

Przedziały ufności – estymacja przedziałowa

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $P_\theta \in \mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Definicja. Losowy przedział $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$, gdzie $\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta(L(\mathbf{X}) < U(\mathbf{X})) = 1$, taki, że dla zadanego $\alpha \in (0, 1) \quad P_\theta(L(\mathbf{X}) \leq g(\theta) \leq U(\mathbf{X})) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta$, nazywamy **przedziałem ufności** dla parametru $g(\theta) \in R$ na poziomie $1 - \alpha$. Statystyki $L(\mathbf{X})$ i $U(\mathbf{X})$ nazywamy odpowiednio dolnym i górnym końcem przedziału a współczynnik $1 - \alpha$ nazywamy **poziomem ufności**.

Interpretacja. Prawdziwa nieznana, nielosowa wartość $g(\theta)$ z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ należy do losowego przedziału (jest pokryta losowym przedziałem) $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$. Nie można tu mówić o prawdopodobieństwie, że nieznaną parametr będzie zawarty w jakimś stałym przedziale. Takie zdanie miałoby sens gdyby nieznaną parametr był zmienną losową **a nie jest**.

Konstrukcja przedziałów ufności za pomocą funkcji centralnej (wiodącej)

Definicja. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ próbą prostą z rozkładu $P_\theta \in \mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Funkcja $Q(\mathbf{X}, g(\theta))$ (to nie jest statystyka) nazywa się **funkcją centralną** dla parametru $g(\theta) \in R$, jeżeli jej rozkład prawdopodobieństwa nie zależy od parametru θ .

Przykłady

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m, \sigma_0^2)$, gdzie σ_0^2 znane. Funkcja $Q(\mathbf{X}, m) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sigma_0}$ mająca rozkład $N(0, 1)$ jest funkcją centralną dla m
- Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m, \sigma^2)$. Oznaczmy $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ i

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Funkcja $Q(X_1, \dots, X_n, m) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{S}$ mająca rozkład t_{n-1} (t - Studenta z $n-1$ stopniami swobody) jest funkcją centralną dla m .

Funkcja $Q(X_1, \dots, X_n, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ mająca rozkład χ_{n-1}^2 jest funkcją centralną dla σ^2 .

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o ciągłej dystrybucji $F \in \mathcal{F}$. Ponieważ $F(X_i)$ ma rozkład jednostajny $U(0, 1)$, więc funkcja $Q(\mathbf{X}, F) = \prod_{i=1}^n F(X_i)$ o rozkładzie jednostajnym na kostce $(0, 1)^n$ jest funkcją centralną dla $F \in \mathcal{F}$.

Założmy, że dysponujemy funkcją centralną $Q(\mathbf{X}, g(\theta))$. Przedział ufności konstruujemy w następujący sposób:

Wybieramy liczby a i b tak aby spełniały nierówność:

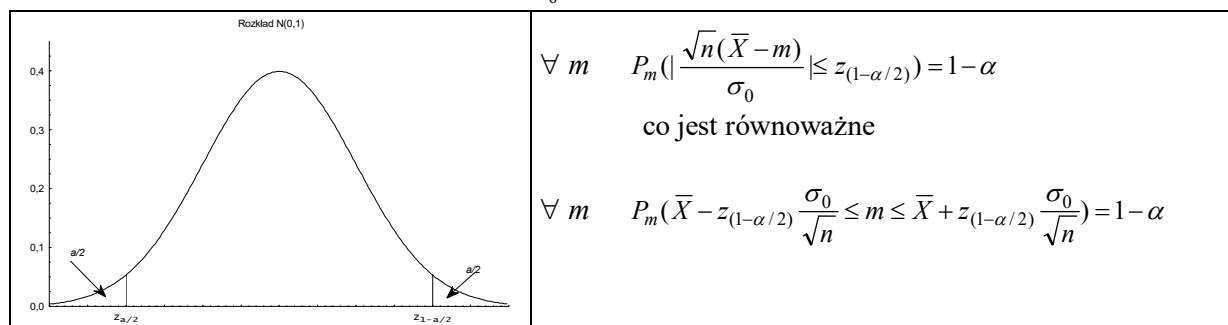
$$P_\theta(a \leq Q(\mathbf{X}, g(\theta)) \leq b) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta \Leftrightarrow P(a \leq Q(\mathbf{X}, g(\theta)) \leq b) = 1 - \alpha,$$

bo rozkład funkcji centralnej $Q(\mathbf{X}, g(\theta))$ nie zależy od parametru θ .

Gdy funkcja centralna $Q(\mathbf{X}, g(\theta))$ jest ciągłą i ściśle monotoniczną funkcją parametru $g(\theta) \in R$, to nierówność $a \leq Q(\mathbf{X}, g(\theta)) \leq b$ jest równoważna nierówności $[L(\mathbf{X}, a, b) \leq g(\theta) \leq U(\mathbf{X}, a, b)]$. Stąd przedział $[L(\mathbf{X}, a, b), U(\mathbf{X}, a, b)]$ jest $100(1 - \alpha)\%$ przedziałem ufności dla parametru $g(\theta) \in R$.

