## Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Niech funkcja $f: R^n \supset D \to R$ ($D$– otwarty) posiada pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w każdym punkcie $\mathbf{x} \in D$. Jest więc określona funkcja

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: R^n \supset D \ni \mathbf{x} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Jeżeli powyższa funkcja ma pochodną cząstkową po $j$-tej zmiennej $\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\mathbf{x})$ w punkcie **x**, to nazywamy ją drugą pochodną cząstkową funkcji $f$ po zmiennych $x_i, x_j$ i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = f''_{x_j x_i}(\mathbf{x})$.

**Uwaga**: Jeżeli $i = j$ to będziemy stosować oznaczenie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$ (pochodna czysta)

Jeżeli $i \neq j$ to $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ (pochodna mieszana)

**Tw.**(Schwarza)(Malec s.92) Jeżeli pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ są ciągłe w punkcie $\mathbf{x}$, to są równe.

Podobnie definiujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodne mieszane, które różnią się jedynie kolejnością różniczkowania, jeżeli są ciągłe to są sobie równe.

**Przykład** Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $(0,0)$ i jej pochodne cząstkowe są równe odpowiednio:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y^5}{\Delta y^5} = -1 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^5}{\Delta x^5} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ -1 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Poza punktem (0,0) pochodne mieszane są sobie równe (bo są ciągłe) ale nie są ciagłe w punkcie (0,0), bo nie istnieją granice $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ w punkcie (0,0).

## Różniczki wyższych rzędów

Oznaczenia $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ $f:Ot(\mathbf{a},\delta)\to R$

Różniczką funkcji $f$ w punkcie $\mathbf{a}$ dla przyrostu $\Delta\mathbf{x}$ nazywamy wyrażenie

$$df(\mathbf{a},\Delta\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\,\Delta x_i$$

Jeżeli przy ustalonym $\Delta\mathbf{x}$ funkcja $d(\,\cdot\,,\Delta\mathbf{x}):\ Ot(\mathbf{a},\delta)\to R$ ma różniczkę punkcie $\mathbf{a}$ , to nazywamy ją **drugą różniczką** funkcji $f$ w punkcie $\mathbf{a}$ i oznaczamy $d^2f(\mathbf{a},\Delta\mathbf{x})$.

**Przykład**. Wyprowadzić wzór na drugą różniczkę funkcji dwóch zmiennych. (zakładamy ciągłość pochodnych mieszanych)

$$d((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2))=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2$$

$$d^2f((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2))=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2]\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2]\Delta x_2=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\Delta x_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1\Delta x_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\Delta x_2^2=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 f$$

**Druga różniczka funkcji wielu zmiennych w danym punkcie jest formą kwadratową przyrostów**

$$d^2f((x_1,\ldots,x_n),(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n))=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x})\Delta x_i\Delta x_j$$

Uwagi o zapisie macierzowym drugiej różniczki.

$$d^2((x_1,\ldots,x_n),(\Delta x_1,,,,.\Delta x_n))=\begin{bmatrix}\Delta x_1 & \cdots & \Delta x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\mathbf{x})\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix}$$

**Wzór na *m*-tą różniczkę funkcji *n* zmiennych**

$$d^m f=(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+,\ldots,+\tfrac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n)^m f$$

**Zadanie**. Napisać wzór na drugą różniczkę funkcji trzech zmiennych i trzecią różniczkę funkcji dwóch zmiennych

## Wzór Taylora

Jeżeli funkcja $f:R^n\supset Ot(\mathbf{a},\delta)\ni\mathbf{x}\to f(\mathbf{x})\in R$ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu $m$ w $Ot(\mathbf{a},\delta)$, to istnieje $\theta\in(0,1)$ takie , że dla każdego $\mathbf{x}\in Ot(\mathbf{a},\delta)$ prawdziwy jest wzór

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \tfrac{1}{1!}df(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \tfrac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \dots + \tfrac{1}{(m-1)!}d^{m-1}f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a}) + r_m$$

gdzie $r_m = \tfrac{1}{m!}d^m f(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}),\mathbf{x}-\mathbf{a})$

**Uwaga**: punkt „pośredni” $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ leży wewnątrz odcinka o końcach **a** i **x**

**Dow**. Parametryzujemy odcinek $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}+t(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ ; $t\in[0,1]$ i tworzymy funkcję jednej zmiennej $\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{a}+t(\mathbf{x}-\mathbf{a}))$. Mamy więc rzeczywistą funkcję $\varphi$ określoną na domkniętym odcinku $[0,1]$ spełniającą założenia twierdzenia Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Stosując do niej wzór Maclaurina otrzymujemy

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}(1-0) + \dots + \frac{\varphi^{m-1}(0)}{(m-1)!}1^{m-1} + \frac{1}{m!}\varphi^m(\theta)1^m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}d\varphi(0,1) + \dots + \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1}\varphi(0,1) + \frac{1}{m!}d^m\varphi(\theta,1)$$

Ale $d^k\varphi(t_0,t-t_0) = \varphi^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = d^k f\big(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t_0)\big)(t-t_0)^k$.

