.4. Metoda Laplace'a

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n.

Definicja 5.2. **Minorem** *elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} macierzy kwadratowej stopnia $n-1$ utworzonej z macierzy A przez usunięcie z niej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Liczbę $(-1)^{i+j} M_{ij}$ nazywamy* **dopełnieniem algebraicznym** *elementu a_{ij}.*

Twierdzenie 5.4 (Laplace). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geqslant 2$:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } j = 1, \ldots, n$$

oraz

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } i = 1, \ldots, n.$$

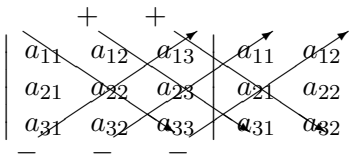
Przykład 5.5. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, ze wzoru (5.3) otrzymujemy:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Przykład 5.6. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ zastosujemy metodę Laplace'a (do pierwszej kolumny). Mamy*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Ten sam wynik uzyskamy stosując tzw. **schemat Sarrusa**.



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Schemat 1. Metoda Sarrusa obliczania wyznacznika macierzy 3×3.

Ciekawostka Stosując do macierzy kwadratowej stopnia n metodę Laplace'a obliczania wyznacznika, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy stopnia $n-1$; każdy z tych wyznaczników wymaga z kolei obliczenia $n-1$ wyznaczników stopnia $n-2$, itd. Obliczenie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n wymaga więc obliczenia $n!/2$ wyznaczników macierzy kwadratowych stopnia 2; dla macierzy stopnia $n = 20$ daje to ponad 10^{18} wyznaczników 2×2. Superkomputer wykonujący 10^{15} operacji zmiennopozycyjnych na sekundę potrzebowałby na obliczenie tego wyznacznika 50 minut. Z kolei, sięgając po przedstawioną poniżej metodę przekształceń elementarnych obliczymy ten wyznacznik w czasie $10^{-11}s$. **Dla dużych n metoda Laplace'a jest więc wysoce niepraktyczna**.

5.2.5. Metoda przekształceń elementarnych

Metoda przekształceń elementarnych obliczania wyznacznika polega na przekształceniu danej macierzy do postaci trójkątnej. W przekształceniu tym wykorzystujemy jedynie tzw. **operacje elementarne** na wierszach macierzy:

- dodawanie do wybranego wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy;
- zamiana kolejności wierszy.

Przykład 5.7. *Mamy:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \to w_3 - w_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 10w_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = 35.$$

Metoda przekształceń elementarnych jest jedną z najbardziej efektywnych metod obliczania wyznaczników macierzy. Jej numerycznie akceptowalna wersja wymaga wykonania tylko $O(n^3)$ operacji arytmetycznych!

5.3. Macierz odwrotna

Definicja 5.3. *Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ taką że $\det A \neq 0$ nazywamy* **macierzą nieosobliwą**; *w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest* **macierzą osobliwą**.

Przypomnijmy, że iloczyn macierzy jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n. Łatwo sprawdzić, że jest to również działanie łączne, którego elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n stopnia n (dowód przez bezpośredni rachunek). Nasuwa się więc następujące pytanie: *Czy każda macierz kwadratowa posiada element odwrotny względem mnożenia?*

Przykład 5.8. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad oraz \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że nie dla każdej macierzy istnieje element odwrotny.

Definicja 5.4. *Jeżeli dla macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ istnieje macierz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, taka że*

$$AX = XA = I_n,$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n, to macierz tę nazywamy **macierzą odwrotną** *do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Twierdzenie 5.5. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ posiadała macierz odwrotną jest warunek* $\det A \neq 0$.

Własności operacji odwracania macierzy $(A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}))$**:**

- $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$;
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$ oraz $\left(A^{-1}\right)^{*} = \left(A^{*}\right)^{-1}$.

5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

Metoda macierzy dopełnień algebraicznych

Poniżej przedstawimy algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} oparty na macierzy dopełnień algebraicznych.

Krok 1. *Obliczamy* $\det A$. *Jeżeli* $\det A = 0$, *to macierz A^{-1} nie istnieje; jeżeli* $\det A \neq 0$, *przechodzimy do kroku drugiego.*
Krok 2. *Wyznaczamy macierz minorów* $A_1 = [M_{ij}]$;
Krok 3. *Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych* $A_2 = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]$;
Krok 4. *Wyznaczamy macierz dołączoną* $\operatorname{adj}(A) = A_2^T$;
Krok 5. *Wyznaczamy macierz* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$.

Przykład 5.9. *Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -5$ *zatem macierz odwrotna istnieje. Mamy więc:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{M_{ij}}{\to} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \overset{(-1)^{i+j}}{\to} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{T}{\to}$$
$$\overset{T}{\to} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{\det A}}{\to} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Przykład 5.10. *Dla macierzy* $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det A = ad - bc \neq 0$$

mamy

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{M_{ij}}{\to} \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} \overset{(-1)^{i+j}}{\to} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \overset{T}{\to} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{\det A}}{\to} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Metoda Gaussa

Metoda Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej polega na tym, aby z danej macierzy uzyskać macierz jednostkową. Te same operacje, które wykonujemy na macierzy A przeprowadzamy jednocześnie na macierzy jednostkowej. W momencie gdy wyjściowa macierz przyjmuje postać macierzy jednostkowej, macierz jednostkowa staje się macierzą A^{-1}.

Przykład 5.11. *Rozważmy ponownie macierz z poprzedniego przykładu. Mamy:*

$$
\begin{aligned}
[A\,|I] = &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 - \frac{1}{2} w_1 \\ w_3 \to w_3 - w_2 \end{array} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + \frac{4}{5} w_2 \end{array} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 \to -w_3 \\ w_2 \to w_2 - \frac{5}{2} w_3 \\ w_1 \to w_1 + w_3 \end{array} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 \to w_3 \\ w_2 \to \frac{2}{5} w_2 \\ w_1 \to w_1 + \frac{2}{5} w_2 \end{array} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to \frac{1}{2} w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 \end{array} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] = \left[I\,\middle|A^{-1}\right].
\end{aligned}
$$

5.4. Rząd macierzy

Niech $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Można pokazać, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest taka sama jak liczba jej liniowo niezależnych wierszy. Liczbę tę, dla macierz A, oznaczamy $\mathrm{r}(A)$ i nazywamy **rzędem** macierzy A.

Z przyjętej definicji rzędu macierzy wynika natychmiast, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ mamy

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}\left(A^T\right).$$

Łatwo również wykazać, że poniższe operacje, tzw. *operacje elementarne*, nie zmieniają rzędu macierzy:

- dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy kombinacji liniowej pozostałych jej kolumn (wierszy);
- dowolna zmiana kolejności kolumn (wierszy) macierzy.

Jedną z najbardziej efektywnych metod wyznaczania rzędu macierzy jest sprowadzenie jej, przy pomocy przekształceń elementarnych, do tzw. *postaci schodkowej*.

Definicja 5.5 (postać schodkowa). *Macierz prostokątna ma* **postać schodkową**, *jeśli spełnia następujące warunki:*

- *wszystkie niezerowe wiersze znajdują się nad wierszami zerowymi;*
- *w każdym niezerowym wierszu pierwszy element różny od zera, zwany* **schodkiem**, *znajduje się na prawo (czyli w kolumnie o większym indeksie) od schodka wiersza znajdującego się bezpośrednio nad nim.*

Łatwo wykazać bezpośrednio z definicji, że rząd macierzy schodkowej równy jest liczbie jej schodków (która równa jest liczbie jej niezerowych wierszy).

Przykład 5.12. *Wyznaczymy rząd macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy A sprowadzimy ją do postaci schodkowej. Mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(A) &= \mathrm{r}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{matrix} = \mathrm{r}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \mathrm{r}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - \frac{2}{3}w_2 \end{matrix} = \mathrm{r}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ponieważ otrzymana macierz ma tylko dwa schodki (tj. tylko dwa jej wiersze są liniowo niezależne), zatem $\mathrm{r}(A) = 2$.

Twierdzenie 5.6. *Rząd macierzy A równy jest największemu stopniowi (wymiarowi) niezerowego minora macierzy A.*

Przykład 5.13. *Rozważmy ponownie macierz*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ zatem $\mathrm{r}(A) \leqslant 3$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

zatem $\mathrm{r}(A) \leqslant 2$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

zatem $\mathrm{r}(A) = 2$.

Na zakończenie sformułujemy twierdzenie zawierające wybrane własności rzędu macierzy.

Twierdzenie 5.7 (własności rzędu macierzy). *Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ oraz $C \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ zachodzi*:

(*a*) $0 \leqslant \mathrm{r}(A) \leqslant \min\{m, n\}$,
(*b*) $\mathrm{r}(A + B) \leqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$,
(*c*) $\mathrm{r}(A \cdot C) \leqslant \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(C)\}$,
(*d*) $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(C) - n \leqslant \mathrm{r}(A \cdot C)$ – *nierówność Sylvestera.*

Dowód: Dowód twierdzenia pomijamy; zainteresowanych dowodem oraz innymi własnościami rzędu macierzy zachęcam do zapoznania się z opracowaniem Jagody Muszyńskiej *Wybrane równości i nierówności dla rzędu macierzy*, praca dyplomowa, WMS AGH, 2026. ∎

Rozdział 6

Przekształcenia liniowe

Niech X oraz Y będą dwiema niepustymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$.

Definicja 6.1. *Funkcję $f : X \to Y$ spełniającą warunki:*

(a) *dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2);$$

(b) *dla dowolnych $x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$:*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

nazywamy **odwzorowaniem liniowym**.

Przykład 6.1. *Wykażemy, że odwzorowanie $f : \pi_2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem*

$$f : ax^2 + bx + c \to (a - b + c, 2a + c)$$

jest liniowe. Istotnie, dla dowolnych wielomianów $w_1, w_2 \in \pi_2$, powiedzmy $w_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ oraz $w_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, mamy

$$\begin{aligned} f(w_1(x) + w_2(x)) &= f(a_1x^2 + b_1x + c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2) = \\ &= f\big((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\big) = \\ &= \big((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2), 2(a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)\big) = \\ &= (a_1 - b_1 + c_1, 2a_1 + c_1) + (a_2 - b_2 + c_2, 2a_2 + c_2) = \\ &= f(a_1x^2 + b_1x + c_1) + f(a_2x^2 + b_2x + c_2) = f(w_1(x)) + f(w_2(x)). \end{aligned}$$

Podobnie, dla wielomianu $w(x) = ax^2 + bx + c$ oraz dla skalara $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha w(x)) &= f(\alpha(ax^2 + bx + c)) = f(\alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c)) = \\ &= (\alpha a - \alpha b + \alpha c, 2\alpha a + \alpha c) = \alpha(a - b + c, 2a + c) = \alpha f(w(x)). \end{aligned}$$

To na podstawie definicji 6.1 oznacza, że odwzorowanie f jest liniowe.

Przykład 6.2. *Wyznaczymy ogólną postać odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Wykorzystując warunek (b) definicji 6.1, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax,$$

gdzie $a = f(1)$.

Z powyższego przykładu wynika, że funkcja $f(x) = ax + b$ jest odwzorowaniem liniowym jedynie w przypadku, gdy $b = 0$.

Ćwiczenie Wyznacz ogólną postać odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; rozważ osobno dwa przypadki: $m = 1$ oraz $m \geqslant 2$.

6.1. Rodzaje odwzorowań liniowych

Odwzorowanie liniowe $f : X \to Y$ nazywamy

– **monomorfizmem**, jeżeli funkcja f jest injekcją, tj. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

– **epimorfizmem**, jeżeli funkcja f jest surjekcją, tj. dla dowolnej wartości $y \in Y$ istnieje argument $x \in X$, dla którego $y = f(x)$;

– **izomorfizm**, jeżeli funkcja f jest bijekcją, tj. dla dowolnej wartości $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden argument $x \in X$, dla którego $y = f(x)$.

W dalszej części tego rozdziału przedstawione zostaną efektywne metody badania powyższych własności odwzorowań liniowych.

6.2. Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Przypuśćmy, że wymiary przestrzeni X oraz Y są skończone; niech $\dim X = n$ oraz $\dim Y = m$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $e' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ będą odpowiednio bazami przestrzeni X i Y. Z odwzorowaniem liniowym $f : X \to Y$ możemy wówczas stowarzyszyć macierz $M_{e,e'}(f) = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, której i–tą kolumnę $(i = 1, \ldots, n)$ tworzą współrzędne wektora $f(e_i)$ wyrażonego jako kombinacja liniowa wektorów bazowych przestrzeni Y:

$$\begin{array}{l} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m, \\ f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m, \\ \qquad\vdots \\ f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M_{e,e'}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ze sposobu określenia macierzy odwzorowania liniowego wynika, że dla dowolnego wektora $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in X$ współrzędne $y_1, \ldots, y_m$ w bazie e' wektora $y = f(x)$ wyrażają się wzorem

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = M_{e,e'}(f) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Przykład 6.3. *Rozważmy odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Przyjmując w przestrzeniach X oraz Y bazy kanoniczne mamy:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 2) = e'_1 + 2e'_2, \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 0) = e'_1, \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (-1, 1) = -e'_1 + e'_2. \end{aligned}$$

Odwzorowanie f jest więc reprezentowane przez macierz

$$M_{e,e'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

innymi słowy

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.4. *Niech $F : \pi_1 \to \pi_2$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem:*

$$F(f(x)) = 2xf(x) - f(x).$$

Łatwo sprawdzić, że F jest odwzorowaniem liniowym. Przyjmując w przestrzeniach π_1 oraz π_2 bazy

$$w\ \pi_1 : e_1(x) = 1, e_2(x) = x$$
$$w\ \pi_2 : e'_1(x) = 1, e'_2(x) = x, e'_3(x) = x^2$$

mamy:

$$F(e_1) = F(1) = 2x - 1 = -e'_1 + 2e'_2,$$
$$F(e_2) = F(x) = 2x^2 - x = 0e'_1 - e'_2 + 2e'_3.$$

Przy przyjętych bazach, odwzorowanie F reprezentowane jest przez macierz

$$M_{e,e'}(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.5. *Rozważmy ponownie odwzorowanie F z przykładu 6.4. Przyjmując w przestrzeni π_1 bazę*

$$b_1(x) = x + 1, \qquad b_2(x) = x - 1,$$

a w przestrzeni π_2 bazę

$$c_1(x) = x - 1, \quad c_2(x) = x + 1, \quad c_3(x) = x^2,$$

mamy

$$F(b_1) = F(x+1) = 2x(x+1) - (x+1) = 2x^2 + x - 1 = c_1 + 2c_3,$$
$$F(b_2) = F(x-1) = 2x(x-1) - (x-1) = 2x^2 - 3x + 1 = \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + 2c_3.$$

Skalary α_{21}, α_{22} wyznaczymy rozwiązując równanie

$$-3x + 1 = \alpha_{21}(x-1) + \alpha_{22}(x+1).$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy: $\alpha_{21} = -2, \alpha_{22} = -1$. Tym razem odwzorowanie F jest reprezentowane przez macierz

$$M_{b,c}(F) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Z powyższych przykładów wynika, że postać macierzy reprezentującej odwzorowanie liniowe $f : X \to Y$ zależy od wyboru baz w przestrzeniach X, Y.

6.3. Macierz złożenia odwzorowań liniowych

Rozważmy przestrzenie liniowe X o bazie $e = (e_1, \ldots, e_n)$, Y o bazie $v = (v_1, \ldots, v_m)$ oraz Z o bazie $w = (w_1, \ldots, w_p)$. Rozważmy odwzorowania liniowe $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$. Możemy wówczas zdefiniować odwzorowanie liniowe $\psi \circ \varphi : X \to Z$. Wykorzystując zależność (6.1) łatwo wykazać, że w wybranych bazach przestrzeni X, Y, Z odwzorowania liniowe φ, ψ oraz $\psi \circ \varphi$ reprezentowane są przez macierze $M_{e,v}(\varphi)$, $M_{v,w}(\psi)$, $M_{e,w}(\psi \circ \varphi)$, które połączone są poniższą zależnością:

$$M_{e,w}(\psi \circ \varphi) = M_{v,w}(\psi) \cdot M_{e,v}(\varphi). \tag{6.2}$$

Przykład 6.6. *Rozważmy odwzorowania liniowe*

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (a,b,c) \to (b+c)x + a - c \in \pi_1,$$
$$\psi : \pi_1 \ni ax + b \to (a-b, a+b) \in \mathbb{R}^2$$

oraz bazy

$$\begin{aligned} &\textit{przestrzeni } \mathbb{R}^3: && e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,0,1),\ e_3 = (0,0,1),\\ &\textit{przestrzeni } \mathbb{R}^2: && v_1 = (1,1),\ v_2 = (1,-1),\\ &\textit{przestrzeni } \pi_1: && w_1(x) = x-1,\ w_2(x) = x+1. \end{aligned}$$

Wykonując proste obliczenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \varphi(1,1,1) = 2x = w_1(x) + w_2(x),\\ \varphi(e_2) &= \varphi(1,0,1) = x = \frac{1}{2}w_1(x) + \frac{1}{2}w_2(x),\\ \varphi(e_3) &= \varphi(0,0,1) = x - 1 = w_1(x), \end{aligned}$$

a stąd

$$M_{e,w}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} \psi(w_1(x)) &= \psi(x-1) = (2,0) = v_1 + v_2,\\ \psi(w_2(x)) &= \psi(x+1) = (0,2) = v_1 - v_2, \end{aligned}$$

a stąd

$$M_{w,v}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$(\psi \circ \varphi)(a,b,c) = \psi(\varphi(a,b,c)) = \psi((b+c)x + a - c) = (-a+b+2c, a+b)$$

oraz

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(e_1) &= (\psi \circ \varphi)(1,1,1) = (2,2) = 2v_1,\\ (\psi \circ \varphi)(e_2) &= (\psi \circ \varphi)(1,0,1) = (1,1) = v_1,\\ (\psi \circ \varphi)(e_3) &= (\psi \circ \varphi)(0,0,1) = (2,0) = v_1 + v_2, \end{aligned}$$

zatem

$$M_{e,v}(\psi \circ \varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z (6.2) *mamy*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_{e,v}(\psi \circ \varphi) = M_{w,v}(\psi) \cdot M_{e,w}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.4. Jądro i obraz odwzorowania liniowego

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $V \subset X$ i $W \subset Y$ dowolnymi podprzestrzeniami liniowymi. Łatwo sprawdzić (ćwiczenie), że zbiory

$$f(V) = \{y \in Y : \exists x \in V : y = f(x)\},$$
$$f^{-1}(W) = \{x \in X : \exists y \in W : y = f(x)\}$$

z działaniami indukowanymi z przestrzeni X oraz Y, są podprzestrzeniami liniowymi, odpowiednio, przestrzeni X oraz Y.

Definicja 6.2. *Zbiór* $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ *nazywamy* **jądrem** *odwzorowania* f; *zbiór* $\operatorname{im} f = f(X)$ *nazywamy* **obrazem** *odwzorowania* f.

Z obserwacji poprzedzającej powyższą definicję wynika, że

- *jądro odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* X;
- *obraz odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* Y.

Przy wyznaczaniu obrazu odwzorowania liniowego przydatne bywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Niech* X *oraz* Y *będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi oraz niech* $f : X \to Y$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas*

$$\dim X = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f. \tag{6.3}$$

Dowód: Niech $\dim \ker f = k$ oraz $\dim X = n$; oczywiście $k \leqslant n$. Przypuśćmy, że wektory $e_1, \ldots, e_k$ tworzą bazę przestrzeni $\ker f$. Wektory te możemy uzupełnić o wektory $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tak, aby $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\} = X$.

W celu wykazania równości (6.3) wystarczy udowodnić, że $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$ oraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne.

Niech $y \in \operatorname{im} f$. Oznacza to, że istnieje $x \in X = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$ dla którego $y = f(x)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) + f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i), \end{aligned}$$

co oznacza, że $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$.

Wykażemy teraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne. Mamy

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0,$$

zatem $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in \ker f = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_k\}$. Stąd, istnieją skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dla których

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

lub równoważnie

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = 0.$$

Liniowa niezależność wektorów $e_1, \ldots, e_n$ pozwala stwierdzić, że $\alpha_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. ∎

Zadanie wyznaczania jądra odwzorowania liniowego f, polegające na rozwiązaniu jednorodnego równania liniowego $f(x) = 0$, jest na ogół zadaniem dużo prostszym niż wyznaczanie jego obrazu. Z rozumowania przedstawionego w powyższym dowodzie wynika następujący *algorytm* wyznaczania obrazu odwzorowania liniowego:

- wyznaczamy bazę jądra $e_1, \ldots, e_k$ odwzorowania f lub stwierdzamy, że jest ono trywialne, tj. $\ker f = \{0\}$;
- wyznaczone w poprzednim punkcie wektory uzupełniamy wektorami $e_{k+1}, \ldots, e_n$ do bazy przestrzeni X;
- wyznaczamy wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ – stanowią one bazę przestrzeni $\operatorname{im} f$.

Przykład 6.7. *Rozważmy ponownie odwzorowanie z przykładu 6.4:*

$$F : \pi_1 \ni f(x) \to 2xf\,(x) - f\,(x) \in \pi_2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\ker F &= \{x \to ax + b : 2x\,(ax + b) - ax - b \equiv 0\} \\ &= \left\{x \to ax + b : 2ax^2 + (2b - a)\,x - b \equiv 0\right\} = \{0\}\,.\end{aligned}$$

Ponieważ $\pi_1 = \lin\{e_1, e_2\}$*, dla* $e_1(x) = 1,\ e_2(x) = x$*, zatem* $\operatorname{im} F = \lin\{F(e_1), F(e_2)\}$*, gdzie*

$$F(e_1(x)) = F\,(1) = 2x - 1, \quad F(e_2(x)) = F\,(x) = 2x^2 - x = x\,(2x - 1)\,.$$

Ostatecznie $\operatorname{im} F = \pi_2\,(1/2)\,.$

Z dowodu twierdzenia 6.1 wynika, że

$$\operatorname{im} f = \lin\{f(e_1), \ldots, f\,(e_n)\}\,,$$

gdzie $e_1, \ldots, e_n$ jest dowolną bazą przestrzeni X. Niech M_f będzie macierzą odwzorowania f przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y. Ponieważ i–ta kolumna macierzy M_f to współrzędne wektora $f\,(e_i)$ w ustalonej bazie przestrzeni X, zatem liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy M_f równa jest liczbie liniowo niezależnych wektorów spośród wektorów $f(e_1), \ldots, f\,(e_n)$. Wynika stąd następujący

Wniosek 6.2. *Niech X oraz Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech M_f będzie dowolną macierzą odwzorowania f, tj. macierzą odwzorowania f wyznaczoną w dowolnie wybranych bazach przestrzeni X oraz Y. Wówczas*

$$\dim \operatorname{im} f = \mathrm{r}\,(M_f)\,. \tag{6.4}$$

6.5. Macierzowa charakterystyka odwzorowania liniowego

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3. *Niech X oraz Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Odwzorowanie liniowe $f : X \to Y$ jest*

- *monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker f = \{0\}$;
- *epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim \operatorname{im} f = \dim Y$.