- **Przedział ufności dla m w rozkładzie $N(m, \sigma_0^2)$, gdzie σ_0^2 znane.**

Funkcja centralna $Q(X_1, \dots, X_n, m) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sigma_0}$ ma rozkład $N(0, 1)$. Wobec tego



otrzymaliśmy więc przedział ufności $[\bar{X} - z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$ o stałej długości

$$l(n, \alpha) = 2 z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Tą konstrukcję można powielić konstruując **asymptotyczny przedział ufności** dla pojedynczego parametru estymowanego MNW

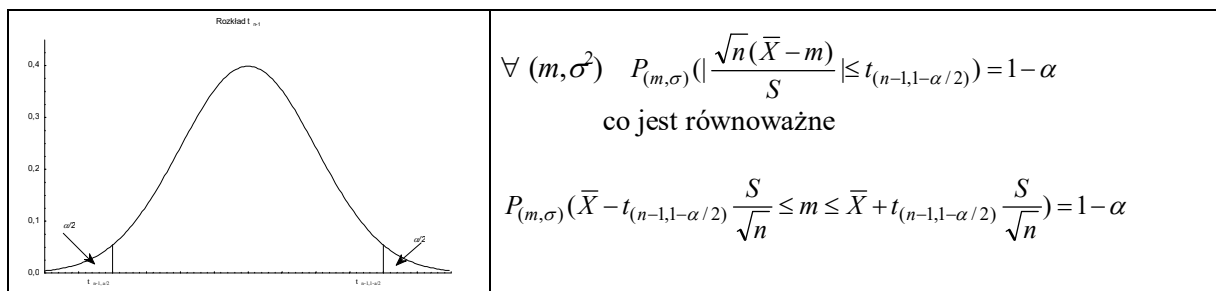
$$\forall \theta \quad P_\theta\left(\hat{\theta} - z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_{as}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma_{as}}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

gdzie za asymptotyczną wariancję $\sigma_{as}^2 = i_\theta^{-1}$ należy przyjąć jej estymator. Dokładniej w informacji

Fishera $i_\theta = i(\theta)$ za parametr θ należy przyjąć $\hat{\theta} = \text{ENW}[\theta]$. Poprawność tej konstrukcji jest prostym wnioskiem z asymptotycznych własności estymatorów NW i twierdzenia Śluckiego.

- **Przedział ufności dla m w rozkładzie $N(m, \sigma^2)$, gdzie σ^2 nieznane.**

Funkcja centralna $Q(X_1, \dots, X_n, m) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{S}$ ma rozkład t_{n-1} (t - Studenta z $n-1$ stopniami swobody). Wobec tego



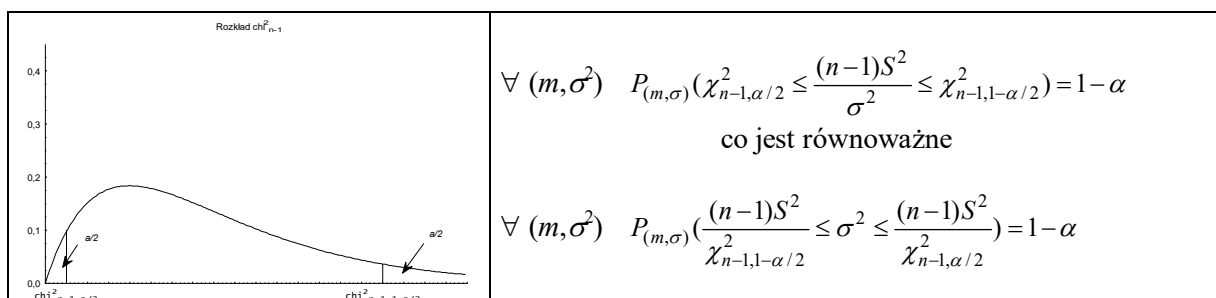
otrzymaliśmy więc przedział ufności $[\bar{X} - t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}}]$ o losowej długości

$l(n, \alpha) = 2t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}}$ o wartości oczekiwanej długości

$$E_{(m, \sigma)} l(n, \alpha) = 2t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{E_{(m, \sigma)}(S)}{\sqrt{n}} = 2t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{\sigma E(\sqrt{\chi_{n-1}^2})}{\sqrt{n}} = 2t_{(n-1, 1-\alpha/2)} \frac{const}{\sqrt{n}}$$

- **Przedział ufności dla σ^2 w rozkładzie $N(m, \sigma^2)$**

Funkcja $Q(X_1, \dots, X_n, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{n-1}^2 . Wobec tego



otrzymaliśmy więc przedział ufności $[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}]$ o losowej długości