Stąd $d^k\varphi(0,1) = d^k f(\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a})$ itd.

**Szczególny przypadek** $m = 2$

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(a_1,\dots,a_n) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right]\begin{bmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-a_n\end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2!}[x_1-a_1,\dots,x_n-a_n]\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{x}) & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\tilde{x}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\tilde{x}) & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-x_n\end{bmatrix}$$

**Przykład**. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x,y)=e^x\sin y$ w punkcie (0,0) (wzór Maclaurina) dla $m$=4.

Odp. $e^x\sin y = y + xy + \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{6}y^3 + r_4$

## Zastosowanie różniczki w teorii błędów

Dana jest funkcja $f$ wielu zmiennych. Wektorowy argument funkcji nie jest znany lecz dysponujemy jego pomiarem **x** obarczonym błędem Niech **x**+Δ**x** oznacza prawdziwą nieznaną wartość argumentu a błąd bezwzględny pomiaru (wektorowego) nie przekracza **b** ($\Delta\mathbf{x}\le\mathbf{b}$ nierówność wektorowa).

Wówczas $$|f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \approx |df(\mathbf{x},\Delta\mathbf{x})| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right| b_i .$$

Wytłumaczenie przybliżonego charakteru wzoru , kiedy to przybliżenie jest „dobre” i jak postąpić gdy przybliżenia nie jest zadowalające.

**Przykład**. Oszacować metodą różniczki zupełnej błąd jaki popełniamy obliczając objętość prostopadłościanu o krawędziach 4.1, 3.2, 8.4 zmierzonych odpowiednio z dokładnością 0.1, 0.1, 0.2. Odp. (błąd bezwzględny≤ 8.756, błąd względny 8% (wytłumaczyć jak rozumiemy błąd względny)

## Funkcje uwikłane

**Przykład 1**.Rozważmy równanie $f(x,y)=0$ np. $x^2+y^2-1=0$ i niech $(a,b)$ spełnia $f(x,y)=0$, czyli $f(a,b)=0$

**Pytanie**: Czy dla dowolnego $x\in[-1,1]$ istnieje taki $y(x)$, że $f(x,y(x))=0$ i $y(a)=b$?

Niech $(a,b)$=(0,1). Wówczas funkcja $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ ; $-1\le x\le 1$ spełnia powyższe warunki. Ale spełnia je także funkcja $y(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x\in[-1,1]\cap Q\\ -\sqrt{1-x^2} & x\in[-1,1]\cap(R-Q)\end{cases}$. Dokładając warunek ciągłości funkcji $y(x)$ eliminujemy ten przypadek.

Jeżeli $(a,b)$=(1,0), to nie istnieje funkcja $y(x)$ będąca rozwiązaniem problemu, ale istnieje funkcja $x(y)$ spełniająca warunki zadania.

**Powód.** W punkcie (1,0) nie istnieje styczna $Ax+By+C=0$ dająca się rozwikłać ze względu na $y$ ale daje się rozwikłać ze względu na $x$.

**Przykład 2**. **Wersja liniowa twierdzenia o funkcji uwikłanej**

$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^T\in R^n$ $\mathbf{y}=(y_1,...,y_m)^T\in R^m$

Rozważmy układ $m$ równań z $n+m$ niewiadomymi w postaci blokowej

$[\mathbf{A},\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}=[\mathbf{0}]$, gdzie **A** jest macierzą o wymiarach $(m,n)$ a **B** macierzą o wymiarach $(m,m)$

Załóżmy, że **B** jest macierzą odwracalną ($\det\mathbf{B}\neq 0$). Wówczas

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{By}=\mathbf{0} \qquad /\mathbf{B}^{-1}$$
$$\mathbf{y}(\mathbf{x})=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax}$$