Dowód: W celu wykazania pierwszej części tezy przypuśćmy, że odwzorowanie liniowe f jest różnowartościowe. Z założonej liniowości odwzorowania f wynikają równości

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

a z nich, po dodaniu stronami elementu przeciwnego do elementu $f(0)$, $f(0) = 0$. Uwzględniając otrzymaną równość oraz różnowartościowość f możemy zapisać

$$\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : f(x) = f(0)\} = \{x \in X : x = 0\} = \{0\}.$$

Przypuśćmy teraz, że $\ker f = \{0\}$. Dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniających warunek $f(x_1) = f(x_2)$ mamy

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2).$$

To oznacza, że $x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$, czyli $x_1 = x_2$. Odwzorowanie f jest zatem monomorfizmem.

Uzasadnienie drugiej części tezy twierdzenia pozostawiam jako proste ćwiczenie. ∎

Wiemy już, że jeżeli wymiary przestrzeni X oraz Y są skończone, to każde odwzorowanie liniowe $f : X \to Y$ może być reprezentowane przez macierz (skończoną). Okazuje się, że wówczas potrafimy również łatwo badać wybrane własności odwzorowania f.

Twierdzenie 6.4. *Niech X oraz Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi oraz niech M_f będzie dowolną macierzą odwzorowania liniowego $f : X \to Y$. Odwzorowanie f jest*

- *monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim X = \mathrm{r}(M_f)$;
- *epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim Y = \mathrm{r}(M_f)$;
- *izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy macierz M_f jest kwadratowa oraz* $\det M_f \neq 0$.

Przykład 6.8. *W przykładzie 6.4 wykazaliśmy, że przy odpowiednio wybranych bazach przestrzeni $X = \pi_1$ oraz $Y = \pi_2$ macierz odwzorowania liniowego*

$$F : \pi_1 \ni f(x) \to 2xf(x) - f(x) \in \pi_2$$

ma postać

$$M_{e,e'}(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\dim X = \dim \pi_1 = 2, \quad \dim Y = \dim \pi_2 = 3, \quad \mathrm{r}(M_{e,e'}(F)) = 2,$$

zatem zgodnie z twierdzeniem 6.4 odwzorowanie F jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem (nie jest również izomorfizmem).

Warto zauważyć, że w przypadku odwzorowania liniowego działającego pomiędzy przestrzeniami o tym samym (skończonym!) wymiarze, wszystkie warunki występujące w tezie twierdzenia 6.4 są równoważne. Innymi słowy, w rozważanym przypadku każde injektywne (odp. surjektywne) odwzorowanie liniowe jest izomorfizmem.

6.6. Macierz odwzorowania odwrotnego

Jeżeli odwzorowanie liniowe $\varphi : X \to Y$ jest izomorfizmem (przypomnijmy, że jest to możliwe jedynie w przypadku, gdy $\dim X = \dim Y$; zob. twierdzenie 6.4), to istnieje odwzorowanie liniowe $\varphi^{-1} : Y \to X$, takie że

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id_X} \quad \text{oraz} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id_Y}\,.$$

Ze wzoru (6.2) wynika, że wówczas

$$I = M_{v,e}(\varphi^{-1}) \cdot M_{e,v}(\varphi),$$

a stąd

$$M_{v,e}(\varphi^{-1}) = M^{-1}_{e,v}(\varphi). \tag{6.5}$$

Przykład 6.9. *Rozważmy odwzorowanie liniowe*

$$\varphi : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (a + b, b + c, c) \in \mathbb{R}^3.$$

W bazach $e = (x^2, x, 1)$ przestrzeni π_2 oraz $v = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ odwzorowanie φ reprezentowane jest przez macierz

$$M_{e,v}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det M_{e,v}(\varphi) = 1 \neq 0$, zatem odwzorowanie φ jest izomorfizmem (zob. twierdzenie 6.4), czyli posiada odwzorowanie odwrotne φ^{-1}, które teraz wyznaczymy.

Wykonując proste rachunki oraz uwzględniając zależność (6.5) *otrzymujemy macierz $M_{v,e}(\varphi^{-1})$ odwzorowania φ^{-1}:*

$$M_{v,e}(\varphi^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

która pozwala zapisać jego postać, tj.

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \ni (a, b, c) \to (a - b + c)x^2 + (b - c)x + c \in \pi_2.$$

Istotnie,

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(ax^2 + bx + c) = \varphi^{-1}(\varphi(ax^2 + bx + c)) = \varphi^{-1}(a + b, b + c, c) = ax^2 + bx + c,$$

czyli $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{\pi_2}$ *oraz*

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(a, b, c) = \varphi(\varphi^{-1}(a, b, c)) = \varphi((a - b + c)x^2 + (b - c)x + c) = (a, b, c),$$

czyli $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Rozdział 7

Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}, \tag{7.1}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$; $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W przypadku, gdy $b_1 = \cdots = b_m = 0$ układ (7.1) nazywamy **układem jednorodnym**. Przyjmując oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

układ równań (7.1) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$Ax = b. \tag{7.2}$$

7.1. Twierdzenie Cramera

W przypadku, gdy liczba równań układu (7.1) jest równa liczbie niewiadomych, macierz A jest macierzą kwadratową. Jeżeli jest to macierz nieosobliwa, to układ równań (7.1) nazywamy **układem Cramera**. Rozwiązanie równania (7.2) – a więc i układu (7.1) – można wówczas prosto wyliczyć wykorzystując macierz A^{-1}:

$$x = A^{-1}b.$$

Rozwiązanie układu równań (7.1) można również wyrazić stosując **wzory Cramera**.

Twierdzenie 7.1 (Cramer). *Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{F}^n$. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to układ równań (7.2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = (x_1, \ldots, x_n)$:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.3}$$

macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i–tej kolumny wektorem b.

Dowód: Niech $a_{\cdot i}$ oraz $I_{\cdot i}$ oznaczają i–te kolumny odpowiednio macierzy A oraz macierzy jednostkowej I_n. Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{\det A_i}{\det A} &= \frac{\det\left[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}\right]}{\det A}\\ &= \det\left(A^{-1}\left[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}\right]\right)\\ &= \det\left[A^{-1}a_{\cdot 1}, A^{-1}a_{\cdot 2}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot i-1}, A^{-1}b, A^{-1}a_{\cdot i+1}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot n}\right]\\ &= \det\left[I_{\cdot 1}, I_{\cdot 2}, \ldots, I_{\cdot i-1}, x, I_{\cdot i+1}, \ldots, I_{\cdot n}\right] = x_i.\end{aligned}$$

Otrzymana równość kończy dowód. ∎

Łatwo stwierdzić, że układ równań jednorodnych ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie; jest nim rozwiązanie zerowe. Z twierdzenia Cramera wynika natomiast, że jeżeli jednorodny układ równań liniowych jest układem Cramera, to rozwiązanie to jest jego jedynym rozwiązaniem.

Przykład 7.1. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x + y - z = 1\\ 2x + y - 2z = 0\\ x - y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad b = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -3$ *zatem jest to układ Cramera, którego rozwiązanie określa wzór* (7.3)*:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}.$$

7.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Rozważmy, jak poprzednio, układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), b \in \mathbb{F}^m$. Niech $U \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ będzie macierzą powstałą z macierzy A przez dołączenie do tej ostatniej dodatkowej kolumny – wektora b, tj.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Macierz U nazywamy **macierzą uzupełnioną**. Jest jasne, że $\mathrm{r}(U) \geqslant \mathrm{r}(A)$. Z postaci równania (7.1), które możemy zapisać w postaci:

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \ldots\\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \ldots\\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \ldots\\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_m \end{bmatrix}$$

wynika, że układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor b jest kombinacją liniową kolumn macierzy A. Warunek ten możemy równoważnie wyrazić jako równość

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(U).$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2 (Kroneckera-Capellego). *Układ równań $Ax = b$, gdzie $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), b \in \mathbb{F}^m$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(U)$. Ponadto:*

- *jeżeli $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(U) = n$, gdzie n to liczba niewiadomych (równa liczbie kolumn macierzy A), to rozwiązanie to jest jedyne;*
- *jeżeli $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(U) = r < n$ to rozwiązań jest nieskończenie wiele; wszystkie one dają się wyrazić jako funkcja zależna od $n - r$ parametrów.*

Przykład 7.2. *Rozważmy układ równań:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}.$$

Mamy $n = 3$ oraz

$$U = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Rzędy macierzy A oraz U wyznaczymy korzystając z metody eliminacji Gaussa:

$$\begin{aligned} \mathrm{r}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] &= \mathrm{r}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] \\ &= \mathrm{r}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(U) = 2$. Z twierdzenia 7.2 wynika więc, że rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego (bo $1 = n - \mathrm{r}(A)$) parametru. Wyznaczymy te rozwiązania.

Sposób 1. *Mając wyjściowy układ równań sprowadzony do postaci trójkątnej, poszukiwane rozwiązanie wyznaczymy klasyczną metodą dedykowaną dla układów o macierzach trójkątnych:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sposób 2. *Skoro $\mathrm{r}(A) = 2$ to macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz stopnia 2; odnajdujemy tę macierz w rozwiązywanym układzie równań. Równania, które nie wchodzą w skład tej macierzy odrzucamy, z kolei niewiadome, których wybrana podmacierz nie obejmuje, przerzucamy na drugą stronę równania i traktujemy jako parametry. Układ równań, jaki w ten sposób otrzymujemy, jest układem Cramera – do jego rozwiązania stosujemy wzory* (7.3).

W naszym przypadku, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

zatem układy równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x - y = -1 - 2z \end{cases}$$

są równoważne (mają te same rozwiązania). Stosując do tego ostatniego układu wzory (7.3)*, mamy:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}}{-3} = 1, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

7.3. Metoda eliminacji Gaussa

Przedstawiony poniżej sposób rozwiązywania układów równań liniowych jest pewnym uproszczeniem algorytmu zwanego metodą eliminacji Gaussa. Metoda ta, niezwykle efektywna pod względem numerycznym (nie istnieje algorytm rozwiązywania układów równań wymagający istotnie mniejszej liczby działań niż metoda eliminacji Gaussa), polega na sprowadzeniu macierzy uzupełnionej odpowiadającej rozwiązywanemu układowi równań do uogólnionej postaci trójkątnej (nazywanej również postacią schodkową). Aby osiągnąć ten efekt, na macierzy uzupełnionej wykonujemy dwa rodzaje operacji:

- dodajemy do wybranego wiersza sumy pozostałych wierszy pomnożonych przez odpowiednio dobrane stałe;
- zamieniamy kolejność wierszy.

Do uzyskanej w ten sposób macierzy stosujemy twierdzenie Kroneckera–Capellego. Warto przypomnieć w tym miejscu, że pierwsza z wymienionych powyżej operacji nie zmienia wartości wyznacznika, druga może zmienić jedynie jego znak. W efekcie, metoda eliminacji Gaussa może być również stosowana do obliczania rzędu i wyznacznika macierzy oraz do wyznaczania macierzy odwrotnej. Ideę metody eliminacji Gaussa wyjaśnimy na kilku przykładach.

Przykład 7.3 (rozwiązywanie układu oznaczonego). *Celem naszym jest rozwiązanie układu równań*

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 1 \\ x + y - 2z - 3w = 2 \\ 4x - 2y + 4w = 2 \end{cases}. \tag{7.4}$$

Macierz uzupełniona U rozważanego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa wykorzystujemy pierwszy wiersz, nazywany ***wierszem głównym dla pierwszego kroku.*** *Postępujemy w sposób następujący: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy pomnożony przez* $1/2$*; do trzeciego pomnożony przez* $-1/2$*; do czwartego pomnożony przez* -2*. Liczbę* 2 *– pierwszy niezerowy element wiersza głównego nazywamy* ***elementem głównym dla pierwszego kroku****. Otrzymujemy*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + 1/2 w_1 \\ w_3 \to w_3 - 1/2 w_1 \\ w_4 \to w_4 - 2w_1 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

W kolejnym kroku, wierszem głównym jest wiersz drugi nazywany ***wierszem głównym dla drugiego kroku****; elementem głównym dla drugiego kroku jest* $-3/2$*. Postępujemy analogicznie jak w kroku*

pierwszym: do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $1/3$*; do wiersza czwartego pomnożony przez* $-8/3$*. Otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 1/3 w_2 \\ w_4 \to w_4 - 8/3 w_2 \end{array}\right. \to$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 & -3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2 & -2/3 \end{array}\right).$$

W ostatnim, trzecim kroku wierszem głównym jest wiersz trzeci – ***wiersz główny dla kroku trzeciego****; elementem głównym jest* $-8/3$*. Mnożąc trzeci wiersz przez* $-1/4$ *i dodając do wiersza czwartego otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 & -3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2 & -2/3 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 \\ w_4 \to w_4 - 1/4 w_3 \end{array}\right. \to$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 & -3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & -5/4 \end{array}\right). \tag{7.5}$$

Uzyskana w ten sposób macierz schodkowa jest macierzą uzupełnioną układu równań posiadającego te same rozwiązania, co wyjściowy układ:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = 1 \\ -\frac{8}{3}z - 3w = \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{4}w = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Z postaci macierzy widać również, że układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczamy je rozwiązując otrzymany układ równań w kolejności od ostatniego równania do pierwszego. Uzyskujemy kolejno:

$$w = 1, z = -2, y = 1, x = 0.$$

Warto zanotować, że operacje jakie wykonywaliśmy na macierzy wyjściowego układu równań (7.4)*, aby sprowadzić ją do postaci trójkątnej* (7.5) *nie zmieniły jej wyznacznika. Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej mamy*

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -8/3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 \end{array}\right| = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -10.$$

Przykład 7.4 (rozwiązywanie układu nieoznaczonego). *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ -4x + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Macierz uzupełniona tego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2*; wiersz trzeci natomiast przepisujemy bez zmian:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + 2w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W kroku drugim, do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-1/3$ *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - 1/3w_2 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

łatwo teraz stwierdzić, korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capellego, że rozważany układ równań jest nieoznaczony (posiada nieskończenie wiele rozwiązań). Jest on równoważny układowi

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 6y - 6z = 12 \end{array}\right. ,$$

którego rozwiązania, równe rozwiązaniom wyjściowego układu, mają postać

$$x = t, y = 2 + 2t, z = 2t,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$ *jest dowolnym parametrem.*

Przykład 7.5 (rozwiązywanie układu sprzecznego). *Rozważmy układ równań*

$$\left\{\begin{array}{r} 5x - 2y - z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 5z = 1 \end{array}\right. ,$$

dla którego macierz uzupełniona U *ma postać*

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez $2/5$*; do wiersza trzeciego pomnożony przez* $1/5$*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + 2/5w_1 \\ w_3 \to w_3 + 1/5w_1 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6/5 & -12/5 & 12/5 \\ 0 & -12/5 & 24/5 & 6/5 \end{array}\right).$$

W drugim kroku do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez 2*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6/5 & -12/5 & 12/5 \\ 0 & -12/5 & 24/5 & 6/5 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 2w_2 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6/5 & -12/5 & 12/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capellego stwierdzamy, że otrzymany układ równań jest sprzeczny. Oznacza to, że i wyjściowy układ równań nie posiada rozwiązań.

Rozdział 8

Wartości i wektory własne

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Niech $f : X \to X$ będzie **endomorfizmem**, tj. odwzorowaniem liniowym przekształającym przestrzeń liniową w nią samą.

Definicja 8.1. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy* **wartością własną** *endomorfizmu f jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in X$, taki że*

$$f(v) = \lambda v; \tag{8.1}$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.1. *Dla endomorfizmu $f : X \to X$ następujące warunki są równoważne:*

- *λ jest wartością własną f;*
- $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_X) \neq \{0\}$;
- $\det(A_f - \lambda I) = 0$, *gdzie A_f jest macierzą endomorfizmu f (w dowolnej bazie przestrzeni X).*

Przykład 8.1. *Wyznaczymy wartości oraz wektory własne endomorfizmu $f : \pi_2 \to \pi_2$ określonego wzorem*

$$f : ax^2 + bx + c \to 2ax + b.$$

W tym celu wyznaczymy jądro odwzorowania $f - \lambda \operatorname{id}_{\pi_2}$. Mamy

$$\begin{aligned}\ker(f - \lambda \operatorname{id}_{\pi_2}) &= \{ax^2 + bx + c : f(ax^2 + bx + c) - \lambda(ax^2 + bx + c) \equiv 0\} = \\ &= \{ax^2 + bx + c : 2ax + b - \lambda ax^2 - \lambda bx - \lambda c \equiv 0\} = \\ &= \{ax^2 + bx + c : -\lambda ax^2 + (2a - \lambda b)x + b - \lambda c \equiv 0\} = \\ &= \{ax^2 + bx + c : \lambda a = 0,\ 2a - \lambda b = 0,\ b - \lambda c = 0\}.\end{aligned}$$

Widać, że dla $\lambda \neq 0$ mamy $a = b = c = 0$, a to oznacza, że wówczas $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_{\pi_2}) = \{0\}$. Wartością własną endomorfizmu f może zatem być jedynie skalar $\lambda = 0$. Istotnie, dla $\lambda = 0$ mamy

$$\ker(f - 0 \operatorname{id}_{\pi_2}) = \{ax^2 + bx + c : 2a = 0,\ b = 0\} = \pi_0 \neq \{0\}.$$

To oznacza, że skalar $\lambda = 0$ jest jedyną wartością własną endomorfizmu f; odpowiadającym jej wektorem własnym jest dowolny, różny od wielomianu zerowego, element przestrzeni π_0.

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a X n–wymiarową przestrzenią liniową o bazie $e_1, \ldots, e_n$. Możemy skonstruować endomorfizm $f : X \to X$, którego macierzą w ustalonej bazie $e_1, \ldots, e_n$ jest macierz A. Endomorfizm ten wystarczy zdefiniować na wektorach bazowych (co z innymi wektorami?) w następujący sposób:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Pojęcia wartości własnej oraz wektora własnego w sposób naturalny przenoszą się więc na macierze.

Definicja 8.2. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy* **wartością własną** *macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jeżeli istnieje wektor $v \neq 0$, taki że*

$$Av = \lambda v;$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy $\sigma(A)$ i nazywamy jej **widmem**.
Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.2. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ następujące warunki są równoważne:*

- *λ jest wartością własną A;*
- *układ równań $(A - \lambda I_n)\, v = 0$ ma niezerowe rozwiązanie;*
- $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ odwzorowanie

$$\varphi_A : \lambda \to \det(A - \lambda I)$$

jest wielomianem stopnia n (ćwiczenie), którego pierwiastkami są wartości własne macierzy A. Wielomian φ_A nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy A.

Jeżeli elementy macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ należą do ciała $\mathbb{F}$, które jest **algebraicznie domknięte**, tzn. każdy wielomian stopnia n o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$, to macierz A posiada n wartości własnych (uwzględniając ich krotności). Jeżeli natomiast elementy macierzy należą do ciała, które nie jest algebraicznie domknięte (takim ciałem jest na przykład ciało liczb rzeczywistych), to macierz wymiaru $n\times n$ może posiadać mniej niż n wartości własnych; w szczególności może nie posiadać żadnej wartości własnej (zob. przykład 7.4 poniżej).

Przykład 8.2. *Wyznaczymy wartości oraz wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$, zatem macierz A ma trzy różne wartości własne: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Dla każdej z nich wyznaczymy wektor własny:

- *dla $\lambda_1 = -1$ mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 3y \\ -2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  skąd otrzymujemy $(x, y, z) = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$; przykładowy wektor własny $v_{\lambda_1} = (0, 0, 1)$;
- *dla $\lambda_2 = 1$ mamy:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ -2x - 2y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  skąd otrzymujemy $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$; przykładowy wektor własny $v_{\lambda_2} = (1, 0, -1)$;

- *dla* $\lambda_3 = 2$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 0 \\ -2x-2y-3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy $(x, y, z) = (2t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$; *przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_3} = (2, 1, -2)$.

Przypuśćmy, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A)$ są wartościami własnymi macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Wówczas, wielomian charakterystyczny φ_A macierzy A możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \\ &= a_n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n). \end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że $a_n = (-1)^n$ oraz, uwzględniając wzory Viète'a,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n &= a_0 = \det A, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n &= (-1)^{n+1} a_{n-1} = \operatorname{tr}(A), \end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ to **ślad** macierzy A.

Własności widma macierzy Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ zachodzi:

a) $\lambda \in \sigma(A)$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda^k \in \sigma\left(A^k\right)$;
b) $\lambda \in \sigma(A)$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma\left(A^{-1}\right)$;
c) $\lambda \in \sigma(A)$, $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha\lambda \in \sigma(\alpha A)$;
d) $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$; *w szczególności:* $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma\left(A^T\right)$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności.

8.1. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Rozważmy macierz kwadratową $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ oraz wielomian w postaci

$$w(s) = a_m s^m + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Możemy wówczas utworzyć macierz $w(A)$ określoną jako

$$w(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Definicja 8.3 (wielomian zerujący). *Jeżeli* $w(A) = 0_n$, *to wielomian* w *nazywamy* **wielomianem zerującym** *(wielomianem anulującym) macierzy* A.

Pytanie jakie może się nasunąć jest następujące – czy dla każdej macierzy istnieje wielomian zerujący? Odpowiedź jest zawarta w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 8.3 (Cayley, Hamilton). *Wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym.*

Przykład 8.3 (odwracanie macierzy). *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny ma postać

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 12.$$

Ponieważ $\varphi(0) = 12 \neq 0$ *zatem macierz* A *jest nieosobliwa. Wyznaczymy teraz jej odwrotność. Na podstawie twierdzenie Cayleya–Hamiltona możemy napisać*

$$-A^3 + A^2 - 6A + 12I_3 = 0_3$$

lub równoważnie

$$\frac{1}{12}A\left(A^2 - A + 6I_3\right) = I_3.$$

Oznacza to, na podstawie definicji macierzy odwrotnej, że

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - A + 6I_3\right) = \frac{1}{12}\left(\begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.2. Podprzestrzeń własna

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ oraz niech $\lambda \in \sigma(A)$. Zbiór

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$$

składa się z $\mathbf{0}$ oraz wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ. Ponieważ

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : (A - \lambda I)v = 0\} = \ker\{v \to (A - \lambda I)\, v\}$$

zatem zbiór ten – jako jądro endomorfizmu – jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{F}^n$; jest to tak zwana **podprzestrzeń własna** macierzy A (ew. podprzestrzeń własna endomorfizmu wyznaczonego przez macierz A) odpowiadająca wartości własnej λ. Wymiar podprzestrzeni własnej V_λ to tzw. **krotność geometryczna wartości własnej** λ – jest to liczba odpowiadających jej liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A. Jak się wkrótce okaże, krotność geometryczna wartości własnej λ nigdy nie przekracza jej **krotności algebraicznej**, czyli krotności wartości własnej λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego φ_A.