$l(n, \alpha) = (n-1)S^2(\frac{1}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} - \frac{1}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2})$ o wartości oczekiwanej długości

$$E_{(m, \sigma)} l(n, \alpha) = (n-1)E(S^2)(\frac{1}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} - \frac{1}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}) = (n-1)\sigma^2(\frac{1}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} - \frac{1}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2})$$

W przypadku symetrycznego rozkładu funkcji centralnej wybór liczb a i b tak aby spełniały nierówność $P(a \leq Q(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq b) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta$ wydaje się oczywisty. W przypadku rozkładu niesymetrycznego wybór nie jest już oczywisty. Można postawić problem takiego doboru a i b , aby długość $l(a, b)$ przedziału $[L(X_1, \dots, X_n, a, b), U(X_1, \dots, X_n, a, b)]$ (gdy jest nieciosowa) lub wartość oczekiwana długości była minimalna. Mówimy wtedy o **najkrótszych przedziałach ufności** na poziomie $1 - \alpha$. Jeżeli F oznacza **dystrybuantę rozkładu funkcji centralnej**, to należy rozwiązać następujące zagadnienie optymalizacyjne

Znaleźć a i b tak aby

$$l(a, b) \rightarrow \min$$

pod warunkiem

$$F(b) - F(a) = 1 - \alpha$$

W rozważanym powyżej problemie

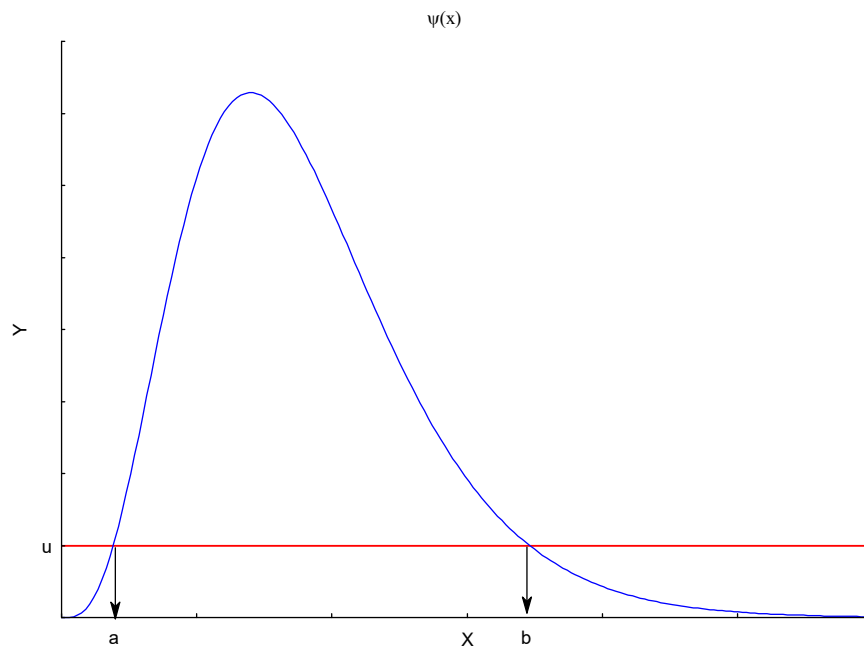
- $l(a, b) = (n-1)\sigma^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$
- $F_{\chi_{n-1}^2}(b) - F_{\chi_{n-1}^2}(a) = 1 - \alpha$

Aby rozwiązać powyższy problem ekstremum warunkowego tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(a, b; \lambda) = (n-1)\sigma^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \lambda(F_{\chi_{n-1}^2}(b) - F_{\chi_{n-1}^2}(a) - (1 - \alpha)).$$

$$\text{Z WK otrzymujemy układ } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{(n-1)\sigma^2}{a^2} - \lambda f_{\chi_{n-1}^2}(a) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{(n-1)\sigma^2}{b^2} + \lambda f_{\chi_{n-1}^2}(b) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F_{\chi_{n-1}^2}(b) - F_{\chi_{n-1}^2}(a) - (1 - \alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(n-1)\sigma^2}{\lambda} = a^2 f_{\chi_{n-1}^2}(a) \\ -\frac{(n-1)\sigma^2}{\lambda} = b^2 f_{\chi_{n-1}^2}(b) \\ F_{\chi_{n-1}^2}(b) - F_{\chi_{n-1}^2}(a) = 1 - \alpha \end{cases}$$

Niech $\psi(x) = x^2 f_{\chi_{n-1}^2}(x)$



Należy tak dobrać poziom u aby para $\{a, b\} = \psi^{-1}[\{u\}]$ spełniała warunek $F_{\chi_{n-1}^2}(b) - F_{\chi_{n-1}^2}(a) = 1 - \alpha$