**Idea**. Jeżeli rozważymy równanie $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ z funkcją $f\in C^1_{Ot(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ przy czym $(f(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{0})$ , to funkcja ta zachowuje się w tym otoczeniu podobnie do pochodnej $\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$, która jest odwzorowaniem liniowym. Badanie tego odwzorowania (pochodnej) dostarczy informacji o nieliniowej funkcji uwikłanej $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ określonej równaniem $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ o wykresie leżącym w otoczeniu punktu $(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

**Twierdzenie o funkcji uwikłanej** – wersja I. Jeżeli

- funkcja $f(x,y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ w otoczeniu punktu $(x_0,y_0)$

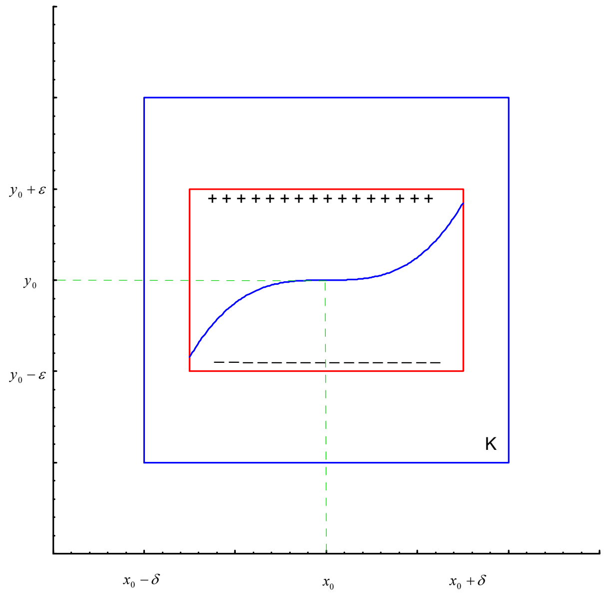
- $f(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

to

1. dla każdej dostatecznie małej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$ , że każdej wartości $x$ z przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ równania $f(x,y)=0$ należące do przedziału $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$
2. funkcja $y(x)$ jest ciągła w przedziale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i ma w nim ciągłą pochodną wyrażoną wzorem

$y'(x)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$, gdzie $y=y(x)$

**Dowód** (szkic) Bez straty ogólności załóżmy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)>0$ ( w przeciwnym przypadku można zastąpić równanie $f(x,y)=0$ równoważnym równaniem: $-f(x,y)=0$. Z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ wnioskujemy, że istnieje kwadrat $K=\{(x,y):|x-x_0|<\eta,\ |y-y_0|<\eta\}$ w którym $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0.$ Niech $\varepsilon<\eta$.Pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)>0$ funkcji jednej zmiennej $f(x_0,y)$ jest dodatnia, wiec w przedziale $(y_0-\varepsilon,y_0-\varepsilon)$, funkcja $f(x_0,y)$ jest rosnąca. Skoro $f(x_0,y_0)=0$, to $f(x_0,y_0-\varepsilon)<0$ a $f(x_0,y_0+\varepsilon)>0$ (rysunek). Funkcje $f(x,y_0-\varepsilon)$ i $f(x,y_0+\varepsilon)$ są ciągle w punkcie $x_0$ istniej więc otoczenie $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ w którym obie zachowują ten sam znak co w punkcie $x_0$. Mamy więc $f(x,y_0-\varepsilon)<0$ i $f(x,y_0+\varepsilon)>0$ dla $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Niech $x_1\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
Ciągła i rosnąca funkcja $f(x_1,y)$ przybiera na końcach przedziału $[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ wartości rożnych znaków, więc istnieje dokładnie jeden punkt $y(x_1)$ taki, ż $f(x_1,y(x_1))=0$, co kończy dowód istnienia funkcji uwikłanej $y(x)$. Prosty dowód ciągłości i różniczkowalność funkcji $y(x)$ można znaleźć ( Leja F. Rachunek różniczkowy i całkowy)




Różniczkując w otoczeniu punktu $(x_0, y(x_0))$ tożsamość $f(x, y(x)) = 0$ otrzymujemy

$$(*)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\, y'(x) = 0\ ,$$

a stąd

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))},$$

Różniczkując ponownie (*)otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\, y'(x) = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y(x))\, y'(x) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x))\, y'(x)\right) y'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\, y''(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(x,y(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y(x))\, y'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x))\,(y'(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\, y''(x) = 0$$

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(x,y(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y(x))\, y'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x))\,(y'(x))^2}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}$$

Podstawiając za $y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}$ otrzymujemy

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(x,y(x))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y(x))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\right)^3}$$