Przykład 8.4. *Ponieważ macierz z przykładu 7.1 ma trzy różne wartości własne, zatem możemy dla niej wyznaczyć trzy podprzestrzenie własne:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}\right\};$$
$$V_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = 0, z = -t, t \in \mathbb{R}\right\};$$
$$V_{\lambda_3} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = t, z = -2t, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie, z którego wynika bardzo ważna własność podprzestrzeni własnych odpowiadających różnym wartościom własnym.

Twierdzenie 8.4. *Różnym wartościom własnym macierzy* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *odpowiadają liniowo niezależne wektory własne.*

Dowód: Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leqslant n)$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy A, a $v_i \in V_{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ odpowiadającymi im wektorami własnymi. Należy wykazać warunek

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0. \tag{8.2}$$

Dowód poprowadzimy przez indukcję względem k. Dla $k = 1$ teza zachodzi (wektor zerowy, mimo że należy do każdej podprzestrzeni własnej, nie jest wektorem własnym). Załóżmy, że teza zachodzi dla dowolnych $k - 1$ wektorów własnych odpowiadających różnym wartościom własnym oraz, dla

dowodu nie wprost, przypuśćmy, że warunek (8.2) nie jest spełniony. Oznacza to, że dla pewnego $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{oraz} \quad \alpha_i \neq 0.$$

Dla dowolnego $r \neq i$ mamy

$$\begin{aligned} 0 = &(A - \lambda_r I)(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 (A - \lambda_r I) v_1 + \ldots + \alpha_k (A - \lambda_r I) v_k = \\ = &\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \ldots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} + \alpha_{r+1} (\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_{r+1} + \\ &+ \ldots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_r) v_k \end{aligned}$$

skąd, na podstawie założenia indukcyjnego, wynika, że wszystkie współczynniki $\alpha_m (\lambda_m - \lambda_r)$ są zerami; w szczególności $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_r) = 0$. Ponieważ $\lambda_i \neq \lambda_r$, zatem $\alpha_i = 0$, wbrew założeniu. ■

8.3. Diagonalizowalność

Niech $f : X \to X$ będzie endomorfizmem.

Definicja 8.4. *Endomorfizm f jest* **diagonalizowalny**, *jeżeli istnieje baza przestrzeni X w której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna.*

Pojęcie diagonalizowalności można również wprowadzić w zbiorze macierzy. Zanim to zrobimy wprowadzimy w zbiorze macierzy relację podobieństwa.

Definicja 8.5. *Niech $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Mówimy, że macierz A jest podobna do macierzy B (ozn. $A \sim B$) jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, taka że*

$$A = PBP^{-1}. \tag{8.3}$$

Łatwo wykazać (ćwiczenie), że relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności, tzn. jest:

- zwrotna, tj. $A \sim A$;
- symetryczna, tj. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- przechodnia, tj. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Przypuśćmy teraz, że $A \sim B$. Oznacza to, że $A = PBP^{-1}$, dla pewnej macierzy nieosobliwej P. Mamy:

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(PBP^{-1} - \lambda I\right) = \det P (B - \lambda I) P^{-1} = \\ &= \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} = \varphi_B(\lambda) \end{aligned}$$

co oznacza, że **macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny**; w konsekwencji mają one również identyczne wartości własne.

Definicja 8.6. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest macierzą* **diagonalizowalną**, *jeżeli jest podobna do macierzy diagonalnej.*

Zanim podamy twierdzenie charakteryzujące macierze diagonalizowalne rozważmy następujący przykład.

Przykład 8.5. *Niech*

$$A_1 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierze te mają ten sam wielomian charakterystyczny

$$\varphi_{A_1}(\lambda) = \varphi_{A_2}(\lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Ponieważ widma macierzy A_1 oraz A_2 są jednoelementowe

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{1\},$$

możemy dla każdej z nich wyznaczyć po jednej przestrzeni własnej.

Dla macierzy A_1 mamy:

$$V_{\lambda=1}^{(1)} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = x\right\} = \mathbb{R}^3,$$

co oznacza, że możemy dla niej wybrać dokładnie trzy liniowo niezależne wektory własne odpowiadające jej jedynej wartości własnej $\lambda = 1$. Macierz A_1 – jako macierz diagonalna – jest oczywiście macierzą diagonalizowalną.

Z kolei dla macierzy A_2 mamy

$$V_{\lambda=1}^{(2)} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : A_2 x = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : (A_2 - I)\, x = 0\right\} = \left\{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Oznacza to, że dla macierzy A_2 znajdziemy tylko jeden liniowo niezależny wektor własny odpowiadający jej jedynej wartości własnej $\lambda = 1$. Ponadto, macierz A_2 nie jest diagonalizowalna. Jedyną macierzą diagonalną, do której macierz A_2 mogłaby być podobna, jest macierz jednostkowa (macierze podobne mają te same wartości własne). Musiałaby więc istnieć macierz nieosobliwa P spełniająca warunek

$$A_2 = P I_3 P^{-1} = I_3,$$

który nie jest prawdziwy.

Możliwość diagonalizacji macierzy A_1 oraz brak możliwości diagonalizacji macierzy A_2 jest wynikiem tego, że dla macierzy A_1 możemy wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność jej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego; dla macierzy A_2 warunek ten nie jest spełniony.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 8.5. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

(a) *jej wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$ (liczonych z krotnościami);*
(b) *dla każdej wartości własnej macierzy A można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.*

Dowód: Przypuśćmy, że macierz A jest diagonalizowalna. Oznacza to, że istnieją macierz diagonalna $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{F}$ oraz macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, dla których $A = PBP^{-1}$, lub równoważnie

$$AP = PB. \tag{8.4}$$

Niech $P = [p_1, \ldots, p_n]$, gdzie $p_i \in \mathbb{F}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ponieważ

$$AP = A\,[p_1, \ldots, p_n] = [Ap_1, \ldots, Ap_n]$$

oraz

$$PB = [p_1, \ldots, p_n] \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = [b_1 p_1, \ldots, b_n p_n],$$

zatem z warunku (8.4) otrzymujemy, że

$$Ap_i = b_i p_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8.5}$$

Z warunku (8.5) wynika, że wektory $p_1, \ldots, p_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A odpowiadającymi wartościom własnym $b_1, \ldots, b_n$.

Przypuśćmy teraz, że macierz A posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^n$ odpowiadających wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Niech $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Macierz V jest nieosobliwa (dlaczego?). Ponadto:

$$AV = A\,[v_1, \ldots, v_n] = [Av_1, \ldots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n] = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

skąd wynika, że $A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, V^{-1}$. Macierz A jest więc diagonalizowalna. ∎

Zanotujmy na koniec, że twierdzenie 7.4, mimo że sformułowane dla macierzy, pozostaje słuszne również dla dowolnego endomorfizmu $f : X \to X$, gdzie X jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. W szczególności, jeżeli f jest endomorfizmem diagonalizowalnym to istnieje baza przestrzeni X złożona z wektorów własnych endomorfizmu f, przy której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna.

Przykład 8.6. *Niech* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *będzie macierzą postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, *zatem macierz* A *nie ma rzeczywistych wartości własnych – nie jest więc diagonalizowalna w klasie macierzy* $\mathbb{R}^{2\times 2}$. *Ta sama macierz traktowana jako element przestrzeni* $\mathbb{C}^{2\times 2}$ *ma dwie różne wartości własne* $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, *którym odpowiadają liniowo niezależne wektory własne równe odpowiednio* $v_1 = (-i, 1)$ *oraz* $v_2 = (i, 1)$. *Z dowodu twierdzenia 7.4 wynika, że* $A = P\,\mathrm{diag}\,(i, -i)\,P^{-1}$, *gdzie*

$$P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Faktycznie, ponieważ $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, *zatem*

$$P\,\mathrm{diag}\,(i, -i)\,P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Rozdział 9

Postać Jordana macierzy

9.1. Macierz Jordana

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Macierz $J_r(\lambda) \in \mathbb{F}^{r\times r}$ postaci

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

nazywamy **klatką Jordana** stopnia r. Oczywiście $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Definicja 9.1. *Macierz blokową $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $n_1+\ldots+n_k = n$ oraz wszystkie niewypisane elementy macierzy J są zerami, nazywamy **macierzą Jordana**.

Skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tworzące przekątną macierzy J są jej wartościami własnymi. Zauważmy również, że każda macierz diagonalna jest macierzą Jordana; wymiar każdej klatki Jordana J_{n_i} tworzącej przekątną tej macierzy jest równy jeden, tj. $J_{n_i} = [\lambda_i]$. Oznacza to, że każda macierz diagonalizowalna jest podobna do pewnej macierzy Jordana (zob. podrozdział 7.3, str. 50). Prawdziwe jest również dużo ogólniejsze

Twierdzenie 9.1. *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą. Istnieje wówczas macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taka że*

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

oraz $n_1 + \ldots + n_k = n$. Macierz Jordana J macierzy A jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności klatek Jordana, które tworzą przekątną macierzy J. Ponadto, jeżeli macierz

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ma tylko rzeczywiste wartości własne to macierz P, ustalająca podobieństwo A oraz J, również może być wybrana jako macierz o elementach rzeczywistych.

Przykład 9.1. *Niech*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $\varepsilon \neq 0$. Ponieważ $\sigma(A_\varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$ zatem macierz A_ε jest diagonalizowalna. Łatwo wykazać, że

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}.$$

Oznacza to, że macierz

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana macierzy A_ε, dla dowolnego $\varepsilon \neq 0$. Jednak, jeżeli $\varepsilon \to 0$ to $J_\varepsilon \to [0]_{2\times 2}$, podczas gdy macierzą Jordana macierzy A_0 jest macierz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.1. *Macierz Jordana J wyznaczona dla macierzy A nie musi być funkcją ciągłą elementów macierzy A. Oznacza to trudności z konstrukcją numerycznie akceptowalnego algorytmu wyznaczania, dla zadanej macierzy A, odpowiadającej jej macierzy Jordana.*

9.1.1. Własności macierzy Jordana

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jej macierzą Jordana.

Własność 1 *Liczba k klatek Jordana tworzących macierz J jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A.*

Własność 2 *Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ jest równa wymiarowi przestrzeni własnej macierzy A odpowiadającej tej wartości własnej (czyli liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ). Suma stopni wszystkich tych klatek równa jest krotności wartości własnej λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego macierzy A.*

Przykład 9.2. *Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

zatem macierz ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wyznaczmy wymiary przestrzeni własnych odpowiadających tym wartościom własnym. Mamy:

$$\begin{aligned} \dim V_{\lambda_1} &= \dim\{\ker(A - I)\} = 3 - \dim\{\operatorname{im}(A - I)\} \\ &= 3 - \mathrm{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, \\ \dim V_{\lambda_2} &= \dim\{\ker(A - 2I)\} = 3 - \dim\{\operatorname{im}(A - 2I)\} \\ &= 3 - \mathrm{r}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Na podstawie własności 1, macierz Jordana macierzy A składa się z dwóch klatek Jordana (możemy wybrać tylko dwa liniowo niezależne wektory własne). Na podstawie własności 2, wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiada jedna klatka Jordana stopnia 1, wartości własnej $\lambda_2 = 2$ musi więc odpowiadać jedna klatka Jordana stopnia 2. Macierz Jordana macierzy A ma więc postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 9.3. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ postaci*

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & & & \\ & & & 0 & 2 & & & \\ \hline & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 0 & 3 & \\ \hline & & & & & & & 3 \end{array}\right],$$

w której wszystkie niewypisane elementy są zerami. Macierz J jest macierzą Jordana. Posiada ona dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Z własności 2 wynika, że dla każdej z nich można wybrać tylko pod dwa liniowo niezależne wektory własne.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu wyznaczenia macierzy Jordana dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ o znanych wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, musimy umieć znajdować liczbę $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ odpowiadających wartości własnej λ macierzy A. Aby wyznaczyć tę liczbę, zdefiniujmy ciąg $r_k(\lambda)$:

$$r_k(\lambda) = \mathrm{r}\left((A - \lambda I)^k\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9.2}$$

Oczywiście $r_0(\lambda) = \mathrm{r}\, I = n$. Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$\ker\left((A - \lambda I)^k\right) \subset \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right). \tag{9.3}$$

Dzieje się tak, gdyż dla $x \in \ker\left((A - \lambda I)^k\right)$:

$$(A - \lambda I)^{k+1} x = (A - \lambda I)\left((A - \lambda I)^k x\right) = (A - \lambda I)\, 0 = 0,$$

skąd wynika, że $x \in \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right)$.
Z warunku (8.3) wynika natychmiast, że

$$\dim\ker\left((A - \lambda I)^k\right) \leqslant \dim\ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right);$$

tym samym

$$\begin{aligned} r_k(\lambda) = \mathrm{r}\left((A - \lambda I)^k\right) &= n - \dim\ker\left((A - \lambda I)^k\right) \geqslant \\ &\geqslant n - \dim\ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right) = \mathrm{r}\left((A - \lambda I)^{k+1}\right) = r_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ciąg $r_k(\lambda)$ określony wzorem (8.2) jest więc ciągiem nierosnącym. Oznacza to, że od pewnego miejsca ciąg $r_k(\lambda)$ musi się stabilizować (tzn. staje się ciągiem stałym).

Własność 3 *Liczba $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia $m \geqslant 1$ odpowiadających wartości własnej λ jest równa:*

$$N(m, \lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda). \tag{9.4}$$

Aby zilustrować powyższą własność rozważmy następujący przykład.

Przykład 9.4. *Niech $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ będzie macierzą z przykładu 8.3. Macierz J ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ponieważ*

- *dla $\lambda_1 = 2$:*

$$J-2I = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0&1&0&&&&&\\ 0&0&1&&&&&\\ 0&0&0&&&&&\\ \hline &&&0&1&&&\\ &&&0&0&&&\\ \hline &&&&&1&1&\\ &&&&&0&1&\\ \hline &&&&&&&1 \end{array}\right]$$

$$(J-2I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0&0&1&&&&&\\ 0&0&0&&&&&\\ 0&0&0&&&&&\\ \hline &&&0&0&&&\\ &&&0&0&&&\\ \hline &&&&&1&2&\\ &&&&&0&1&\\ \hline &&&&&&&1 \end{array}\right]$$

$$(J-2I)^3 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0&0&0&&&&&\\ 0&0&0&&&&&\\ 0&0&0&&&&&\\ \hline &&&0&0&&&\\ &&&0&0&&&\\ \hline &&&&&1&3&\\ &&&&&0&1&\\ \hline &&&&&&&1 \end{array}\right]$$

zatem $r_0(2) = 8, r_1(2) = 6, r_2(2) = 4$ oraz $r_k(2) = 3$ dla $k \geqslant 3$. Tym samym:

$$\begin{aligned} N(1,2) &= 8 - 12 + 4 = 0,\\ N(2,2) &= 6 - 8 + 3 = 1,\\ N(3,2) &= 4 - 6 + 3 = 1,\\ N(k,2) &= 0, \ \text{dla } k \geqslant 4. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wartości własnej $\lambda_1 = 2$ odpowiadają dwie klatki Jordana: jedna stopnia 2 i jedna stopnia 3.

- *dla* $\lambda_2 = 3$*:*

$$J - 3I = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc|c} -1 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & 0 & -1 & & & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & & & & 0 & \end{array}\right]$$

$$(J - 3I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 1 & -2 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & & 1 & -2 & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

zatem $r_0(3) = 8, r_1(3) = 6$ *oraz* $r_k(3) = 5$ *dla* $k \geqslant 2$*. Tym samym:*

$$N(1,3) = 8 - 12 + 5 = 1,$$
$$N(2,3) = 6 - 10 + 5 = 1,$$
$$N(k,3) = 0, \ \textit{dla } k \geqslant 3.$$

Wartości własnej $\lambda_2 = 3$ *odpowiadają więc dwie klatki Jordana: jedna stopnia* 1 *i jedna stopnia* 2*. Postać macierzy* J *potwierdza uzyskane wyniki.*

Pewną niedogodnością faktoryzacji (tj. rozkładu) Jordana $A = PJP^{-1}$ jest to, że w przypadku macierzy rzeczywistej posiadającej nierzeczywiste wartości własne jej macierz Jordana jest macierzą nierzeczywistą. W wielu zagadnieniach praktycznych, oznacza to konieczność poszukiwania innego rozkładu macierzy, nie tak prostego jak rozkład Jordana, ale prowadzącego do macierzy rzeczywistych.

9.2. Rzeczywista macierz Jordana

Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz niech λ i $\overline{\lambda}$ będzie parą nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych macierzy A. Ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zgodnie z (8.2),

$$r_k(\lambda) = \mathrm{r}(A - \lambda I)^k = \mathrm{r}\left(A - \overline{\lambda} I\right)^k = r_k\left(\overline{\lambda}\right)$$

zatem liczba $N(m,\lambda)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej λ jest równa liczbie $N\left(m,\overline{\lambda}\right)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej $\overline{\lambda}$. Oznacza to, że klatki Jordana $J_m(\lambda)$ oraz $J_m\left(\overline{\lambda}\right)$, tworzące przekątną macierzy Jordana, muszą występować parami. Łatwo wykazać, że macierz

$$\left[\begin{array}{cc} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m\left(\overline{\lambda}\right) \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$$

jest podobna do macierzy

$$\left[\begin{array}{ccccc} D(\lambda) & I_2 & & & 0 \\ & D(\lambda) & \ddots & & \\ & & \ddots & & I_2 \\ 0 & & & & D(\lambda) \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}, \tag{9.5}$$

gdzie $D(\lambda) = \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{array}\right]$ oraz I_2 to macierz jednostkowa stopnia 2; macierzą P ustalającą to podobieństwo jest stosownie wybrana macierz permutacji.

Przykład 9.5. *Rozważmy macierz*

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Niech $I_n^{(i,j)}$ będzie macierzą powstałą z macierz jednostkowej I_n przez zamianę miejscami kolumn o indeksach i oraz j. Jest to tzw. macierz permutacji – pomnożenie dowolnej macierzy przez macierz $I_n^{(i,j)}$ z prawej (z lewej) strony powoduje zamianę miejscami kolumn (wierszy) o indeksach i oraz j. Wynika stąd, że $\left(I_n^{(i,j)}\right)^{-1} = I_n^{(i,j)}$. W rozważanym przypadku mamy

$$\left(I_4^{(2,3)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} I_4^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Wracając do rozważań, zauważmy, że dla macierzy S postaci

$$S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dla której

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

przyjmując $\lambda = a + ib$, mamy

$$SD(\lambda) S^{-1} = SD(a+ib) S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Przyjmując oznaczenie $C(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, łatwo stwierdzić, że macierz (9.5) jest podobna do macierzy rzeczywistej

$$C_m(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & & 0 \\ & C(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C(a,b) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}; \tag{9.6}$$

macierzą ustalającą to podobieństwo jest macierz blokowa $\operatorname{diag}(S, \ldots, S)$.

Otrzymane wyniki podsumujemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 9.2. *Dowolna macierz rzeczywista $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest podobna do macierzy rzeczywistej*

$$J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) & & & & \\ & & & C_{m_1}(a_1,b_1) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & C_{m_l}(a_l,b_l) \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

w której $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *to rzeczywiste, a* $a_1 + ib_1, \ldots, a_l + ib_l$ *nierzeczywiste wartości własne macierzy* A*; rzeczywiste macierze blokowe* $J_{n_i}(\lambda_i)$ *to klatki Jordana macierzy* A *występujące w jej postaci Jordana, bloki* $C_{m_i}(a_i, b_i)$ *stopnia* $2m_i$ *są postaci* (9.6)*;* $n_1 + \ldots + n_k + 2(m_1 + \ldots + m_l) = n$.

Przykład 9.6. *Niech* $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ *będzie macierzą dla której* $\sigma(A) = \{1, 1 \pm i\}$ *i taką że*

$$N(1, 1+i) = N(1, 1-i) = 2.$$

Z rozważań poprzedzających twierdzenie wynika, że jeżeli λ *jest nierzeczywistą wartością własną macierzy* A *to liczba* $N(m, \lambda)$ *równa jest liczbie macierzy postaci* (9.5) *stopnia* $2m$ *tworzących rzeczywistą macierz Jordana* J_{real} *macierzy* A*. Tym samym, w rozważanym przypadku macierze Jordana* J *oraz* J_{real} *mają postać*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy teraz, że dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$*, dla której* $\sigma(A) = \{1, 1 \pm i\}$*, mamy*

$$N(2, 1+i) = N(2, 1-i) = 1.$$

W tym przypadku macierze Jordana J *oraz* J_{real} *mają postać*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozdział 10

Baza Jordana

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Rozważmy dowolny endomorfizm $f : X \to X$. Wiemy, że postać macierzy endomorfizmu zależy od wyboru bazy w przestrzeni X. Wiemy również, że jeżeli endomorfizm f jest diagonalizowalny, to jego macierz w bazie przestrzeni X złożonej z jego n liniowo niezależnych wektorów własnych jest macierzą diagonalną. Ponieważ nie każdy endomorfizm jest diagonalizowalny, zatem nasuwa się pytanie o to, jak prosta może być postać macierzy endomorfizmu niediagonalizowalnego. W szczególności, czy istnieje baza przestrzeni wektorowej X, w której macierz endomorfizmu $f : X \to X$ jest macierzą Jordana?

Przykład 10.1. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Macierz J jest macierzą Jordana. Niech e_1, e_2, e_3, e_4 będzie bazą 4–wymiarowej rzeczywistej przestrzeni X oraz niech $f : X \to X$ będzie endomorfizmem wyznaczonym przez macierz J. Z postaci macierzy J otrzymujemy

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = e_2 + \lambda e_3 \\ f(e_4) = e_3 + \lambda e_4 \end{cases}, \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) - \lambda e_2 = e_1 \\ f(e_3) - \lambda e_3 = e_2 \\ f(e_4) - \lambda e_4 = e_3 \end{cases}.$$

Z równań tych wynika, że e_1 jest wektorem własnym endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej λ; pozostałe wektory e_2, e_3, e_4 spełniają równania

$$(f - \lambda \,\mathrm{id})(e_{k+1}) = e_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Powyższy przykład sugeruje sposób konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej, w której macierz endomorfizmu jest macierzą Jordana.

10.1. Wektory główne

Przy założeniach i oznaczeniach sformułowanych na początku rozdziału, przypuśćmy że $\lambda \in \mathbb{F}$ jest wartością własną endomorfizmu f. Oznacza to, że dla endomorfizmu f istnieje co najmniej jeden wektor własny, który na potrzeby tego rozdziału oznaczymy $v_\lambda^{(1)}$ i będziemy nazywać **wektorem**

głównym rzędu 1 odpowiadającym wartości własnej λ. Wektory główne rzędu $k \geqslant 2$ zdefiniujemy indukcyjnie: przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in X$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 10.1. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in X$ spełniający warunek*

$$(f - \lambda \operatorname{id}_X)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{10.1}$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu** k *odpowiadającym wartości własnej* λ.

Powyższą definicję można również sformułować dla macierzy. Wektor własny $v_\lambda^{(1)} \in \mathbb{F}^n$ macierzy A odpowiadający wartości własnej λ nazywać będziemy wektorem głównym rzędu 1. Przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in \mathbb{F}^n$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 10.2. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in \mathbb{F}^n$ będący rozwiązaniem równania*

$$(A - \lambda I)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{10.2}$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu** k *odpowiadającym wartości własnej* λ.

Przykład 10.2. *Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.3}$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ zatem macierz A ma dwie różne wartości własne: $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$. Wyznaczymy dla tych wartości własnych wektory główne.

- *Dla $\lambda_1 = 1$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$; wektor główny rzędy 1 ma więc postać $v_{\lambda_1}^{(1)} = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2 rozważmy, dla ustalonego $t \neq 0$, równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań. Oznacza to, że dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ nie istnieją wektory główne rzędu $k \geqslant 2$.

- *Dla $\lambda_2 = 2$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = z, y = 0$; wektor główny rzędy 1 ma więc postać $v_{\lambda_2}^{(1)} = (t,0,t)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2, rozważmy, dla ustalonego $t \neq 0$, równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = z, y = t$; wektor główny rzędu 2 ma więc postać $v^{(2)}_{\lambda_2} = (r, t, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że postać wektora $v^{(2)}_{\lambda_2}$ zależy od sposobu wyboru wektora $v^{(1)}_{\lambda_2}$. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 3, rozważmy, dla ustalonych $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{R}$, równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ r \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań, a tym samym nie istnieją dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ wektory główne rzędu $k \geqslant 3$.

Podsumowując, dla macierzy A postaci (10.3) udało się wyznaczyć trzy liniowo niezależne wektory główne: jeden odpowiadający wartości własnej λ_1 oraz dwa odpowiadające wartości własnej λ_2. Przyjmując na przykład $t = r = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} v^{(1)}_1 &= (0, 0, 1), \\ v^{(1)}_2 &= (1, 0, 1), \\ v^{(2)}_3 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Ustalając w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ bazę kanoniczną, macierz A określa endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + y, 2y, x + y + z),$$

Wyznaczone powyżej wektory $v^{(1)}_1, v^{(1)}_2, v^{(2)}_2$ są również bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a zatem możemy zapytać o postać macierzy endomorfizmu f w tej właśnie bazie. Ponieważ

$$\begin{aligned} f\left(v^{(1)}_1\right) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = v^{(1)}_1 + 0v^{(1)}_2 + 0v^{(2)}_2, \\ f\left(v^{(1)}_2\right) &= f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 0v^{(1)}_1 + 2v^{(1)}_2 + 0v^{(2)}_2, \\ f\left(v^{(2)}_2\right) &= f(1, 1, 1) = (3, 2, 3) = 0v^{(1)}_1 + v^{(1)}_2 + 2v^{(2)}_2, \end{aligned}$$

więc macierz A_f endomorfizmu f w bazie złożnej z wektorów głównych macierzy A ma postać

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz Jordana macierzy A, którą w zupełnie inny sposób uzyskaliśmy w przykładzie 8.2. Zauważmy również, że dla macierzy $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, której kolumnami są wektory $v^{(1)}_1, v^{(1)}_2, v^{(2)}_2$, tj.

$$P = \left[v^{(1)}_1, v^{(1)}_2, v^{(2)}_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mamy

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz P jest więc macierzą ustalającą podobieństwo między macierzą A oraz jej macierzą Jordana.

Własności wektorów głównych

Własność 10.1. *Dla każdej wartości własnej istnieją wektory główne rzędu co najmniej 1.*

Własność 10.2. *Wektory główne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

Własność 10.3. *Wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.*

Własność 10.4. *Dla wartości własnej λ o krotności algebraicznej r istnieje dokładnie r liniowo niezależnych wektorów głównych; wśród nich są wszystkie liniowo niezależne wektory własne odpowiadające wartości własnej λ.*

Ponieważ wektory główne kolejnych rzędów definiujemy rekurencyjnie, zatem jest oczywiste, że postać wektora głównego rzędu k będzie zależała od sposobu wyboru wszystkich wektorów głównych niższego rzędu. W szczególności, wszystkie wektory główne rzędu $k \geqslant 2$ (o ile istnieją) będą zależały od wyboru wektora własnego, dla którego są wyznaczane. W efekcie, każdy liniowo niezależny wektor własny wyznacza pewien skończony ciąg wektorów głównych kolejnych rzędów. Z powyższych własności wektorów głównych wynika, że wektory te można zawsze wybrać w ten sposób, aby liniowo niezależne wektory własne oraz odpowiadające im wektory główne kolejnych rzędów tworzyły bazę całej przestrzeni (cała trudność omawianego zadania polega na tym, że przy nieodpowiednim wyborze liniowo niezależnych wektorów własnych możemy nie być w stanie wybrać wektorów głównych kolejnych rzędów). Podsumowując: **dla dowolnego endomorfizmu $f : X \to X$, który posiada n wartości własnych (liczonych z krotnościami, $n = \dim X$) istnieje baza przestrzeni X złożona z jego wektorów głównych**.

Z definicji wektorów głównych wynika, że jeżeli $v_\lambda^{(i)}$ jest wektorem głównym rzędu i ($i = 1, \ldots, k$) odpowiadającym wartości własnej λ endomorfizmu f, to

$$\begin{aligned} f\left(v_\lambda^{(1)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(1)}, \\ f\left(v_\lambda^{(2)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(2)} + v_\lambda^{(1)}, \\ &\vdots \\ f\left(v_\lambda^{(k)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Tym samym endomorfizm f zawężony do podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory $v_\lambda^{(1)}, \ldots, v_\lambda^{(k)}$ jest również endomorfizmem, tj.

$$f : \operatorname{lin}\left\{v_\lambda^{(1)}, \ldots, v_\lambda^{(k)}\right\} \ni x \to f(x) \in \operatorname{lin}\left\{v_\lambda^{(1)}, \ldots, v_\lambda^{(k)}\right\}$$

którego macierzą w bazie $v_\lambda^{(1)}, \ldots, v_\lambda^{(k)}$ jest klatka Jordana stopnia k odpowiadająca wartości własnej λ. Oznacza to, że macierz endomorfizmu f w bazie złożonej z jego wektorów głównych jest macierzą Jordana. Bazę tę nazywamy **bazą Jordana** przestrzeni X względem endomorfizmu f.

Uwaga 10.1. *Czasami macierz Jordana defniuje się jako macierz blokową, której bloki – klatki Jordana to macierze kwadratowe, na przekątnej z wartościami własnymi i jedynkami pod przekątną (a nie nad przekątną, jak w przyjętej przez nas definicji 8.1). Aby uzyskać taką właśnie klatkę Jordana wystarczy wektory główne ponumerować w odwrotnej kolejności, tj.*

$$w_\lambda^{(i)} = v_\lambda^{(k-i+1)}, \quad \textit{dla } i = 1, \ldots, k.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f\left(w_\lambda^{(1)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)} = \lambda w_\lambda^{(1)} + w_\lambda^{(2)}, \\ f\left(w_\lambda^{(2)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k-1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k-1)} + v_\lambda^{(k-2)} = \lambda w_\lambda^{(2)} + w_\lambda^{(3)}, \\ &\vdots \\ f\left(w_\lambda^{(k)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(1)} = \lambda w_\lambda^{(k)} \end{aligned}$$

zatem klatka Jordana ma w tym przypadku postać:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

10.2. Macierz przejścia

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ oraz $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ będą dwiema bazami przestrzeni X. Każdy wektor bazy e' możemy wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy e:

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Otrzymaną w ten sposób macierz współczynników $M_{e\to e'} = [p_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ nazywamy **macierzą przejścia** ze *starej* bazy e do *nowej* bazy e'. Zanotujmy, że i–tą kolumnę macierzy przejścia tworzą współrzędne i–tego wektora nowej bazy jako kombinacji liniowej wektorów starej bazy. Macierz przejścia jest więc macierzą endomorfizmu

$$\mathrm{id} : \mathrm{lin}\left\{e'_1, \ldots, e'_n\right\} \ni x \to x \in \mathrm{lin}\left\{e_1, \ldots, e_n\right\},$$

tj. $M_{e\to e'} = M_{e',e}(\mathrm{id})$.

Dowolny element $x \in X$ możemy wyrazić jako kombinację liniową elementów bazy e, jak również bazy e'. Poszukamy teraz zależności między tymi reprezentacjami. Mamy

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \quad \text{oraz} \quad x = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j e'_j. \tag{10.4}$$

Wykorzystując macierz przejścia mamy:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha'_j\right) e_i.$$

Stąd oraz z postaci rozwinięcia wektora x względem bazy e wynika zależność między współrzędnymi wektora względem starej oraz nowej bazy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}. \tag{10.5}$$

Zależność tę możemy ująć krótko:

$$\alpha = M_{e\to e'}\alpha', \tag{10.6}$$

gdzie α (odpowiednio α') to wektor współrzędnych x względem starej (nowej) bazy, a $M_{e\to e'}$ to macierz przejścia z pierwszej bazy do drugiej. Zauważmy również, że z równości (10.6) wynika:

$$\alpha' = M^{-1}_{e\to e'}\alpha,$$

co oznacza, że macierzą przejścia z bazy nowej do starej jest macierz $M^{-1}_{e\to e'}$, tj. $M_{e'\to e} = M^{-1}_{e\to e'}$.

Przykład 10.3. *Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ dwie bazy: starą $e_1 = (1,2), e_2 = (0,1)$ oraz nową $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (-1,1)$. Wyznaczymy macierz przejścia z bazy starej do nowej. Mamy*

$$e'_1 = (1,1) = p_{11}(1,2) + p_{21}(0,1) = (p_{11}, 2p_{11} + p_{21})$$
$$e'_2 = (-1,1) = p_{12}(1,2) + p_{22}(0,1) = (p_{12}, 2p_{12} + p_{22})$$

skąd wynika, że: $p_{11} = 1, p_{21} = -1, p_{12} = -1, p_{22} = 3$. Macierz przejścia ma więc postać

$$M_{e\to e'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Niech teraz $(2,1)_e$ będzie wektorem wyrażonym w starej bazie. Wyznaczymy jego współrzędne w nowej bazie. Mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wyniku przedstawimy obydwa wektory w tej samej bazie kanonicznej k: $k_1 = (1,0), k_2 = (0,1)$:

$$(2,1)_e = 2e_1 + e_2 = 2(1,2) + (0,1) = (2,5)_k$$
$$(7/2, 3/2)_{e'} = \frac{7}{2}e'_1 + \frac{3}{2}e'_2 = \frac{7}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(-1,1) = (2,5)_k.$$

10.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego

Na zakończenie tego rozdziału zbadamy jak zmienia się macierz odwzorowania liniowego wraz ze zmianą baz przestrzeni między którymi to odwzorowanie jest określone.

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Przyjmując w przestrzeni X bazę $e = (e_1, \ldots, e_n)$, a w przestrzeni Y bazę $g = (g_1, \ldots, g_m)$, odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $M_{e,g}(f) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, tj.

$$y = M_{e,g}(f)x. \tag{10.7}$$

Ustalając w przestrzeni X nową bazę $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia $M_{e\to e'}$ z bazy e do bazy e'; oczywiście $M_{e\to e'} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Podobnie, dokonując zmiana bazy w przestrzeni Y z g na $g' = (g'_1, \ldots, g'_m)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia $M_{g\to g'} \in \mathbb{F}^{m\times m}$ z bazy g do g'. Niech x' (odpowiednio y') będą współrzędnymi wektorów x (odp. y) w nowych bazach przestrzeni X i Y. Otrzymujemy

$$x = M_{e\to e'}x' \quad \text{oraz} \quad y = M_{g\to g'}y'.$$

Łącząc powyższe zależności z równaniem (10.7) mamy

$$M_{g\to g'}y' = M_{e,g}(f)M_{e\to e'}x',$$

lub równoważnie

$$y' = M^{-1}_{g\to g'}M_{e,g}(f)M_{e\to e'}x' = M_{g'\to g}M_{e,g}(f)M_{e\to e'}x'.$$

Oznacza to, że w nowych bazach przestrzeni X oraz Y odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $M_{g'\to g}M_{e,g}(f)M_{e\to e'}$, tj.

$$M_{e',g'}(f) = M_{g'\to g}M_{e,g}(f)M_{e\to e'}.$$

W szczególności, **jeżeli $f : X \to X$ jest endomorfizmem reprezentowanym przez macierz A wyznaczoną w bazie e przestrzeni X, to macierzą tego endomorfizmu w bazie e' jest macierz $P^{-1}AP$, gdzie P jest macierzą przejścia z baze e do bazy e'.**

10.3.1. Baza złożona z wektorów własnych

Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; przestrzeń wektorową $\mathbb{F}^n$ rozważamy nad ciałem $\mathbb{F}$. Przypuśćmy, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Oznacza to, że istnieje baza v przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f. Niech A będzie macierzą tego endomorfizmu w wybranej bazie przestrzeni $\mathbb{F}^n$. Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli P jest macierzą przejścia z wybranej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ do bazy v, to w tej nowej bazie endomorfizm f jest reprezentowany przez macierz diagonalną $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdzie λ_i jest wartością własną endomorfizmu f odpowiadającą wektorowi własnemu v_i $(i = 1, \ldots, n)$. Macierzą ustalającą podobieństwo między macierzami A oraz $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jest macierz P, tzn.

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ponieważ i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora bazy v względem starej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$, zatem wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora własnego endomorfizmu f, tzn. $P = [v_1, \ldots, v_n]$ (zob. przykład 7.5).

10.3.2. Baza Jordana

Jeżeli endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ nie jest diagonalizowalny to nie istnieje baza przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z jego wektorów własnych. Zawsze możemy natomiast wyznaczyć bazę przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożoną z jego wektorów głównych. Oznaczmy tę bazę przez v. Wiemy, że w bazie tej macierz endomorfizmu f ma postać Jordana. Jeżeli A jest macierzą ednomorfizmu f w innej bazie, a P jest macierzą przejścia z tej bazy do bazy złożonej z wektorów głównych, to wówczas

$$P^{-1}AP = J,$$

gdzie J jest macierzą Jordana endomorfizmu f. Wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora głównego endomorfizmu f (zob. przykład 9.2).

Na zakończenie rozważmy następujący

Przykład 10.4. *Niech $D : \pi_3 \to \pi_3$ będzie endomorfizmem określonym wzorem*

$$D(f) = f'.$$

Wybierając w przestrzeni π_3 bazę $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$, otrzymujemy:

$$D(e_1) = 0,\ D(e_2) = e_1,\ D(e_3) = 2e_2,\ D(e_4) = 3e_3.$$

W bazie e_1, e_2, e_3, e_4 przestrzeni π_3 macierz A endomorfizmu D ma więc postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^4$ zatem $\lambda_0 = 0$ jest jedyną wartością własną macierzy A (endomorfizmu D). Ponieważ

$$\dim \ker (A - \lambda_0 I) = \dim \ker A = 4 - \operatorname{r} A = 1,$$

zatem dla macierzy A istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny postaci $(t, 0, 0, 0)$. Macierz A nie jest więc diagonalizowalna. Wyznaczymy jej wektory główne. Dla ustalonego $t \neq 0$, mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = r, y = t,\ z = w = 0$, *gdzie* $r \in \mathbb{R}$. *Tym samym* $v^{(2)} = (r, t, 0, 0)$ *jest wektorem głównym rzędy* 2. *Podobnie, dla ustalonych* $t \neq 0$ *oraz* $r \in \mathbb{R}$, *mamy*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = s, y = r, z = \frac{1}{2}t, w = 0$, *gdzie* $s \in \mathbb{R}$. *Tym samym* $v^{(3)} = \left(s, r, \frac{1}{2}t, 0\right)$ *jest wektorem głównym rzędy* 3. *Musimy wyznaczyć jeszcze wektor główny rzędu* 4. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ \frac{1}{2}t \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $x = p, y = s, z = \frac{1}{2}r, w = \frac{1}{6}t$, *gdzie* $t \neq 0$ *oraz* $p, s, r \in \mathbb{R}$. *Ustalając* $p = s = 1$, $r = 2, t = 6$ *otrzymujemy cztery liniowo niezależne wektory główne macierzy* A

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= (6, 0, 0, 0)\,, \\ v^{(2)} &= (2, 6, 0, 0)\,, \\ v^{(3)} &= (1, 2, 3, 0)\,, \\ v^{(4)} &= (1, 1, 1, 1)\,. \end{aligned}$$

Odpowiadają one czterem wektorom głównym endomorfizmu D:

$$v_1(x) = 6,\ v_2(x) = 2 + 6x,\ v_3(x) = 1 + 2x + 3x^2,\ v_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Łatwo stwierdzić, że macierz

$$P = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy e_1, e_2, e_3, e_4 *do bazy złożonej z wektorów głównych endomorfizmu* D. *Istotnie,*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz Jordana J *jest macierzą endomorfizmu* D *w bazie złożonej z jego wektorów głównych.*

Rozdział 11

Formy kwadratowe

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definicja 11.1. *Funkcję $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postaci*

$$h(x) = x^T Ax \tag{11.1}$$

nazywamy **formą kwadratową**.

Uwaga 11.1. *Zauważmy, że wyrażenie $x^T Ax$ ma sens również w przypadku dowolnej kwadratowej macierzy niesymetrycznej. Okazuje się jednak, że formę kwadratową zdefiniowaną przez dowolną macierz niesymetryczną zawsze można równoważnie zdefiniować przez macierz symetryczną. Istotnie,*

$$x^T Ax = x^T \left(\frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} \right) x = x^T \frac{A + A^T}{2} x + x^T \frac{A - A^T}{2} x$$

oraz

$$x^T \frac{A - A^T}{2} x = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - x^T A^T x \right) = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - \left(x^T A^T x \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(x^T Ax - x^T Ax \right) = 0,$$

zatem

$$x^T Ax = x^T \frac{A + A^T}{2} x.$$

Macierz $(A + A^T)/2$ jest macierzą symetryczną.

Przyjmując $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ zależność (11.1) możemy równoważnie wyrazić w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Przykład 11.1. *Odwzorowania*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_2 x_3$$

oraz

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_2 x_3$$

są formami kwadratowymi o macierzach

$$A_{h_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad oraz \quad A_{h_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowania

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2 \quad oraz \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

nie są formami kwadratowymi.

11.1. Określoność formy kwadratowej

W klasie wszystkich form kwadratowych szczególną rolę odgrywają formy określone.

Definicja 11.2. *Formę kwadratową $h(x) = x^T Ax$ nazywamy*

- *dodatnio określoną, jeżeli*
$$x^T Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *ujemnie określoną, jeżeli*
$$x^T Ax < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *dodatnio półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *ujemnie półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *nieokreśloną, jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych warunków.*

Przykład 11.2. *Rozważmy ponownie formę kwadratową*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Ponieważ $h_1(1, 0, 0) = -1$ oraz $h_1(0, 1, 0) = 1$, zatem forma kwadratowa h_1 jest nieokreślona. Forma kwadratowa

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest dodatnio określona; z kolei forma

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest półokreślona dodatnio (dlaczego?).

11.2. Metody badania określoności formy kwadratowej

Poniżej przedstawione zostaną (bez dowodów) najczęściej stosowane metody badania określoności form kwadratowych.

11.2.1. Kryterium Sylvestera

Twierdzenie 11.1. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie:*

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^j D_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Przykład 11.3. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$$

mamy

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$D_1 = 3 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

zatem forma kwadratowa h jest dodatnio określona.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z warunków $D_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ nie wynika dodatnia półokreśloność formy kwadratowej $h(x) = x^T Ax$.

Przykład 11.4. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2^2$$

mamy $D_1 \geqslant 0$ oraz $D_2 \geqslant 0$, podczas gdy forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

Twierdzenie 11.2. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jest:*

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$;

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^p \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Przykład 11.5. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

mamy

- *trzy minory główne stopnia jeden: $a_{11} = -1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$;*

- *trzy minory główne stopnia dwa:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0;$$

- *jeden minor główny stopnia trzy:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Z twierdzenia 10.2 wynika, że forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

11.2.2. Kryterium wartości własnych

Można udowodnić, że rzeczywista macierz symetryczna A ma rzeczywiste wartości własne. Niech $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym jej wartości własnej $\lambda(A)$ oraz przypuśćmy, że forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$ jest dodatnio określona. Wówczas

$$0 < v^T Av = v^T \lambda(A)\, v = \lambda(A)\, v^T v = \lambda(A) \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{11.2}$$

a stąd $\lambda(A) > 0$. Oznacza to, że jeżeli forma kwadratowa jest dodatnio określona to jej macierz ma dodatnie wartości własne. Łatwo o podobne zależności dla form określonych ujemnie oraz półokreślonych.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 11.3. *Niech $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ będą wartościami własnymi macierzy $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wówczas forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$ jest*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) > 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Przykład 11.6. *Rozważmy formę kwadratową h z przykładu 10.5:*

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

Jej macierz ma trzy rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Z twierdzenia 10.3 wynika, że forma kwadratowa (11.3) jest ujemnie półokreślona.

11.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a)

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 11.4. *Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dla której macierz $C = P^T AP$ jest diagonalna. Innymi słowy, dla każdej formy kwadratowej*

$$h(x) = x^T Ax$$

istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe $x = Py$, dla którego forma kwadratowa

$$\psi(y) = h(Py) = y^T Cy$$

przyjmuje postać kanoniczną

$$\psi(y) = c_1 y_1^2 + \ldots + c_n y_n^2, \tag{11.4}$$

dla pewnych skalarów $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$; oczywiście $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$.

Łatwo uzasadnić, że występujące w powyższym twierdzeniu macierze P oraz C nie są wyznaczone jednoznacznie. W szczególności, jeżeli macierz P nie jest macierzą ortogonalną tj. $P^T \neq P^{-1}$, to macierze A i C nie muszą być podobne. W konsekwencji elementy $c_1, \ldots, c_n$ tworzące przekątną macierzy C nie muszą być wartościami własnymi macierzy A.

Z zależności (11.4) wynika, że forma kwadratowa ψ (a więc i forma kwadratowa h) jest

- dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Metoda Lagrange'a Formę kwadratową

$$h(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

możemy zapisać w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\left(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\right).$$

Rozważmy trzy przypadki:

- $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas $h(x) \equiv 0$, tzn. forma kwadratowa jest jednocześnie ujemnie oraz dodatnio półokreślona;
- $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz istnieją indeksy k, l dla których $a_{kl} \neq 0$. Niech e_k oraz e_l będą odpowiednio k-tym oraz l-tym wektorem bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $v^+ = e_k + e_l$ oraz $v^- = e_k - e_l$. Wówczas

$$h\left(v^+\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^+ v_j^+ = 2a_{kl}$$

$$h\left(v^-\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^- v_j^- = -2a_{kl}$$

skąd wynika, że w rozważanym przypadku forma kwadratowa h jest nieokreślona;

- $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego indeksu i; bez straty ogólności możemy przyjąć, że $i = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

Do formy kwadratowej h możemy teraz zastosować zamianę zmiennych:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}y_j \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad\vdots \\ x_n = y_n \end{cases}. \tag{11.5}$$

Równania (11.5) określają nieosobliwe przekształcenie liniowe postaci $x = Py$, gdzie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W wyniku zamiany zmiennych (11.5) otrzymujemy

$$h(x) = h(Py) = a_{11}y_1^2 + \tilde{h}(y_2, \ldots, y_n),$$

gdzie $\tilde{h}$ jest formą kwadratową zmiennych $y_2, \ldots, y_n$, do której ponownie stosujemy przedstawione rozumowanie rugując systematycznie kolejne zmienne i sprowadzając ją do postaci kanonicznej (lub wcześniej stwierdzając jej nieokreśloność).

Przykład 11.7. *Rozważmy formę kwadratową*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Stosując opisaną powyżej metodę Lagrange'a sprowadzimy ją do postaci kanonicznej. Mamy:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 = -\left(x_1^2 - 2x_1x_2\right) + x_2^2 - 4x_2x_3 = \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 = -(x_1 - x_2)^2 + 2\left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) - 2x_3^2 = \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$

Rozważana forma kwadratowa jest więc nieokreślona. Zauważmy ponadto, że dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ \quad x_3 = y_3 \end{cases} \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

która jest przekształceniem liniowym $x = Py$ o macierzy P postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
h(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \;\; y_2 \;\; y_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2.
\end{aligned}
$$

Jest to postać kanoniczna rozważanej formy kwadratowej.

Rozdział 12

Przestrzenie unitarne

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 12.1 (iloczyn skalarny). *Funkcję $s : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki:*

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$:

$$s(\alpha x + \beta y, z) = \alpha s(x, z) + \beta s(y, z);$$

(b) $\forall x, y \in X$:

$$s(x, y) = s(y, x);$$

(c) $\forall x \in X$:

$$s(x, x) \geqslant 0 \quad oraz \quad s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

nazywamy **iloczynem skalarnym**. *Parę (X, s) nazywamy* **przestrzenią unitarną**.

Iloczyn skalarny wektorów x, y będziemy również oznaczać jako $\langle x, y \rangle$ lub $x \circ y$.

Przykład 12.1. *Odwzorowanie*

$$(x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{12.1}$$

to naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 12.2. *Odwzorowanie*

$$s(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathcal{L}_2(a, b)$ tzw. funkcji całkowalnych z kwadratem, tj.

$$\mathcal{L}_2(a, b) = \left\{ f : (a, b) \to \mathbb{R} : \int_a^b f^2(x)\, dx < +\infty \right\}.$$

Przykład 12.3. *Odwzorowanie*

$$s(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^{m \times n}$.

12.1. Norma określona przez iloczyn skalarny

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 12.2 (norma). *Funkcję $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki*

(a) $\forall x \in X$:

$$\|x\| \geqslant 0 \quad oraz \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

(b) $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

(c) $\forall x, y \in X$:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

nazywamy **normą**. *Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy* **przestrzenią unormowaną**.

Warunki występujące w powyższej definicji to naturalne wymagania stawiane przed funkcją mierzącą długość wektorów.

Przykład 12.4. *Każda z poniższych par $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną:*

a) $X = \mathbb{R}^n$ *z normą*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2};$$

b) $X = \mathcal{C}_{[a,b]}$ *z normą*

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\};$$

c) $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ *z normą*

$$\|A\| = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A^T A)\}}.$$

Wykażemy teraz, że jeżeli w rzeczywistej przestrzeni liniowej X zdefiniowano iloczyn skalarny s to funkcja $\|\cdot\|_s : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$\|x\|_s := \sqrt{s(x, x)} \tag{12.2}$$

jest normą w X.

Zauważmy na początek, że na podstawie warunku (c) definicji 11.1, funkcja $\|\cdot\|_s$ jest dobrze określona – wartości $s(x, x)$ są nieujemne; ten sam warunek gwarantuje również, że punkt (a) definicji 11.2 jest spełniony. Ponieważ

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_s &= \sqrt{s(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha s(x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha s(\alpha x, x)} = \sqrt{\alpha^2 s(x, x)} \\ &= |\alpha| \sqrt{s(x, x)} = |\alpha| \cdot \|x\|_s\end{aligned}$$

zatem punkt (b) również zachodzi. Zanim uzasadnimy punkt (c), wykażemy następujące

Twierdzenie 12.1 (nierówność Schwarza). *Dla dowolnych wektorów x, y rzeczywistej przestrzeni liniowej wyposażonej w iloczyn skalarny s zachodzi*

$$|s(x, y)| \leqslant \|x\|_s \cdot \|y\|_s. \tag{12.3}$$

Dowód: Dla dowolnych ustalonych wektorów x, y rozważmy funkcję

$$\varphi(t) = s(x + ty, x + ty)$$

zmiennej $t \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $y \neq 0$. Z warunku (c) definicji 11.1 wynika, że

$$\varphi(t) \geqslant 0, \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}. \tag{12.4}$$

Ponieważ

$$\varphi(t) = t^2 s(y, y) + 2ts(x, y) + s(x, x)$$

zatem φ jest funkcją kwadratową, która – wobec warunku (12.4) – ma niedodatni wyróżnik, tj.

$$\triangle = 4s^2(x,y) - 4s(x,x)\,s(y,y) \leqslant 0,$$

lub równoważnie

$$s^2(x,y) \leqslant s(x,x)\,s(y,y).$$

Stąd wynika zależność (12.3). ∎

Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy więc

$$\begin{aligned}\|x+y\|_s^2 &= s(x+y,x+y) = s(x,x) + 2s(x,y) + s(y,y) \leqslant \\ &\leqslant s(x,x) + 2\sqrt{s(x,x)\,s(y,y)} + s(y,y) = \\ &= \left(\sqrt{s(x,x)} + \sqrt{s(y,y)}\right)^2 = (\|x\|_s + \|y\|_s)^2.\end{aligned}$$

Oznacza to, że wzór (12.2) definiuje normę w dowolnej przestrzeni unitarnej.

12.2. Ortogonalność

Z nierówności Schwarza wynika, że dla niezerowych wektorów x, y rzeczywistej przestrzeni X:

$$-1 \leqslant \frac{s(x,y)}{\|x\|_s \cdot \|y\|_s} \leqslant 1.$$

Wynika stąd, że iloraz $s(x,y) / (\|x\|_s \cdot \|y\|_s)$ jest kosinusem pewnego kąta $\measuredangle(x,y) \in [0,\pi]$, tj.

$$\cos\measuredangle(x,y) = \frac{s(x,y)}{\|x\|_s \cdot \|y\|_s}.$$

Na podstawie definicji przyjmujemy, że jest to kąt między wektorami x oraz y. Mamy więc

$$s(x,y) = \|x\|_s \cdot \|y\|_s \cdot \cos\measuredangle(x,y).$$

Definicja 12.3. *Dwa wektory nazywamy* **ortogonalnymi**, *jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy zero.*

Wektor zerowy jest jedynym wektorem prostopadłym do każdego wektora (również do siebie samego).

Przykład 12.5. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z naturalnym iloczynem skalarnym. Dla wektorów $v_1 = \left(1,\sqrt{3},0\right), v_2 = (0,1,0)$ mamy*

$$\cos\varphi = \frac{s(v_1,v_2)}{\|v_1\|_s \cdot \|v_2\|_s} = \frac{1\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot 1 + 0\cdot 0}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tym samym $\measuredangle(v_1,v_2) = \varphi = \pi/6$.

Przykład 12.6. *W przestrzeni $\pi_n(\mathbb{R})$ definiujemy funkcje:*

$$\begin{aligned}s_1(f,g) &= \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx, \\ s_2(f,g) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(-1)\,g^{(k)}(-1).\end{aligned}$$

Przestrzenie $(\pi_n(\mathbb{R}), s_1)$ oraz $(\pi_n(\mathbb{R}), s_2)$ są przestrzeniami unitarnymi. Niech $f(x) = 2x+1$ oraz $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Wówczas

$$s_1(f,g) = \int_{-1}^{1} (2x+1)\left(3x^2-3x+1\right)dx = \int_{-1}^{1} 6x^3 - 3x^2 - x + 1dx = 0$$

oraz

$$s_2(f,g) = f(-1)\,g(-1) + f'(-1)\,g'(-1) + f''(-1)\,g''(-1) = -25.$$

Oznacza to, że rozważane wielomiany są ortogonalne w przestrzeni $(\pi_n(\mathbb{R}), s_1)$, natomiast nie są ortogonalne w przestrzeni $(\pi_n(\mathbb{R}), s_2)$.

12.3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Rozważmy ciąg $v_1, \ldots, v_n$ wektorów rzeczywistej przestrzeni liniowej X wyposażonej w iloczyn skalarny s. Jeżeli

$$v_i \perp v_j \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

to mówimy, że ciąg $v_1, \ldots, v_n$ jest **ciągiem wektorów ortogonalnych**. Jeżeli dodatkowo $\|v_i\|_s = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, to ciąg ten nazywamy **ciągiem ortonormalnym**.

Przypuśćmy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ stanowią bazę przestrzeni X. Podamy teraz algorytm modyfikujący tę bazę w taki sposób, że nowo otrzymana baza $v_1', \ldots, v_n'$ jest bazą ortonormalną przestrzeni X.

Twierdzenie 12.2 (algorytm Grama-Schmidta). *Niech ciąg $v_1, \ldots, v_n$ stanowi bazę rzeczywistej przestrzeni X wyposażonej w iloczyn skalarny s. Wówczas ciąg wektorów $v_1', \ldots, v_n'$ określonych wzorami*

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|_s}, \quad v_k' = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i'}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i' \right\|_s}, \quad k = 2, \ldots, n$$

spełnia następujące warunki:

(a) *dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$: $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{lin}\{v_1', \ldots, v_k'\}$;*
(b) *ciąg $v_1', \ldots, v_n'$ jest bazą ortonormalną przestrzeni X.*

Dowód: Dowód poprowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, tj. $\|v_1'\|_s = 1$ oraz $\operatorname{lin}\{v_1\} = \operatorname{lin}\{v_1'\}$. Przypuśćmy więc, że układ $v_1', \ldots, v_{k-1}'$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Niech

$$v = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i'.$$

Wykażemy, że wektor v jest ortogonalny do wektorów $v_1', \ldots, v_{k-1}'$. Mamy dla $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\begin{aligned} s\left(v, v_j'\right) &= s\left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i', v_j'\right) = s\left(v_k, v_j'\right) - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) s\left(v_i', v_j'\right) = \\ &= s\left(v_k, v_j'\right) - s\left(v_k, v_j'\right) = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że $v \neq 0$. W przeciwnym przypadku mielibyśmy

$$v_k \in \operatorname{lin}\left\{v_1', \ldots, v_{k-1}'\right\} = \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$$

wbrew liniowej niezależności wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Możemy więc przyjąć

$$v_k' := \frac{v}{\|v\|_s} = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i'}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s\left(v_k, v_i'\right) v_i' \right\|_s}.$$

Tym samym wektory $v_1', \ldots, v_k'$ tworzą układ wektorów ortonormalnych oraz rozpinają tę samą przestrzeń co wektory $v_1, \ldots, v_k$. ∎

Przykład 12.7. *Niech $X = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + w = 0, x + y + z = 0\right\}$. Łatwo stwierdzić, że*

$$X = \{(-y - z, y, z, -y - 2z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Jest to więc podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^4$, *a ponieważ*

$$(-y-z, y, z, -y-2z) = y\,(-1,1,0,-1) + z\,(-1,0,1,-2)$$

zatem jej bazą są wektory $e_1 = (-1,1,0,-1)\,, e_2 = (-1,0,1,-2)$. *Wyznaczymy bazę ortonormalną przestrzeni* X *w sensie naturalnego iloczynu skalarnego indukowanego z przestrzeni* $\mathbb{R}^4$. *Z twierdzenia 11.2 wynika, że szukana baza* e_1', e_2' *może być wyznaczona ze wzorów*

$$e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \quad e_2' = \frac{e_2 - (e_2 \circ e_1')\, e_1'}{\|e_2 - (e_2 \circ e_1')\, e_1'\|}.$$

Ponieważ $\|e_1\| = \sqrt{e_1 \circ e_1} = \sqrt{3}$, *zatem* $e_1' = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,0,-1)$. *Podobnie, ponieważ*

$$e_2 - \left(e_2 \circ e_1'\right) e_1' = (-1,0,1,-2) - \left((-1,0,1,-2) \circ \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,0,-1)\right) \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,0,-1) =$$
$$= (-1,0,1,-2) - (-1,1,0,-1) = (0,-1,1,-1)$$

więc

$$e_2' = \frac{(0,-1,1,-1)}{\sqrt{(0,-1,1,-1) \circ (0,-1,1,-1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(0,-1,1,-1)\,.$$

Wektory

$$e_1' = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,0,-1)\,, \qquad e_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}(0,-1,1,-1)$$

są bazą ortonormalną przestrzeni X.

12.4. Abstrakcyjna wersja twierdzenia Pitagorasa

W przestrzeniach unitarnych potrafimy wyznaczać długości wektorów oraz miary kątów jakie tworzą. Możemy zatem sformułować twierdzenie Pitagorasa, które w swoim klasycznym wydaniu wykorzystuje jedynie pojęcia długości oraz prostopadłości.

Twierdzenie 12.3 (abstrakcyjna wersja twierdzenia Pitagorasa). *Niech* (X, s) *będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną oraz niech* $\|u\| = \sqrt{s(u,u)}$. *Wówczas dla dowolnych wektorów* $v, w \in X$ *zachodzi*

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad v \perp w. \tag{12.5}$$

Dowód: Wykorzystując własności iloczynu skalarnego s możemy zapisać

$$\|v+w\|^2 = s(v+w, v+w) = s(v,v) + 2s(v,w) + s(w,w) = \|v\|^2 + 2s(v,w) + \|w\|^2.$$

To oznacza, że równość $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s(v,w) = 0$. ∎

12.5. Rzut prostopadły na podprzestrzeń liniową

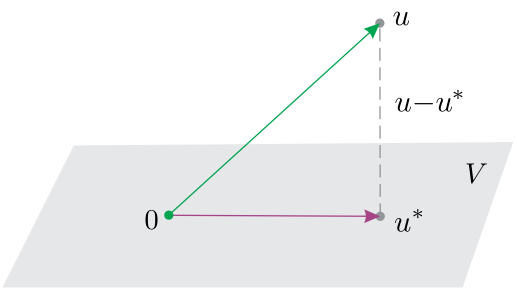
Niech V będzie n-wymiarową podprzestrzenią liniową rzeczywistej przestrzeni unitarnej (X, s). Rozważmy dowolny wektor $u \in X \backslash V$.

Definicja 12.4 (rzut ortogonalny). *Wektor* $u^* \in V$ *spełniający warunek*

$$\forall v \in V: \quad u - u^* \perp v \tag{12.6}$$

nazywamy **rzutem ortogonalnym wektora** u **na podprzestrzeń** V.

Poza ładną interpretacją geometryczną rzut ortogonalny posiada bardzo ważną własność, którą opisuje poniższe twierdzenie.



Wykres 3. Rzut ortogonalny wektora u na podprzestrzeń liniową V.

Twierdzenie 12.4 (optymalność rzutu ortogonalnego). *Niech (X, s) będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną oraz niech $V \subset X$ będzie jej podprzestrzenią liniową. Niech $u^* \in V$ będzie rzutem ortogonalnym (ortogonalnym w sensie iloczynu skalarnego s) wektora u na podprzestrzeń V. Wówczas*

$$\forall v \in V: \quad \|u - u^*\| \leqslant \|u - v\|, \tag{12.7}$$

gdzie $\|w\| = \sqrt{s(w,w)}$ dla $w \in X$.

Dowód: Dla dowolnego wektora $v \in V$ mamy

$$\|u - v\|^2 = \|u - u^* + u^* - v\|^2.$$

Ponieważ wektor $u - u^*$ jest prostopadły do podprzestrzeni V (zob. warunek (12.6)) oraz $u^* - v \in V$, zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać

$$\|u - v\|^2 = \|u - u^* + u^* - v\|^2 = \|u - u^*\|^2 + \|u^* - v\|^2 \geqslant \|u - u^*\|^2.$$

To kończy dowód. ∎

Z powyższego twierdzenia wynika, że rzut ortogonalny u^* elementu u na podprzestrzeń V jest takim elementem podprzestrzeni V, który spośród wszystkich jej elementów najlepiej przybliża (*aproksymuje*) element u. Pisząc *najlepiej przybliża* mamy na myśli optymalność rzutu ortogonalnego wyrażoną w warunku (12.7).

Z problemem aproksymacji mamy do czynienia wtedy, gdy bardziej złożone obiekty (np. funkcje, macierze, pliki graficzne lub dźwiękowe…) chcemy *przybliżyć* obiektami o prostszej strukturze (np. wielomianami, macierzami diagonalnymi, plikami o mniejszym rozmiarze…). Z podobnym zagadnieniem spotkaliśmy się już na wykładzie z analizy matematycznej – przybliżenie funkcji wielomianem powstałym przez odrzucenie reszty we wzorze Taylora, tj.

$$f(x) \approx T_{f,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

to nic innego, jak aproksymowanie funkcji (być może bardzo złożonej) funkcjami o prostszej postaci. Okazuje się jednak, że otrzymany w ten sposób wielomian $T_{f,n}$ najczęściej nie jest optymalny (tzn. na ogół istnieje wielomian stopnia n, który przybliża funkcję f dokładniej niż $T_{f,n}$).

12.5.1. Wyznaczanie rzutu ortogonalnego

Przypuśćmy, że wektory $u_1, \ldots, u_n$ są bazą podprzestrzeni V. Warunek (12.6) równoważny jest wówczas warunkowi

$$u - u^* \perp u_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12.8}$$

Ponieważ $u^* \in V$ zatem istnieją skalary $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$ dla których

$$u^* = \alpha_1^* u_1 + \ldots + \alpha_n^* u_n.$$

Aby wyznaczyć rzut ortogonalny u^* wektora u wystarczy więc wyznaczyć jego współrzędne $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ względem dowolnej bazy przestrzeni V. Zależność (12.8) oznacza, że dla $i = 1, \ldots, n$:

$$0 = s\left(u - u^*, u_i\right) = s\left(u - \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k^* u_k, u_i\right) = s\left(u, u_i\right) - \sum_{k=1}^n \alpha_k^* s\left(u_k, u_i\right),$$

lub równoważnie

$$\textstyle\sum_{k=1}^n s\left(u_i, u_k\right) \alpha_k^* = s\left(u, u_i\right).$$

Szukane wartości $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ są więc rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{bmatrix} s\left(u_1, u_1\right) & \cdots & s\left(u_1, u_n\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s\left(u_n, u_1\right) & \cdots & s\left(u_n, u_n\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\left(u, u_1\right) \\ \vdots \\ s\left(u, u_n\right) \end{bmatrix}. \tag{12.9}$$

Układ (12.9) to tzw. układ równań normalnych. Macierz $G = [s\left(u_i, u_j\right)]$ tego układu to **macierz Grama** – posiada ona wiele ważnych i interesujących własności. Można na przykład pokazać, że jej wyznacznik jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $u_1, \ldots, u_n$ są liniowo niezależne. Postać macierzy G zależy od wyboru bazy przestrzeni V. W przypadku, gdy baza $u_1, \ldots, u_n$ jest bazą ortonormalną, macierz G jest macierzą jednostkową, a rozwiązaniem układu (12.9) są skalary

$$\alpha_i^* = s\left(u, u_i\right), \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Wynika stąd następujące

Twierdzenie 12.5. *Niech $u_1, \ldots, u_n$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni V przestrzeni liniowej X wyposażonej w iloczyn skalarny s. Dla dowolnego wektora $u \in X$ istnieje dokładnie jeden wektor $u^* \in V$ będący rzutem ortogonalnym wektora u na podprzestrzeń V. Wektor ten określony jest wzorem:*

$$u^* = \sum_{i=1}^n s\left(u, u_i\right) u_i. \tag{12.10}$$

Przykład 12.8. *Wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $u = (1, 1, 1, 1)$ na podprzestrzeń X przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozważaną w przykładzie 11.7 (z naturalnym iloczynem skalarnym). Przypomnijmy, że ortonormalną bazę X stanowią wektory*

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1, 1, 0, -1\right), \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(0, -1, 1, -1\right).$$

Poszukiwany wektor u^* wyznaczymy ze wzoru (12.10). Otrzymujemy

$$u^* = \left(u \circ u_1\right) u_1 + \left(u \circ u_2\right) u_2 = -\frac{1}{3}\left(-1, 1, 0, -1\right) - \frac{1}{3}\left(0, -1, 1, -1\right) = \frac{1}{3}\left(1, 0, -1, 2\right).$$

Przykład 12.9. *Rozważmy następujący problem optymalizacyjny: wyznaczyć te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi O_x wykresu funkcji $f(x) = x^3 + ax + b$ dla $x \in [-1, 1]$ jest najmniejsza.*

Zauważmy, że

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^3 + ax + b)^2 dx = \pi \|u - v\|^2,$$

gdzie $u(x) = x^3$, $v(x) = -ax - b$ oraz $\|g\|^2 = s(g, g)$ dla iloczynu skalarnego

$$s(g, h) = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx.$$

Z twierdzenia o optymalności rzutu ortogonalnego wynika, że wartości a, b należy wybrać w ten sposób, aby wielomian $v(x) = -ax - b$ był rzutem ortogonalnym wielomianu $u(x) = x^3$ na podprzestrzeń

π_1. Aby go wyznaczyć ustalmy bazę przestrzeni π_1: $v_1(x) = 1,\ v_2(x) = x$. Zastosujemy algorytm Grama–Schmidta, aby wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni π_1. Ponieważ

$$\|v_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} v_1^2(x)dx} = \sqrt{2},$$

zatem $u_1(x) = v_1(x)/\|v_1\| = \sqrt{2}/2$ jest pierwszym elementem bazy ortonormalnej przestrzeni π_1. Podobnie

$$b(x) = v_2(x) - s(v_2, u_1)u_1(x) = x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = x$$

oraz

$$\|b\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} b^2(x)dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2dx} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

zatem $u_2(x) = b(x)/\|b\| = \sqrt{6}x/2$ to drugi elementem bazy ortonormalnej przestrzeni π_1. Na podstawie zależności (12.10) *otrzymujemy*

$$u^*(x) = s(u, u_1)u_1(x) + s(u, u_2)u_2(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2}x^3dx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2}x^4dx \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}x = \frac{3}{5}x.$$

Stąd wynika, że poszukiwane wartości to $a = -3/5,\ b = 0$.

Rozdział 13

Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

Elementy trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować co najmniej na trzy sposoby:

- jako zbiór punktów (x, y, z) (wykres 4a)); będziemy je oznaczać dużymi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $A = (x, y, z)$. Punkt nie jest wielkością wektorową – nie ma zwrotu, kierunku, długości.
- jako zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{v}$ itd. (wykres 4b)). Wektory te mają wspólny początek w punkcie $O = (0, 0, 0)$. Każdy punkt $P = (x, y, z)$ wyznacza dokładnie jeden wektor zaczepiony $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
- jako zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\overrightarrow{u}$, przy czym przez wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają tę samą długość, ten sam zwrot oraz ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$ (wykres 4c)). Każde dwa różne punkty $A = (x_a, y_a, z_a)$ oraz $B = (x_b, y_b, z_b)$ wyznaczają dwa wektory swobodne

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{BA} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b)\,;$$

  wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$. Punkt A (odpowiednio B) nazywamy początkiem (końcem) wektora $\overrightarrow{AB}$. Początek (koniec) danego wektora jest końcem (początkiem) wektora do niego przeciwnego.

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wprowadzamy dwa naturalne działania: sumę wektorów

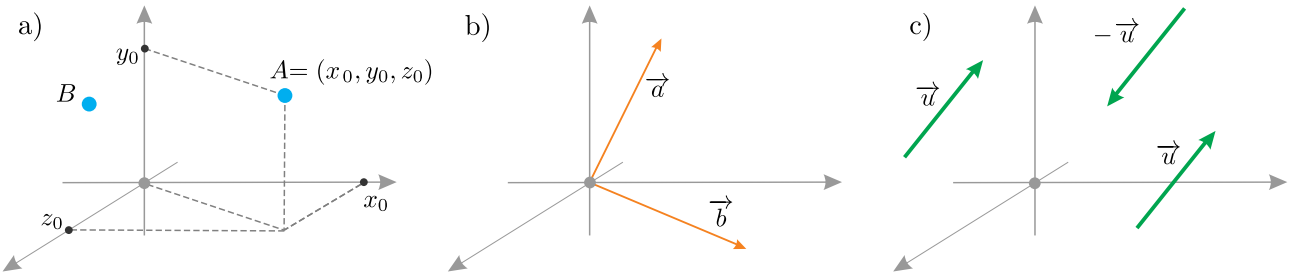
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \stackrel{df}{=} (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$$

oraz mnożenie wektora przez skalar:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} \stackrel{df}{=} (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u)\,.$$

Długość wektora $\overrightarrow{u}$ określamy wzorem:

$$\|\overrightarrow{u}\| \stackrel{df}{=} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$



Wykres 4. Punkty, wektory zaczepione, wektory swobodne.

13.1. Iloczyny wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany

13.1.1. Iloczyn skalarny

Rozważmy dwa wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.1 (iloczyn skalarny). *Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$ to liczba (skalar) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$ określona wzorem*

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} \stackrel{df}{=} \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos \measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \tag{13.1}$$

gdzie $\measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ to kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$; zakładamy, że $0 \leqslant \measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \pi$.

Można wykazać, że jeżeli $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ to

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v. \tag{13.2}$$

Ze wzorów (13.1) oraz (13.2) wynika, że kąt między niezerowymi wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

$$\measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arccos \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$;
b) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$;
c) $(\alpha \cdot \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v})$;
d) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w})$;
e) $|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$ (nierówność Schwarza);
f) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$ (warunek ortogonalności wektorów).

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu skalarnego.

Układ współrzędnych

Układem współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy trzy ustalone wzajemnie prostopadłe proste, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu współrzędnych. Zwyczajowo proste te oznacza się Ox, Oy oraz Oz i nazywa się osiami układu współrzędnych $Oxyz$. Początkiem układu współrzędnych jest zazwyczaj punkt $(0, 0, 0)$. Geometria analityczna to geometria *uprawiana* w wybranym układzie współrzędnych.

13.1.2. Iloczyn wektorowy

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.2 (iloczyn wektorowy). *Iloczynem wektorowym wektorów* $\overrightarrow{u}$ *oraz* $\overrightarrow{v}$ *nazywamy wektor*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)\,. \tag{13.3}$$

Łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, że wzór (13.3) można wyrazić w postaci symbolicznego wyznacznika

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i} = (1,0,0)\,,\ \overrightarrow{j} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{k} = (0,0,1)\,.$ Można również wykazać, że

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin \measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ to kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ $(0 \leqslant \measuredangle (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \pi)$.

Własności iloczynu wektorowego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})\,;$
b) $(\alpha \cdot \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \cdot \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\,;$
c) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\,;$
d) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|;$
e) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{u} = 0 \vee \overrightarrow{v} = 0\}$ (warunek równoległości wektorów);
f) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}.$

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu wektorowego.

Przykład 13.1. *Rozważmy trzy punkty*

$$A = (0,1,0)\,, \quad B = (1,0,1)\,, \quad C = (1,1,1)$$

będące wierzchołkami pewnego trójkąta. Obliczymy jego pole.

Zauważmy, że dwoma bokami trójkąt o wierzchołkach A, B, C *są wektory* $\overrightarrow{AB}$ *oraz* $\overrightarrow{AC}$*; jego pole* P *wyraża się więc wzorem*

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \sin \measuredangle \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,1)\,,$$

zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = (-1,0,1)$$

i ostatecznie $P = \dfrac{\|(-1,0,1)\|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Orientacja układu współrzędnych

Rozróżniamy dwie orientacje układu współrzędnych $Oxyz$ – orientację dodatnią (układ prawoskrętny) oraz ujemną (układ lewoskrętny). Orientacja układu zależy od wzajemnego położenia osi układu Ox, Oy oraz Oz. Jeżeli wyprostowany kciuk prawej ręki umieścimy w ten sposób, aby wskazywał dodatnią część osi Oz, a zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy (odpowiednio: od osi Oy do osi Ox) to wówczas mamy do czynienia z układem prawoskrętnym (lewoskrętnym).

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ dwóch niezerowych, niewspółliniowych wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.



Wykres 5. Orientacja układu współrzędnych: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny.

13.1.3. Iloczyn mieszany

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.3 (iloczyn mieszany). *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *nazywamy liczbę* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *określoną wzorem*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \stackrel{df}{=} (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}. \tag{13.4}$$

Łatwo wykazać, że iloczyn mieszany wektorów jest wyznacznikiem macierzy, której wiersze (lub kolumny) są współrzędnymi tych wektorów, tj.:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}. \tag{13.5}$$

Własności iloczynu mieszanego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

a) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$;
b) $\alpha \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\alpha \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \alpha \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha \cdot \overrightarrow{w})$;
c) $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
d) $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu mieszanego.

13.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$. Iloczyny wektorowy oraz mieszany mają liczne interesujące zastosowania geometryczne. Można przy ich pomocy wyznaczać między innymi:

✓ **pole równoległoboku:** pole P_r równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6a))

$$P_r = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|; \tag{13.6}$$

✓ **pole trójkąta:** pole P_t trójkąta rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

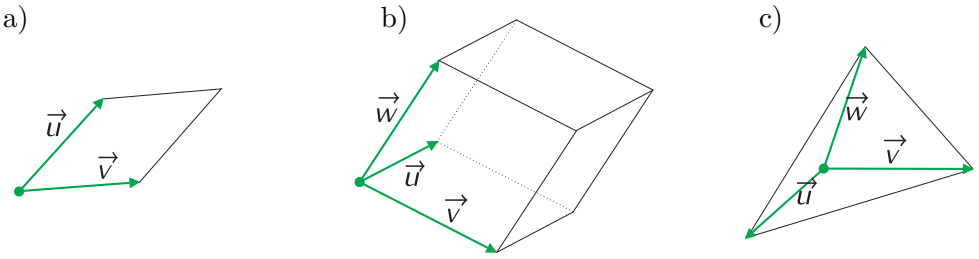
$$P_t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|; \tag{13.7}$$

✓ **objętość równoległościanu:** objętość V_r równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6b))

$$V_r = |(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|; \tag{13.8}$$

✓ **objętość czworościanu:** objętość V_c czworościanu wyznaczonego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6c))

$$V_c = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\right|. \tag{13.9}$$



Wykres 6. Zastosowanie iloczynów wektorów: a) wektorowego; b) i c) mieszanego

Przykład 13.2. *W celu uzasadnienia wzoru* (13.8) *zauważmy, że*

$$\cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{h}{\|\overrightarrow{w}\|},$$

gdzie h to długość wysokości poprowadzonej do podstawy rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$. Stąd, objętość V_r równoległościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to

$$V_r = P_p \cdot h = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

Zauważmy, że w ten sam sposób uzasadniamy wzór (13.9)*: objętość V_c czworościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to*

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}). \end{aligned}$$

Przykład 13.3. *Aby obliczyć długość h wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach*

$$A = (1,1,1), \quad B = (2,2,2), \quad C = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka C, możemy zastosować wzór (13.7)*. Mamy $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,3,4)$ oraz*

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot h.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$$

zatem

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Przykład 13.4. *Aby obliczyć długość h wysokości czworościanu o wierzchołkach*

$$A = (0,0,0), \quad B = (1,0,0), \quad C = (0,2,3), \quad D = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka D, zastosujemy wzór (13.9)*. Mamy*

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{3}h \cdot P_{\triangle ABC},$$

gdzie $P_{\triangle ABC}$ to pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, B, C. Mamy

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (0,2,3)\,, \quad \overrightarrow{AD} = (3,4,5)\,.$$

Zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0,-3,2)\,.$$

Stąd oraz ze wzoru (13.7) *wynika, że*

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\,\|(0,-3,2)\| = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Ponieważ

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

zatem ostatecznie otrzymujemy

$$h = \frac{1}{2}\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

13.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

13.2.1. Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi: \qquad A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \tag{13.10}$$

Jest to tzw. **równanie normalne** płaszczyzny; wektor $\overrightarrow{n}$ jest jej wektorem normalnym.

Łatwo stwierdzić, że równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, również opisuje płaszczyznę – jej wektorem normalnym jest wektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ i przechodzi ona przez punkty $P_1 = \left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ (o ile oczywiście $ABC \neq 0$).

13.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi: \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{13.11}$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nazywamy **równaniem odcinkowym** płaszczyzny π. Płaszczyzna opisana równaniem (13.11) przecina osie Ox, Oy oraz Oz układu współrzędnych $Oxyz$ w punktach równych odpowiednio $P_x = (a, 0, 0)$, $P_y = (0, b, 0)$, $P_z = (0, 0, c)$.

13.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (nieleżących na jednej prostej) wektorów $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ ma postać:

$$\pi: \qquad \begin{cases} x = x_0 + r x_v + s x_w \\ y = y_0 + r y_v + s y_w \\ z = z_0 + r z_v + s z_w \end{cases}, \quad \text{gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. **równanie parametryczne** płaszczyzny.

13.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π, która je zawiera. Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Punkt $P = (x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_1P_3}$ są liniowo zależne. **Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$**, można więc wyrazić w postaci:

$$\pi : \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.12}$$

13.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

13.3.1. Równanie parametryczne prostej

Rozważmy dowolny punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Równanie

$$l : \quad \begin{cases} x = x_0 + tx_v \\ y = y_0 + ty_v \\ z = z_0 + tz_v \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R} \tag{13.13}$$

jest **równaniem prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$**.

13.3.2. Równanie kierunkowe prostej

Przypuśćmy, że prosta l jest zapisana w postaci parametrycznej (13.13) oraz załóżmy, że żadna ze współrzędnych wektora $\overrightarrow{v}$ nie jest zerem. Wyliczając z każdego z trzech równań układu (13.13) parametr t, otrzymujemy **równanie kierunkowe** prostej:

$$l : \quad \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}. \tag{13.14}$$

13.3.3. Równanie krawędziowe prostej

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta

$$l : \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}; \tag{13.15}$$

równanie (13.15) to jej **równanie krawędziowe**.

Zauważmy, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ nie są równoległe, tj. $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{0}$. Wektor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej l.

13.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

13.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi

Przyjmuje się, że kąt między dwiema prostymi (dwiema płaszczyznami) to kąt jaki tworzą wektory kierunkowe tych prostych (wektory normalne płaszczyzn). Kąt między prostą i płaszczyzną, to kąt $\pi/2 - \alpha$, gdzie α to kąt ostry jaki tworzą wektor kierunkowy prostej oraz wektor normalny płaszczyzny. Znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane kąty można łatwo wyliczyć wykorzystując stosowne własności iloczynu skalarnego lub iloczynu wektorowego tych wektorów.

13.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny

Łatwo wykazać, że odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

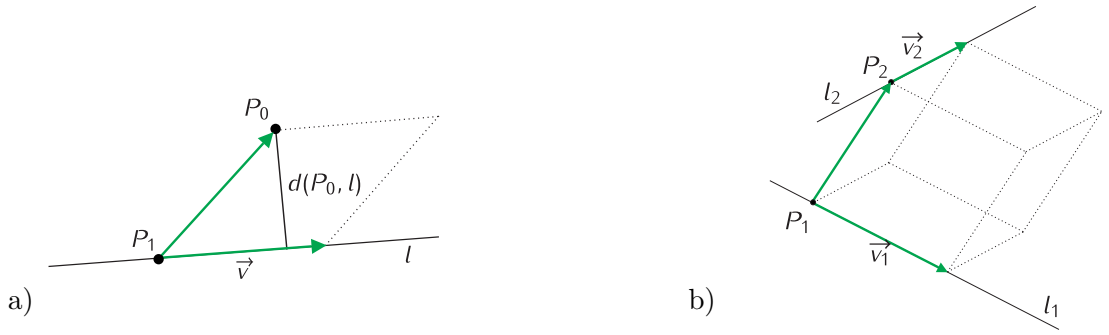
$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{13.16}$$

Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.

13.4.3. Odległość punktu od prostej

Można wykazać (zob. wykres 7a), że odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

$$d(P_0, l) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}. \tag{13.17}$$



Wykres 7. Odległość punktu P_0 od prostej l (rys. a) oraz odległość między prostymi skośnymi l_1 i l_2 (rys. b).

13.4.4. Odległość między płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny równoległe $\pi_1 : Ax+By+Cz+D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : Ax+By+Cz+D_2 = 0$ (płaszczyzny równoległe mają ten sam wektor normalny). Ze wzoru (13.16) wynika natychmiast, że odległość między tymi płaszczyznami wyraża się wzorem

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

13.4.5. Odległość między prostymi

Niech l_1 (odpowiednio l_2) będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 (odpowiednio P_2) równoległą do wektora $\overrightarrow{v_1}$ (odpowiednio $\overrightarrow{v_2}$).

Proste równoległe

W przypadku, gdy proste l_1 i l_2 są równoległe (możemy wówczas przyjąć, że $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$), wzór na odległość między nimi wynika ze wzoru (13.17). Mamy

$$d(l_1, l_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|}.$$

Proste skośne

Jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe (tzn. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$; zob. wykres 7b), odległość między nimi obliczamy ze wzoru

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}.$$

Rozdział 14

Zadania egzaminacyjne

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 03.02.2011*

Zadanie 1. Wyznacz sumę rozwiązań równania:

$$(8z + 1 - i)^2 - 2^7 iz^4 = 0.$$

Zadanie 2. Niech $u_0 = (1, 2, 1)$. Rozważmy odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^3 \ni v \to u_0 \times v \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.
a) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.
b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu f.

Zadanie 3. Rozważmy dwie macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sprawdź, czy macierze A i B są podobne.
b) Wyznacz macierz $I + A^2 + A^4 \ldots + A^{100}$.

Zadanie 4. Rozważmy podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0,\ x - 2y + z = 0\right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, -1, 1)$ na podprzestrzeń V. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

ma tylko nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 10.02.2011*

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leqslant \arg \frac{i}{(z+iz)^2} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Zadanie 2. W zbiorze $Z = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ wprowadzamy działanie $*$ określone wzorem $a * b = a + b - ab$. Sprawdź, czy struktura $(Z, *)$ jest grupą.

Zadanie 3. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $F : \pi_2 \ni f \to f + f' \in \pi_2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y = -a\,(1 + y) \\ 2x + y = ax - 2 \\ 2x + ay = 1 - a \end{cases}$$

posiada niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy

$$u^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Przyjmij iloczyn skalarny $[a_{ij}] \circ [b_{ij}] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 24.02.2011*

Zadanie 1. Dnia 10 lutego 2011 roku studenci pierwszego roku jednej z krakowskich uczelni zdawali pisemny egzamin z algebry liniowej. Każdy ze studentów uzyskała inną liczbę punktów. W grupie zdających wprowadzono dwa działania: r_1, które z dwóch osób wybiera tę, która uzyskała lepszy wynik z egzaminu oraz r_2, które z dwóch osób wybiera osobę młodszą (decyduje numer PESEL).

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna złożona z powyższej grupy studentów oraz działania r_1 jest grupą?

b) Sprawdź rozdzielność działania r_1 względem działania r_2.

Zadanie 2. Prosta $y = ax + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5). Pokaż, że wartość $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ nie zależy od parametrów a i b.

Zadanie 3. Można wykazać, że istnieje macierz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, taka że

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz $A^3 + \left(A^{-1}\right)^3$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wymiar obrazu endomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$f(x, y, z) = \left(-2x + (-1 - a)\,y + z, ax - az, -x + \left(a + a^2\right) y + z\right).$$

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 2, 3)$ na podprzestrzeń liniową $x + y + z = 0$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 03.02.2012*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Oblicz

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach należących do zbioru $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. W zbiorze $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Czy struktura $(\mathbb{R}_*^{n\times m}, \circ)$ jest grupą abelową? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Spośród rozwiązań równania

$$\left(z^3 - 27i\right)\left(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i\right) = 0$$

wybierz te, które należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (x + z, 3x + 2z, z).$$

Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz A_L odwzorowania L jest diagonalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz tę bazę.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^{3\times 3}$ iloczyn skalarny s określono wzorem:

$$s([a_{ij}], [b_{ij}]) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wektora

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = A^T\right\}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 09.02.2012*

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W zbiorze $V = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)v = 0\right\}$ wprowadzamy działanie $\otimes$ określone wzorem

$$v_1 \otimes v_2 = (u_0 \times v_1) - (v_2 \times u_0),$$

gdzie $\times$ to iloczyn wektorowy. Sprawdź czy: a) działanie $\otimes$ jest wewnętrzne w zbiorze V; b) działanie $\otimes$ jest przemienne; c) działanie $\otimes$ posiada element neutralny. Czy struktura algebraiczna $(V, \otimes)$ jest grupą?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt[4]{32}\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)z + 1 + i\right)^2 + z^4 = 0$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & 1+a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Na rzeczywistej przestrzeni liniowej V:

$$V = \operatorname{span}\{\sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x\}$$

określono odwzorowanie liniowe $\mathcal{L} : f \to f + f'$. Wyznacz $\ker \mathcal{L}$, $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ oraz sprawdź, czy jest to endomorfizm na V; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz również jego rzeczywiste wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 24.02.2012*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $G = \left\{\left(t, 2^t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$ wraz z działaniem

$$h\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = \left(x_1 + x_2 + 2, 4y_1y_2\right)$$

tworzy grupę. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Spośród wielomianów $v_1(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ wyznacz te, które są liniowo niezależne; następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej cztery.

Zadanie 4. Czy macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

są podobne? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz ustalającą to podobieństwo.

Zadanie 5. Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A to punkt w którym prosta $l : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-6}{3}$ przecina płaszczyznę $\pi : 4(x+1) + 2y + 6z = 0$, a B to rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $u = (1, -1, 6)$ na płaszczyznę $2x + y + 3z = 0$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 01.02.2013*

Zadanie 1. Wyznacz sumę oraz iloczyn wszystkich elementów zbioru $\sqrt[2013]{1+i}$.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + p^2y + z &= -p \\ x + y - pz &= p^2 \\ y + z &= 1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dla których funkcja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2a & -4 \\ -2 & a-1 & 0 \\ 2a & 0 & 2-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 0, 0)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 6y - z = 0, -x + 2y + z = 0, 3x + 2y - 3z = 0\right\}.$$

W przestrzeni V przyjmujemy naturalny iloczyn skalarny przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Niech $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Uzasadnij, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi $A^n = \mathbf{0}_{2\times 2}$, to $A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 08.02.2013*

Zadanie 1. Uzasadnij, że punkty $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego o środku w punkcie $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają następujące warunki:

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 + a_3 = 0 & a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 - b_2b_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 & a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 0 \end{array}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $(z + a)^3 = i$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$; następnie zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te wartości parametru $a \in \mathbb{C}$, dla których rozwiązania te należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \pi\right\}$.

Zadanie 3. Oblicz odległość punktu przecięcie się prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

od podprzestrzeni liniowej $V \subset \mathbb{R}^3$ rozpiętej przez wektory $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$.

Zadanie 4. Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni f \to f(0) + f(1)x + f(-1)x^2 \in \pi_2$, gdzie π_2 to rzeczywista (tj. nad ciałem $\mathbb{R}$) przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar. Sprawdź, czy endomorfizm F jest diagonalizowalny; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz dla niego bazę Jordana przestrzeni π_2.

Zadanie 5. Rozważmy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$ ortonormalną względem iloczynu skalarnego s. Wyznacz kąt, względem tego iloczynu skalarnego, pomiędzy wektorami $u = (1, 2, 3)$ oraz $w = (1, 1, 4)$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 19.02.2013*

Zadanie 1. Niech $\mathcal{T}_3$ oznacza zbiór macierzy trójkątnych górnych wymiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{T}_3, \cdot)$ jest grupą; działanie $\cdot$ to iloczyn macierzy.

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 3. Wyznacz wektory własne endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni f(x) \to -f(x) + f'(x) - f''(x) + f(0) \in \pi_2,$$

gdzie π_2 to rzeczywista przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

Zadanie 4. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2$. Oblicz wyznacznik macierzy $A^3 + A^2 - A - I$.

Zadanie 5. Spośród wektorów

$$v_1 = (1, 3, 1, -1), v_2 = (2, 4, 0, -6), v_3 = (0, 2, 2, 4), v_4 = (0, 1, -1, -5)$$

wybierz bazę rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 3z + w = 0, 2x - y + z = 0\right\};$$

następnie uzupełnij ją do bazy przestrzeni

$$W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2z + w = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 04.02.2014*

Zadanie 1. W zbiorze $K = (0, +\infty)$ wprowadzamy działania:

$$a \oplus b = ab, \qquad a \odot b = a^{\ln b}.$$

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - z^3 + (1 - i)z + i - 1 = 0.$$

Zadanie 3. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (-x + 3z, -3x - 4y - 3z, 9x + 5z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f; w przypadku pozytywnej odpowiedzi, wyznacz jego macierz w tej bazie.

Zadanie 4. Czy odwzorowanie $f : \pi_3 \to \pi_2$ określone wzorem

$$f(\varphi)(t) = (t + 1)\varphi''(t - 1) + \varphi'(t + 1)$$

jest liniowe? Jeżeli tak, wyznacz jego jądro oraz obraz.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) wektora $u = (2, 1, 2)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 8y - \sqrt{2}z = 0, 2\sqrt{2}y - z = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 11.02.2014*

Zadanie 1. Przedstaw graficznie zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{C}$ dla których wszystkie rozwiązania równania

$$z^2 + 2(a + i)z + a^2 + 2ai - 1 - i = 0$$

należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu $F : \pi_2 \to \pi_2$ określonego wzorem

$$F : at^2 + bt + c \to (4a + 4b)\, t^2 + (2b - 2c + a)\, t + a + 2b + 2c.$$

Zadanie 3. Suma wyrazów w każdym wierszu macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest równa s. Uzasadnij, że s jest wartością własną macierzy A oraz wyznacz odpowiadający tej wartości własnej wektor własny.

Zadanie 4. Rozważmy dwie bazy przestrzeni π_n:

$$e : \left\{e_0 = 1, e_1 = 1 + x, e_2 = x + x^2, e_3 = x^2 + x^3, \ldots, e_n = x^{n-1} + x^n\right\}$$

oraz

$$\widetilde{e} : \left\{\widetilde{e}_0 = x^n, \widetilde{e}_1 = x^n + 1, \widetilde{e}_2 = x^n + x, \widetilde{e}_3 = x^n + x^2, \ldots, \widetilde{e}_n = x^n + x^{n-1}\right\}.$$

Wyznacz macierz P^{-1}, gdzie P oznacza macierz przejścia od bazy e do bazy $\widetilde{e}$.

Zadanie 5. Wyznacz odległość prostej l od płaszczyzny π, jeżeli

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 18.02.2014*

Zadanie 1. Wyznacz liczbę tych elementów zbioru $\sqrt[2016]{2014i}$, które należą również do zbioru

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna; następnie wyznacz macierz A^{2014}.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-\alpha & -2 \\ 1-\alpha & 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Zadanie 4. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x + y - z, 2y - 2z, x - y + z, 3x) \in \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 5. W przestrzeni π_2 iloczyn skalarny $\circ$ określono wzorem

$$\left(a_1t^2 + b_1t + c_1\right) \circ \left(a_2t^2 + b_2t + c_2\right) := a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(t) = (t-1)^2$ na podprzestrzeń

$$V = \{f \in \pi_2 : f\text{–funkcja parzysta}\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 03.02.2015*

Zadanie 1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(z^4\right) - |z|^2 \operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 0\right\}$

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}\left[(z-iz)^2\right] \leqslant 0 \right\}$.

Zadanie 2. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych.

a) Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

b) Jakie wartości może przyjąć wyznacznik macierza A, jeżeli

$$A^T \left(AA^T\right)^{-1} \left(AA^T\right)^T - \left(\det A^2\right) \left[(\det A)\, A\right]^T = 0.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podany układ równań ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} a^2x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = a \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ dla których macierze

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a-1 & b \\ -6 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

są podobne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 10.02.2015*

Zadanie 1. Liczba $s_0 = 1 + i\sqrt{2}$ jest jednym z rozwiązań równania

$$s^6 - 2s^5 + 5s^4 - 4s^3 + 8s^2 - 4s + 6 = 0.$$

Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru $\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi \right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $(1,1,1)$ na jądro odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (y - 2x + z, y - z, x - 2y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ -x - ay - 2z = 2 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sprawdź, czy macierz A jest diagonalizowalna.

(b) Wyznacz A^{2015}.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 26.02.2015*

Zadanie 1.

(a) Rozwiąż równanie w zbiorze liczb zespolonych: $z^3 = -8\overline{z}$.

(b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby zespolone z spełniające warunek $\left|z^2 + 4\right| > |z - 2i|$.

Zadanie 2. Wyznacz macierz X spełniającą równanie

$$A + B^T(X^T)^{-1}A = \left[A^T\left((A^{-1}+B)^{-1}+I\right)\right]^T.$$

Zadanie 3. Rozważmy cztery punkty $A(0,1,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,-1,1)$. Wyznacz odległość pomiędzy prostymi l_{AB} oraz l_{CD} przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, B oraz C, D.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1-a & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 29.01.2016*

Zadanie 1. Niech $z_0, z_1, \ldots, z_4$ będą pierwiastkami algebraicznymi stopnia 5 z 32. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{4} |2i - z_k|^2.$$

Zadanie 2. Wielomian $\varphi_A(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. Wyznacz wielomiany charakterystyczne macierzy: a) $2A - I$, b) $(A + 2I)^T$, c) A^{-1}.

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 5 & 2 \\ b & -1 & 4 \end{pmatrix},\ v_1 = (1,1,-1)^T.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v_1 jest wektorem własnym macierzy A. Następnie sprawdź, czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\circ$ określonym wzorem

$$x \circ y = x^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie iloczynu skalarnego $\circ$) wektora $u = (1,3)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektor $e = (1,1)^T$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 05.02.2016*

Zadanie 1. Wiedząc, że z jest liczbą zespoloną o argumencie głównym $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ oraz o module $|z| > 1$, znajdź argument główny liczby zespolonej $\frac{\overline{(-iz)}z^3}{1-|z|^2}$.

Zadanie 2. Wektory $y, v_2, v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ortogonalną w sensie naturalnego iloczyny skalarnego $\circ$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (tj. $v \circ w = v^T w$). Niech $x \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niezerowym wektorem.

(a) Pokaż, że wektory $x, v_2, v_3, \ldots, v_n$ są wektorami własnymi macierzy xy^T oraz wyznacz odpowiadające im wartości własne.

(b) Wykaż, że $\det\left(I_n - xy^T\right) = 1 - y^T x$.

Zadanie 3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 1 \\ 2x + 4y + z - 2w = 2 \\ -x - 2y - 2z + 4w = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x,y,z) = 2x^2 - 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 17.02.2016*

Zadanie 1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dołączoną liczbą 1, z naturalnym działaniem mnożenia liczb tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$F : \pi_3 \ni ax^3 + bx^2 + cx + d \to (a + b - c)\, x^2 + (2b + d)\, x + 2c - b \in \pi_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(x) = x^2 + 2x + 2$ na podprzestrzeń $\operatorname{Im} F$ (tj. na obraz odwzorowania F) przestrzeni π_2 wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$.

Zadanie 3. Wyznacz sumę wszystkich liczb zespolonych z spełniających równanie

$$z^3 = \left(-2 + 2\sqrt{3}i\right)\overline{z}.$$

Zadanie 4. Wykorzystując postać Jordana macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$ wyznacz cztery różne macierze B spełniające równanie $B^2 = A$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 31.01.2017*

Zadanie 1. Czy zbiór $G = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\det A| = 1\}$ z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę? Czy jest to grupa abelowa? Odpowiedzi pozytywne uzasadnij, negatywną poprzyj stosownym przykładem.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniająca równanie $(A - I)^2 (A + 2I) = 0$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których obraz $\operatorname{Im} f$ odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, w) \to (x + ay - z, 2x - 2y + aw, x - y - w) \in \mathbb{R}^3$$

tworzy płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ iloczyn skalarny zdefiniowano wzorem $A \circ B = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$, gdzie $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy. Wyznacz rzut ortogalny macierzy I_2 (tj. macierzy jednostkowej wymiaru 2×2) na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez macierze

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 07.02.2017*

Zadanie 1. Wykorzystując wzory Viète'a, znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = -1 - i \\ xy + xz + yz = 2 + i \\ xyz = -2 \end{cases}, \quad \text{w którym } x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 2. Wyznacz macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ o wartościach własnych $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_3 = 0$, którym odpowiadają wektory własne

$$v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)^T, \quad v_{\lambda_2} = (1, 0, 1)^T, \quad v_{\lambda_3} = (1, -1, 0)^T.$$

W rozwiązaniu wykorzystaj postać Jordana poszukiwanej macierzy.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} x \geqslant y^T \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} y$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami spełniającymi warunek $v \circ v = w \circ w = 1$, $v \circ w = \frac{1}{2}$, gdzie $\circ$ oznacza naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$. Wyznacz ortonormalną bazę podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory v oraz w.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 15.02.2017*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których dokładnie dwa rozwiązania równania $z^n = 1 + i\sqrt{3}$ należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Wyznacz te rozwiązania.

Zadanie 2. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$, jeżeli $f(x_0) = x_0$. Wyznacz wszystkie punkty stałe odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2y + z, x + y - 3z, -x + 3y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \geqslant 0$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1+a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Oblicz:

(a) $\det(A + B)$ wiedząc, że $\det B^T A = 2$ oraz $\det\left(B^{-1} + A^{-1}\right) = -3$;

(b) $\det\left(A^T B^{-1} - I\right)$ wiedząc, że $\det\left(B^T - A\right) = 5$, $\det(-B) = -\det B \neq 0$ oraz $B^4 = B$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 1 – 29.01.2018*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - (1 - i)x^2 - x - i$. Wyznacz $\mathfrak{Re}(w)$, gdzie

$$w = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)^{2018}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona, że wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym. Wykorzystując ten fakt uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni π_2 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2), w której macierzą endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2a - b)x^2 + 2bx + 2c + b \in \pi_2$$

jest macierz

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 2 – 05.02.2018*

Zadanie 1. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki algebraiczne czwartego stopnia z liczby $z = 20 + 18i$. Wyznacz

$$w = (1 - z_1)^2 + (1 - z_2)^2 + (1 - z_3)^2 + (1 - z_4)^2 .$$

Zadanie 2. Niech $a \neq b$ będą dowolnymi elementami. W zbiorze $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, gdzie f_1, f_2 to funkcje prowadzące z $\{a, b\}$ w $\{a, b\}$ postaci

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x = a \\ b, & \text{dla } x = b \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} b, & \text{dla } x = a \\ a, & \text{dla } x = b \end{cases},$$

wprowadzamy działanie $\circ$ składania odwzorowań, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż jeden) dla endomorfizmu

$$F : \pi_1 \ni ax + b \to (3a - b)x + a + b \in \pi_1.$$

Sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy reprezentującej endomorfizm F w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) elementu $u = (6, 2, -4)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory

$$v_1 = (2, 0, -1)^T , \quad v_2 = (1, -5, 2)^T .$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 12.02.2018*

Zadanie 1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n , \qquad z_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n ,$$
$$z_3 = (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n , \qquad z_4 = (\sin\alpha - i\cos\alpha)^n .$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane macierze są podobne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz P dla której $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\varphi(x) = x^6 + 1$; następnie przedstaw go jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a + 1 & 3a \\ -1 & a & a + 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T Ax \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2019*

Zadanie 1. Liczby s_1, s_2, s_3, s_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(s) = -s^4 + (1+i)\,s^3 + is + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\sum_{k=1}^{4} |\lambda + s_k|^2 < \sum_{k=1}^{4} \left|\overline{\lambda} + s_k\right|^2.$$

Zadanie 2. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których zbiór

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = a\right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

Zadanie 3. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ to nieznane parametry. Dobierz je w ten sposób, aby endomorfizm f posiadał jedną potrójną wartość własną; następnie sprawdź, czy jest on wówczas diagonalizowalny.

Zadanie 4. W przestrzeni π_3 (π_k – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej k) wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(0)\, g^{(k)}(0),$$

gdzie $h^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną h, $h^{(0)} = h$. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u(x) = (x+1)^3$ na podprzestrzeń π_2.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 06.02.2019*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór rozwiązań równania $s^{2019} = 1$ z działaniem

$$h(s_1, s_2) = \overline{s_1 s_2}$$

tworzy grupę.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których endomorfizm f jest diagonalizowalny.

Zadanie 3. Wyznacz bazy ortonormalne (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$) jądra oraz obrazu endomorfizmu z poprzedniego zadania. Przyjmij $a = b = 0$.

Zadanie 4. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + (a-1)\,y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)\,z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 14.02.2019*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $z^3\,|z| = (4 - 4\sqrt{3}i)\overline{z}$.

Zadanie 2. Wyznacz, o ile istnieje, macierz o wektorach własnych

$$v_1 = (2,1,1)^T, v_2 = (-1,1,0)^T, v_3 = (3,0,1)^T.$$

Ile jest takich macierzy?

Zadanie 3. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$. Niech w_A oraz w_1, w_2 oznaczają wyznacznik macierzy A oraz wyznaczniki macierzy powstałych z macierzy A przez zastąpienie odpowiednio jej pierwszej i drugiej kolumny wektorem b. Co wiemy o liczbie rozwiązań układ równań $Ax = b$, jeżeli $w_A = w_1 = w_2 = 0$? Odpowiedź uzasadnij; podaj stosowne przykłady.

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2,$$

następnie wyznacz liczbę rozwiązań równania $\varphi(x,y,z) = a$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2020*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $x * y = (-1)^x y + (-1)^y x$ tworzy grupę. Następnie, wykorzystując własności struktury $(\mathbb{Z}, *)$, znajdź rozwiązania całkowite x równania $((2 * x) - x) * x = 0$.

Zadanie 2. Znajdź bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego) dla endomorfizmu $F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to \varphi'(1) + 3\varphi(0) + (\varphi(5) - 2\varphi(0))\, x \in \pi_1$. Sprawdź poprawność wyniku, wyznaczając macierz endomorfizmu F w tej bazie. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny?

Zadanie 3. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x,y,z) = x^2 + 4xy + (a+4)\, y^2 - 2ayz + 2az^2$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u = (1,1,1,1)$ na obraz odwzorowania liniowego

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (0, x+y, 2x-2y+z, 0) \in \mathbb{R}^4;$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 07.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania $z \in \mathbb{C}$ równania $z^5 - (\operatorname{ctg}\beta + i)^4\, \overline{z} = 0$, w którym $\beta \in (0, \pi)$.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ spełniająca warunek

$$\operatorname{rank}(A + I) = \operatorname{rank}(A - I) = 2$$

jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku, gdy jest ona pozytywna wyznacz A^{2020}.

Zadanie 3. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy kwadratowej A. Oblicz wyznacznik oraz ślad macierzy $-A^3 + A^2 + 3A - I$.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 > axy$$

jest spełniona przez wszystkie liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $x^2 + y^2 > 0$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 13.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $(z-i)^2 + (\overline{z}+i)^2 = 0$ oraz zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te spośród nich, dla których $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 2. Znajdź, dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jej rozkład na iloczyn macierzy $P \cdot J_A \cdot P^{-1}$, gdzie J_A to macierz Jordana, a P macierz nieosobliwa. Następnie, wykorzystując ten rozkład, wskaż cztery różne macierze $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniające warunek $B^2 = A$.

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to x\varphi'(0) + x^2\varphi'(1) \in \pi_2;$$

π_n oznacza przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny u^* wektora $u = (3, 4, -1)$ na podprzestrzeń liniową

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}.$$

Jaką interpretację geometryczną ma wielkość $\|u - u^*\|$? W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1 – 04.02.2021*

Zadanie 1. W zbiorze $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.
(b) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

Zadanie 2.
(a) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \pi < \operatorname{Arg}(-iz^3) < 2\pi \quad \text{oraz} \quad 5 < |(3 + 4i)z| < 10\right\}.$$

(b) Rozwiąż równanie

$$iz\,|z|^2 + (2 + 2i)\,|z|^2 = 2\,(z - i)\,\overline{z}$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę pewnej przestrzeni liniowej X, na której określono endomorfizm $f : X \to X$, taki że

$$f(v_1) = 3v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_1 + v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3.$$

(a) Wyznacz macierz A_f (w bazie v_1, v_2, v_3), jądro oraz obraz endomorfizmu f.
(b) Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im liniowo niezależne wektory własne endomorfizmu f; wektory własne zapisz jako kombinacje liniowe wektorów v_1, v_2, v_3.
(c) Przyjmując, że $X = \pi_2$ oraz $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = x$, $v_3(x) = x^2$, wyznacz $f(\varphi)$, gdzie

$$\varphi(x) = (x - 1)^2.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} -2 & -5 & -6 \\ -3 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2 – 11.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla której liczba $z_1 = 1 + i$ jest rozwiązaniem równania

$$z^3 + az^2 - (a + i)\,z + 2 - 2i = 0;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Rozważmy zadanie polegające na wyznaczeniu wielomianów $\varphi \in \pi_2$ spełniających następujące warunki

$$\varphi(-2) = 2, \qquad \varphi(2) = -6.$$

(a) Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań liniowych

$$Ax = b,$$

w którym macierz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ i wektor $b \in \mathbb{R}^2$ są znane, a $x \in \mathbb{R}^3$ to poszukiwany wektor współczynników wielomianu φ.

(b) Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa sprowadź macierz uzupełnioną U układu do postaci schodkowej, następnie porównaj rzędy macierzy A oraz U i wyciągnij wniosek na temat liczby rozwiązań tego układu.

(c) Wyznacz rozwiązania układu i sprawdź, że faktycznie definiują one wielomiany spełniające zadane warunki.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu f,

$$f : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to 2ax^2 + (2b - a - c)\,x + 2c \in \pi_2;$$

sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy endomorfizmu f w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (3, -1, 1)^T$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, \quad x - y = 0\};$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij iloczyn skalarny s,

$$s(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3 – 18.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{C}$, dla której liczba $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ jest jednym z rozwiązań równania

$$z^6 = a;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Układ równań

$$\begin{cases} x - y - 3z &= 2 \\ 2x - 5y + 6z &= -5 \\ 4x - 5y - 8z &= 5 \end{cases}$$

zapisz w postaci mecierzowej; następnie, stosując metodę eliminacji Gaussa, sprowadź macierz uzupełnioną tego układu do postaci schodkowej i wyciągnij wnioski na temat liczby jego rozwiązań. Wykorzystując postać schodkową macierzy uzupełnionej wyznacz te rozwiązania (o ile układ nie jest sprzeczny).

Zadanie 3. Uzasadnij, że każda macierz rzeczywista wymiaru 2×2 o ujemnym wyznaczniku jest diagonalizowalna. Podaj przykład pokazujący, że taka zależność nie jest prawdziwa dla macierzy zespolonych wymiaru 2×2.

Zadanie 4. Dla macierzy symetrycznej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

znajdź taką macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, dla której macierz $P^T AP$ jest macierzą diagonalną. Sprawdź poprawność wyniku wyznaczając iloczyn $P^T AP$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. 31 stycznia 2022 r.*

Zadanie 1. *Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(s) = -s^3 + 3s^2 + 1$.*

a) *Znajdź wartość wyrażenia $w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3)$.*

b) *Uzasadnij, że każda macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, której wielomianem charakterystycznym jest wielomian f, jest nieosobliwą macierzą diagonalizowalną.*

Zadanie 2. *Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (c-b)x^2 + 2bx - 2a - b + 3c \in \pi_2$ oraz dwie bazy przestrzeni π_2:*

$$\begin{array}{lll} u: & u_1(x) = 1 + x^2, & u_2(x) = 1 + x, \quad u_3(x) = x, \\ w: & w_1(x) = 1, & w_2(x) = 1 - x, \quad w_3(x) = 1 - x + x^2. \end{array}$$

a) *Wyznacz macierze endomorfizmu F w tych bazach.*

b) *Wskaż, które z wektorów tworzących bazy u, w są wektorami własnymi endomorfizmu F; wypisz odpowiadające im wartości własne. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny? Odpowiedzi uzasadnij.*

Zadanie 3. *Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \pi_3$ spełniającego warunki $p(-2) = 3$, $p(-1) = 2$, $p(1) = 6$. Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu p. Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej, zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania.*

Zadanie 4. *Rozważmy formę kwadratową $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 8yz + 5z^2 \in \mathbb{R}$.*

a) *Zbadaj określoność formy kwadratowej φ.*

b) *Czy zbiór $\{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) \leqslant 0\}$ tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$? W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz bazę tej podprzestrzeni.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. 7 lutego 2022 r.*

Zadanie 1. *W zbiorze $G = \mathbb{C}$ wprowadzamy działanie $*$,*

$$a * b = a + b + iab.$$

a) *Sprawdź, czy struktura $(G, *)$ jest grupą.*

b) *Rozwiąż równanie $(x * (-x)) * 1 = 3$ ze względu na niewiadomą $x \in G$. Rozwiązania zapisz w postaci trygonometrycznej.*

Zadanie 2. *Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ spełniającej równanie*

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz A. Upewnij się co do poprawność odpowiedzi wyznaczając wielomian charakterystyczny otrzymanej macierzy oraz sprawdzając, czy spełnia ona powyższe równanie.

Zadanie 3. *Uzasadnij, że macierze*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

są podobne oraz wyznacz macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ustalającą to podobieństwo, tj. taką że $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 4. *Niech $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + (1 + a)z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ to parametr.*

a) *Zbadaj określoność formy kwadratowej φ w zależności od wartości parametru a.*

b) *Wyznacz macierz nieosobliwą P, dla której macierz $P^T AP$ jest macierzą diagonalną; sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz $P^T AP$. Macierz A to macierz symetryczna formy kwadratowej φ.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. 14 lutego 2022 r.*

Zadanie 1. *Liczbę* $z_0 = 2^{1/3} + i2^{1/3}$ *zapisz w postaci trygonometrycznej. Wykorzystując wzór de Moivre'a pokaż, że jest ona jednym z rozwiązań równania*

$$z^3 = (1-i)^5$$

oraz wyznacz pozostałe jego rozwiązania. Rozwiązania zapisz w postaci algebraicznej.

Zadanie 2. *Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań*

$$\begin{cases} x - 4z &= 0 \\ -2x + py + 8z &= 2 \\ -x + 2y + pz &= 1 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$*. Znajdź jego rozwiązania dla tych wartości parametru, dla których układ ten jest nieoznaczony.*

Zadanie 3. *Rozważmy endomorfizm* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, taki że*

$$f(0,-1,1) = (0,1,-1), \qquad f(1,-1,0) = (1,-1,0), \qquad f(0,1,0) = (0,-1,0).$$

a) *Uzasadnij, że endomorfizm* f *jest diagonalizowalny.*

b) *Wyznacz* $f^{100}(1,2,3)$*, gdzie* f^n *oznacza* n*-krotne złożenie funkcji* f*.*

Zadanie 4. *Wyznacz rzut ortogonalny wektora* $u = (2,-2,0,0)$ *na podprzestrzeń liniową*

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, \quad y - w = 0\};$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ *rozważamy naturalny iloczyn skalarny, tj.* $x \circ y = x^T y$*.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. 30 stycznia 2023 r.*

Zadanie 1. (2p+4p+4p) *W zbiorze liczb zespolonych równanie* $z^n = 1$ *posiada dokładnie* n *różnych rozwiązań* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$*.*

(a) *Wyznacz liczby* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$*; zapisz je w postaci trygonometrycznej.*

(b) *Czy zbiór* $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$ *z działaniem mnożenia liczb tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.*

(c) *Wyznacz wartości* $w_1 = \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1}$ *oraz* $w_2 = (i + \varepsilon_0) \cdots (i + \varepsilon_{n-1})$*.*

Zadanie 2. (5p+5p) *Rozważmy macierze* $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *oraz załóżmy, że* $\det(A) \neq 0$*. Zapiszmy te macierze obok siebie, tj.* $A|B$*. Na macierzy* A *wykonujemy następujące operacje sprowadzając ją do macierzy jednostkowej* I_n*:*

- *dodajemy do wybranego wiersza kombinację liniową pozostałych wierszy;*
- *mnożymy wybrany wiersz przez dowolny skalar* $\alpha \neq 0$*;*
- *przestawiamy wiersze.*

Operacje wykonywane na macierzy A *wykonujemy jednocześnie na macierzy* B*.*

(a) *Uzasadnij, że gdy w miejscu macierzy* A *otrzymamy macierz jednostkową, to w miejscu macierzy* B *otrzymamy macierz* $A^{-1}B$*.*

(b) *Opisaną powyżej metodą wyznacz macierz* A^{-1}*, gdzie* A *to macierz z zadania 3.*

Zadanie 3. (7p+3p) *Dla macierzy* A*,*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

wyznacz jej macierz Jordana J_A *oraz macierz nieosobliwą* P*, dla której* $P^{-1}AP = J_A$*. Sprawdź poprawność otrzymanego wyniku wyznaczając macierz* $P^{-1}AP$*.*

Zadanie 4. (5p+5p) *Niech* $v_1(x) = 1,\ v_2(x) = x,\ v_3(x) = 3x^2 - 1$.

(a) *Uzasadnij, że wielomiany* v_1, v_2, v_3 *są bazą ortogonalną przestrzeni* π_2 *(tj. przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej drugiego).*

(b) *Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu* $u(x) = 5x^3$ *na podprzestrzeń* π_2.

W przestrzeni wielomianów rozważamy iloczyn skalarny

$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. 6 lutego 2023 r.*

Zadanie 1. (5p+5p)

(a) *Uzasadnij, że dla* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, *takich że* $\cos(n\alpha) \neq 0$, *zachodzi*

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}(n\alpha)}{1 - i\,\mathrm{tg}(n\alpha)}.$$

(b) *Rozwiąż równanie:* $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

Zadanie 2. (5p+5p) *Rozważmy układ równań liniowych*

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 2 \\ x + 3y + z &= 5 \\ x + y + 5z &= -7 \\ 2x + 3y - 3z &= 14 \end{cases}.$$

Macierz uzupełnioną tego układu sprowadź do postaci schodkowej. Czy rozważany układ posiada rozwiązanie? W przypadku pozytywnej odpowiedzi, wykorzystując postać schodkową macierzy układu, wyznacz jego rozwiązanie.

Zadanie 3. (5p+5p) *Niech*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, *dla których wektor* v *jest wektorem własnym macierzy* A. *Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 4. (5p+5p) *Rozważmy formę kwadratową* $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T Ax \in \mathbb{R}$, *gdzie*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Zbadaj określoność formy kwadratowej* φ.

(b) *Dla macierzy* $S_A = A + A^T$ *wyznacz macierz nieosobliwą* P, *dla której macierz* $P^T S_A P$ *jest diagonalna. Sprawdź poprawność uzyskanego wyniku obliczając macierz* $P^T S_A P$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. 14 lutego 2023 r.*

Zadanie 1. (5p+5p)

(a) *Znajdź wszystkie (zespolone) rozwiązania równania*

$$z^3 = (iz + 1)^3.$$

(b) *Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraź funkcję* $\mathrm{tg}\,3x$ *przez funkcję* $\mathrm{tg}\,x$.

Zadanie 2. (5p+5p) *Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań*

$$\begin{cases} x + (1-a)y - iz &= 0 \\ (1-i)x + (3+i)y - (1+i)z &= 0 \\ ax + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

dla wartości parametru $a \in \mathbb{C}$ będących pierwiastkami wielomianu

$$\varphi(a) = (1+i)a^2 - (4-4i)a - 4 - 4i.$$

Wyznacz te rozwiązania.

Zadanie 3. (7p+3p) *Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 (tj. przestrzeni rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego) dla endomorfizmu*

$$\psi : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2b + 4c)x + b + 2c \in \pi_2.$$

Sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz endomorfizmu ψ w wyznaczonej bazie.

Zadanie 4. (10p) *Zbadaj określoność formy kwadratowej*

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$$

w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 1. 2 lutego 2024 r.*

Zadanie 1. (10p+5p)

(a) *Sprawdź, czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem*

$$a \circ b = a + (-1)^a b$$

jest grupą. Następnie, wykorzystując odpowiednie własności struktury algebraicznej $(\mathbb{Z}, \circ)$, rozwiąż równanie $(x \circ 6) \circ 3 = -1$.

(b) *Niech $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ będą pierwiastkami algebraicznymi stopnia trzeciego z liczby $-\sqrt{7} + i$. Przedstaw na wykresie zbiór wszystkich liczb zespolonych s spełniających warunek*

$$|s - z_0|^2 + |s - z_1|^2 + |s - z_2|^2 < 18.$$

Zadanie 2. (3p+3p+4p+5p) *Niech*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Wyznacz macierz A^{-1} metodą macierzy dopełnień algebraicznych.*

(b) *Wyznacz macierz B^{-1} metodą eliminacji Gaussa.*

(c) *Wyznacz macierz C^{-1} metodą opartą na twierdzeniu Cayleya-Hamiltona.*

(d) *Wyznacz macierz D^{-1} jako macierz przejścia z bazy b' do bazy b, traktując macierz D jako macierz przejścia z bazy b do bazy b'; jako bazę b przyjmij bazę kanoniczną przestrzeni π_2, tj. $b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2$.*

Zadanie 3. (9p+6p) *Niech*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

(a) *Wyznacz tę wartość parametru $p \in \mathbb{R}$, dla której macierz A jest diagonalizowalna. Następnie, dla wyznaczonej wartości p, znajdź macierze diagonalną D oraz nieosobliwą P, dla których $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.*

(b) *Dla $p = 4$ wyznacz macierz Jordana macierzy A.*

Zadanie 4. (8p+7p) *Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 2xy - 2xz + 4yz - 8z^2 \in \mathbb{R}$.*

(a) *Formę kwadratową φ sprowadź do postaci kanonicznej (tj. przedstaw jako sumę kwadratów); zastosuj metodę Lagrange'a. Skomentuj określoność formy kwadratowej φ.*

(b) *Czy zbiór $V_\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = 0\}$ z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez skalar jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnij, a jeżeli jest ona pozytywna wyznacz wymiar oraz bazę V_φ.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 2. 9 lutego 2024 r.*

Zadanie 1. (5p+5p+5p)

(a) *Niech $\sqrt[10]{\cos 1 + i \sin 1} = \{z_0, z_1, \ldots, z_9\}$. Wyznacz wartość wyrażenia w:*

$$w = \frac{|z_0| + 2|z_1| + 3|z_2| + 4|z_3| + 5|z_4|}{z_5^{20} + 2z_6^{20} + 3z_7^{20} + 4z_8^{20} + 5z_9^{20}} \cdot (-\sin 2 + i \cos 2).$$

(b) *Rozwiąż równanie $|z|^3 z = -(\overline{z})^3$; rozwiązania zapisz w postaci algebraicznej.*

(c) *Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór $\{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) \cdot Im\big((\overline{z})^4\big) > 0\}$.*

W podpunktach (b) oraz (c) wykorzystaj postać trygonometryczną liczby zespolonej.

Zadanie 2. (15p) *Rozważmy następujący problem interpolacyjny: wyznaczyć wielomian $L \in \pi_2$ spełniający warunki*

$$L(-2) = 1,\ L'(-2) = -2,\ L(-1) = 0,\ L(1) = 4,\ L(2) = 9.$$

Zapisz powyższe warunki w postaci jednego układu równań liniowych. Badając rzędy odpowiednich macierzy sprawdź ile rozwiązań ma rozważany problem. Jeżeli jest to problem niesprzeczny, znajdź jego rozwiązanie.

Zadanie 3. (9p+6p) *Rozważmy endomorfizm*

$$F : \mathbb{R}^{2\times 2} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a + b + 2d & 2d \\ -c & -b - 3d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) *Wyznacz bazę przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$, w której macierz endomorfizmu F jest macierzą Jordana. Sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz endomorfizmu F w wyznaczonej bazie.*

(b) *Zapisz macierz jednostkową I_2 w bazie przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wyznaczonej w poprzednim punkcie; następnie, wykorzystując macierzową reprezentację endomorfizmu F, wyznacz $F^{101}(I_2)$.*

Zadanie 4. (9p+6p) *Rozważmy przestrzeń unitarną funkcji ciągłych na przedziale $[-1, 1]$ z iloczynem skalarnym $\circ$ określonym wzorem*

$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(a) *Wyznacz miarę kąta utworzonego przez elementy $u(x) = -2|x|$ oraz $v(x) = x - |x|$.*

(b) *Wykaż, że wielomiany*

$$u_0(x) = 1,\ u_1(x) = x,\ u_2(x) = 3x^2 - 1$$

tworzą bazę ortogonalną przestrzeni π_2; następnie wyznacz rzut ortogonalny elementu u_2 na podprzestrzeń π_1.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 3. 16 lutego 2024 r.*

Zadanie 1. (6p+9p)

(a) *Rozważmy funkcje*

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Sprawdź, czy składanie funkcji $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ (zbuduj tabelkę tego działania). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą? Czy jest grupą abelową? Odpowiedzi uzasadnij.

(b) *Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $w(s) = 16 + s^2 + 16s^4 + s^6$ oraz przedstaw go w postaci iloczynu rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.*

Zadanie 2. (7p+8p) *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x + y + z &= p \\ x + py + pz &= -p \\ x + py + 2z &= -2 \end{cases}.$$

Sprowadź macierz uzupełnioną układu do postaci schodkowej; następnie, badając rzędy odpowiednich macierzy, określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$. Wyznacz rozwiązania układu dla tych wartości p, dla których jest on niesprzeczny.

Zadanie 3. (9p+6p) *Niech*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Czy macierze A i B są podobne? Odpowiedź uzasadnij, a jeżeli jest ona pozytywna wyznacz nieosobliwą macierz P, dla której $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$.*

(b) *Wyznacz macierz B^{100}.*

Zadanie 4. (5p+10p) *Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 2xy + 6xz - 8yz \in \mathbb{R}$.*

(a) *Zbadaj określoność formy kwadratowej φ.*

(b) *Znajdź macierz nieosobliwą P, dla której macierz $D = P^T \cdot A_\varphi \cdot P$ jest diagonalna; macierz A_φ to macierz symetryczna formy kwadratowej φ. Sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz D.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 1. 3 lutego 2025 r.*

Zadanie 1. (20p)

(a) *Sprawdź, czy zbiór macierzy*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z & iz \\ -iz & z \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0 \right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę abelową.

(b) *Jednym z miejsc zerowych wielomianu $w(s) = s^3 + 2is^2 - (2+i)s + 1 - i$ jest liczba $s_1 = -i$. Znajdź pozostałe miejsca zerowe s_2, s_3 wielomianu w; wszystkie je zapisz w postaci trygonometrycznej, następnie wyznacz część urojoną liczby $s_1^{102} + s_2^{102} + s_3^{102}$.*

Zadanie 2. (15p) *Wyznacz wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których układ równań*

$$\begin{cases} x + y + z + pt &= p \\ x + y + pz + pt &= p \\ x + py + pz + pt &= p \\ px + py + pz + pt &= p \end{cases}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie (x_0, y_0, z_0, t_0); znajdź to rozwiązanie.

Zadanie 3. (20p) *Niech $F : \pi_2 \to \pi_2$ będzie endomorfizmem określonym przez warunki*

$$F(x^2) = x^2, \quad F(x^2 + x) = x, \quad F(x^2 + x + 1) = 1.$$

(a) *Wyznacz macierz $M_B(F)$ endomorfizmu F w bazie $B = (1, x, x^2)$, następnie wyznacz wartości własne i podprzestrzenie własne macierzy $M_B(F)$ oraz endomorfizmu F. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny? Jaką postać ma jego macierz Jordana? Odpowiedzi uzasadnij.*

(b) *Wykorzystując odpowiednie macierze przejścia oraz wyznaczoną w punkcie (a) macierz $M_B(F)$ znajdź macierz $M_{B'}(F)$ endomorfizmu F w bazie $B' = \big(w_1(x), w_2(x), w_3(x)\big)$, gdzie*

$$x^2 = w_1(x) - w_3(x),\ x = w_1(x) + w_2(x) + w_3(x),\ 1 = w_2(x) + w_3(x).$$

Zadanie 4. (15p) *Niech $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0,\ x + z - w = 0\}$.*

(a) *Uzasadnij, że zbiór V z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez skalar jest rzeczywistą przestrzenią liniową. Wyznacz bazę przestrzeni V.*

(b) *Wyznacz wektor $u^* \in V$ będący rzutem ortogonalnym (ortogonalnym w sensie naturalnego iloczynu skalarnego $\circ$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$) wektora $u = (3, -1, 2, -2)$ na podprzestrzeń V.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 2. 10 lutego 2025 r.*

Zadanie 1. (15p) *Wykaż, że zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem*

$$a \circ b = a + (-1)^a b$$

tworzy grupę. Następnie, wykorzystując wykazane własności struktury algebraicznej $(\mathbb{Z}, \circ)$, rozwiąż równanie $(x \circ 5) \circ 3 = x \circ (-1 \circ x)$.

Zadanie 2. (15p) *Rozważmy następujący problem interpolacyjny: znaleźć wielomian $f \in \pi_3$ spełniający warunki*

$$f(-1) = -4, \quad f'(-1) = 6, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 2.$$

Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu f. Macierz uzupełnioną układu sprowadź do postaci schodkowej oraz zbadaj ile rozwiązań posiada rozważany problem; jeżeli jest on niesprzeczny, wyznacz jego rozwiązanie.

Zadanie 3. (20p) *Dla macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

wyznacz macierz Jordana J_A oraz macierz nieosobliwą P, dla których $A = PJ_AP^{-1}$. Wykorzystując otrzymany rozkład macierzy A wyznacz macierz A^n dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. (20p) *Rozważmy formę kwadratową*

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz macierz nieosobliwą P, dla której macierz $P^T A_\varphi P$ jest diagonalna; macierz A_φ to macierz symetryczna formy kwadratowej φ. Czy istnieje wektor $x \in \mathbb{R}^4$, $x \neq 0$, dla którego $\varphi(x) = 0$? Odpowiedź uzasadnij, pozytywną – wskazując wektor x.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 3. 17 lutego 2025 r.*

Zadanie 1. (10p+10p)

(a) *Znajdź wartość parametru $p \in \mathbb{C}$, dla której liczba $z_1 = i$ jest rozwiązaniem równania*

$$z^3 - (1 + 4i)z^2 - pz + 1 + 2i = 0;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

(b) *Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz liczby z spełniające warunek*

$$2\operatorname{Im}(z^2) \geqslant |z| \operatorname{Im}(z - \overline{z});$$

w rozwiązaniu wykorzystaj postać trygonometryczną liczby zespolonej.

Zadanie 2. (15p) *Rozważmy układ równań liniowych*

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z - w &= 0 \\ -x - 2y - z + 2w &= 1 \\ 2x - 3y - z + 5w &= 3 \\ x + z + 4w &= 3 \end{cases}.$$

Macierz uzupełnioną układu sprowadź do postaci schodkowej, następnie zbadaj liczbę jego rozwiązań i jeżeli jest to układ niesprzeczny, wyznacz jego rozwiązania.

Zadanie 3. (6p+6p+8p) *Rozważmy odwzorowanie liniowe*

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (a, b, c) \to (-a - b + 2c)x^2 + (-2a + c)x + 2a \in \pi_2.$$

(a) *Wyznacz macierz $M_{B,C}(F)$, gdzie $B = \big((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\big)$, $C = (x, 1, x^2)$. Czy odwzorowanie F jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.*

(b) *Wyznacz macierz Jordana J_A dla macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) *Znajdź bazy B' oraz C', dla których*

$$M_{B',C'}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

sprawdź poprawność rozwiązania poprzez wyznaczenie macierzy odwzorowania F w znalezionych bazach.

Zadanie 4. (15p) *Wyznacz rzut ortogonalny macierzy U na podprzestrzeń liniową $\mathcal{V} = \operatorname{lin}\{V_1, V_2\}$, gdzie*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W przestrzeni macierzy $\mathbb{R}^{2\times 2}$ rozważamy iloczyn skalarny $A \circ B = \operatorname{tr}(A^T B)$, gdzie tr *to ślad macierzy.*

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 1. 2 lutego 2026 r.*

Zadanie 1. (20p)

(a) *Wyznacz tę wartość parametru $p \in \mathbb{C}$, dla której liczba $s_1 = -1 - i$ jest miejscem zerowym wielomianu*

$$w(s) = s^3 + ps^2 - is - 1 + i;$$

następnie znajdź pozostałe jego miejsca zerowe s_2, s_3; wszystkie je zapisz w postaci trygonometrycznej oraz wykorzystując wzór de Moivre'a oblicz $s_1^{100} + s_2^{100} + s_3^{100}$.

(b) *Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek*

$$|z^2 - (1 + i)z| = |z^2|.$$

Zadanie 2. (15p)

(a) *Wykaż, że zbiór macierzy*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -z & z \\ z & -z \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0 \right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę abelową.

(b) *Wykorzystując wykazane w punkcie* ***(a)*** *własności struktury $(G, \cdot)$, w tym łączność mnożenia oraz fakt istnienia w G elementów odwrotnych dla wszystkich jego elementów, znajdź w G macierz X spełniającą równanie $XA^2X = BXA$, gdzie*

$$A = \begin{pmatrix} -1-i & 1+i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15p) *Rozważmy problem interpolacyjny polegający na znalezieniu wielomianu f stopnia co najwyżej trzeciego spełniającego następujące warunki:*

$$f(-1) = -4, \ f'(-1) = 5, \ f(1) = 2, \ f'(1) = -3, \ f''(-1) = p,$$

gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr. Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań ze względu na nieznane współczynniki wielomianu f; macierz uzupełnioną otrzymanego układu sprowadź do postaci schodkowej i zbadaj jej rząd w zależności od wartości parametru p. Czy istnieją wartości p, dla których rozważany problem posiada rozwiązanie? Czy jest ono wyznaczone jednoznacznie? Wyznacz wszystkie wielomiany f spełniające powyższe warunki.

Zadanie 4. (20p)

Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ określony rekurencyjnie: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Przyjmując oznaczenie $y_n = (x_{n+1}, x_n)^T$ otrzymujemy

$$y_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_n + \beta x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y_{n-1},$$

a stąd łatwo wywnioskować, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$y_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n y_0.$$

Wykorzystując powyższe podejście wyznacz jawną postać ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (2+i)x_n - (1+i)x_{n-1} \\ x_0 = 0, \ x_1 = 1 \end{cases}.$$

W rozwiązaniu wykorzystaj fakt, że każda macierz kwadratowa jest podobna do macierzy Jordana, a tę potęguje się łatwo.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 2. 9 lutego 2026 r.*

Zadanie 1. (20p)

(a) W zbiorze $G = (0, +\infty)$ wprowadzamy działanie

$$a \circ b = a^{\log_2 b}.$$

Sprawdź, czy działanie $\circ$ jest łączne, przemienne oraz czy posiada ono w G element neutralny. Czy para $(G, \circ)$ tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Rozwiąż poniższe równanie w zbiorze liczb zespolonych:

$$z^4 = (1 + i\sqrt{3})^7 (1+i)^2;$$

rozwiązania zapisz w postaci trygonometrycznej.

Zadanie 2. (15p) *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Przypomnijmy, że każdy wielomian φ stopnia $m \geqslant 1$, dla którego $\varphi(A) = 0_{n\times n}$ nazywamy wielomianem zerującym macierzy A.*

(*a*) *Wykaż, że wielomian* $\varphi(x) = x^2 + 2x + 1$ *jest wielomianem zerującym macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

następnie wykorzystaj ten fakt do wyznaczenia macierzy A^{-1}.

(*b*) *Spośród wszystkich wielomianów zerujących zadanej macierzy, wielomian najniższego stopnia* $m \geqslant 1$ *o współczynniku wiodącym równym jedności (tj.* $a_m = 1$ *) nazywamy jej wielomianem minimalnym. Uzasadnij, że rozważany w punkcie* (*a*) *wielomian zerujący* φ *macierzy* A *jest jej wielomianem minimalnym.*

Zadanie 3. (15p) *Rozważmy formę kwadratową*

$$\psi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + (1 + p)y^2 + (p - 1)^2 z^2 + 2xy - 2xz - 2(p + 1)yz \in \mathbb{R}.$$

(*a*) *Metodą Lagrange'a sprowadź formę kwadratową* ψ *do postaci kanonicznej; następnie zbadaj jej określoność w zależności od wartości parametru* $p \in \mathbb{R}$.

(*b*) *Dla* $p = 0$ *wyznacz macierz nieosobliwą* P, *dla której macierz* $P^T A_\psi P$ *jest diagonalna; macierz* A_ψ *to macierzy symetryczna formy* ψ.

Zadanie 4. (20p) *Dany jest endomorfizm*

$$F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2a + pb - pc)x^2 + (-b + c)x + 2c \in \pi_2.$$

(*a*) *Wyznacz macierz* $M_B(F)$ *endomorfizmu* F *w bazie* $B = (1, x, x^2)$, *zbadaj jej rząd w zależności od wartości parametru* $p \in \mathbb{R}$ *i na tej podstawie oceń, dla jakich wartości* p *endomorfizm* F *jest izomorfizmem.*

(*b*) *Wyznacz postać macierzy Jordana endomorfizmu* F *w zależności od wartości parametru* $p \in \mathbb{R}$. *Dla tych wartości* p, *dla których endomorfizm* F *jest diagonalizowalny, znajdź bazę* B' *przestrzeni* π_2, *w której jego macierz jest diagonalną macierzą Jordana. Wyznacz tę macierz oraz, wykorzystując ją, znajdź* $F^{10}(x^2 + x)$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka WEAIiIB *Termin 3. 16 lutego 2026 r.*

Zadanie 1. (20p)

(*a*) *Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz wszystkie liczby zespolone* z, *które spełniają warunek*

$$z + z^{-1} \in \mathbb{R}.$$

(*b*) *Czy można uzupełnić poniższą tabelę określającą działanie* $\circ$ *w ten sposób, aby para* $(\{a, b, c\}, \circ)$ *była grupą?*

$\circ$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	
c	b		

Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Zadanie 2. (15p) *Dane są macierze*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \\ -1 & p & p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Zbadaj rząd macierzy* A *w zależności od wartości parametru* $p \in \mathbb{R}$.

(*b*) *Dla* $p = 0$ *wyznacz macierz* A^{-1} *oraz, wykorzystując ją, znajdź macierz* X *spełniającą równanie*

$$(XA)^T - B = I_3.$$

Zadanie 3. (15p) *Rozważmy formę kwadratową*

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy - 2xz - 8yz \in \mathbb{R}.$$

Metodą Lagrange'a sprowadź formę kwadratową F do postaci kanonicznej; następnie skomentuj jej określoność oraz wyznacz macierz nieosobliwą P, dla której macierz $P^T A_F P$ jest diagonalna; macierz A_F to macierzy symetryczna formy F.

Zadanie 4. (20p) *Dane są przekształcenia liniowe:*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1, -x_1 + x_2),$$
$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, -x_2 + 2x_3, x_3)$$

oraz bazy

$$B = \big((0, 1), (1, 0)\big), \qquad C = \big((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\big).$$

(*a*) *Wyznacz macierze $M_{(B,C)}(\varphi)$, $M_{(C,C)}(\psi)$, $M_{(B,C)}(\psi \circ \varphi)$ oraz ich rzędy i na tej podstawie rozstrzygnij, które z przekształceń φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.*

(*b*) *Czy endomorfizm ψ jest diagonalizowalny? Wyznacz bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierzą endomorfizmu ψ jest macierz Jordana. Sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając, na podstawie definicji, macierz endomorfizmu ψ w znalezionej bazie.*