**Tw.**(**o funkcji uwikłanej**)-wersja II. Jeżeli $f: R^{n+m} \supset E \to R^m$ jest klasy $C^1_E$ (E – otwarty), $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in E$ i $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ oraz $f'(\mathbf{a},\mathbf{b}) = [\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y]$, gdzie $\mathbf{A}_y$ - odwracalna, to istnieją zbiory otwarte $U \subset R^n$ i $W \subset R^m$ takie, że $\forall_{\mathbf{x}\in U} \exists!_{\mathbf{y}\in W} : f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, czyli równanie $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ określa dokładnie jedną funkcję $g: R^n \supset U \to R^m$ taką, że $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ i $\forall_{\mathbf{x}\in U} f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$. Ponadto g jest klasy $C^1_U$ i $g'(\mathbf{a}) = -A_y^{-1} A_x$.

**Np.** $n=3 \quad m=2 \quad f:\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=2e^{y_1}+y_2x_1-4x_2+3 \\ f_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3 \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}=(3,2,7) \quad \mathbf{b}=(0,1)$

$f(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ ! Czy ten układ równań ( równanie wektorowe)

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=2e^{y_1}+y_2x_1-4x_2+3=0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3=0 \end{cases}$$

określa w otoczeniu punktu **a** funkcje uwikłaną?

Pochodna $f'(\mathbf{a},\mathbf{b})=[\mathbf{A}_x,\mathbf{A}_y]=\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{array}\right]$ i $\det \mathbf{A}_y=20\neq 0$

**Wniosek**. W pewnym otoczeniu $U$ punktu **a** równanie $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ określa w otoczeniu punktu **a** funkcję uwikłaną $g: R^3\supset U\to W\subset R^2$ taką, że $g(\mathbf{a})=\mathbf{b}$ i

$$g'(3,2,7)=-\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{A}_x=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

**Przykład**. Wykorzystując wzór Taylora znajdź przybliżenie funkcji uwikłanej $y=y(x)$ wielomianem stopnia trzeciego w otoczeniu punktu $(x_0,y_0)=(1,0)$. Funkcja uwikłana zadana jest równaniem $\cos(xy)-x-2y=0$.

W otoczeniu punktu $(x_0,y_0)=(1,0)$ są spełnione założenia tw. o funkcji uwikłanej więc równanie $\cos(xy)-x-2y=0$ określa w tym otoczeniu funkcję $y=y(x)$, przy czym $y(1)=0$.

$$y(x)=y(1)+\tfrac{y'(1)}{1!}(x-1)+\tfrac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\tfrac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+r_4$$

Kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie $x_0=1$ wyliczamy różniczkując równanie 1

(1) $\qquad \cos[xy(x)]-x-2y(x)=0$,

i otrzymujemy

(2) $\qquad -\sin[xy(x)][y(x)+xy'(x)]-1-2y'(x)=0$,

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ otrzymujemy $y'(1)=-\frac{1}{2}$.

Różniczkując równanie 2 otrzymujemy

(3) $\qquad -\cos[xy(x)][y(x)+xy'(x)]^2-\sin[xy(x)][2y'(x)+xy''(x)]-2y''(x)=0$

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ i $y'(1)=-\frac{1}{2}$ otrzymujemy $y''(1)=-\frac{1}{8}$.

Różniczkując równanie 3 otrzymujemy

(4) $$\begin{gathered} \sin[xy(x)][y(x)+xy'(x)]^3-3\cos[xy(x)][y(x)+xy'(x)][2y'(x)+xy''(x)] \\ -\sin[xy(x)][3y''(x)+xy'''(x)]-2y'''(x)=0 \end{gathered},$$

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ , $y'(1)=-\frac{1}{2}$, $y''(1)=-\frac{1}{8}$ otrzymujemy $y'''(1)=-\frac{27}{32}$

Ostatecznie $\quad y(x)=-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{16}(x-1)^2-\frac{9}{64}(x-1)^3+r_4$

# Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych

**Def.** Funkcja $f : X \supset D \to R$ ($\mathbf{a} \in D$ - otwarty, $X$ – przestrzeń metryczna) ma w punkcie $\mathbf{a}$

- minimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{Ot(\mathbf{a})\subset D} \forall_{\mathbf{x}\in Ot(\mathbf{a})} \; f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$
- minimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{Ot(\mathbf{a})\subset D} \forall_{\mathbf{x}\in Ot(\mathbf{a})\, \mathbf{x}\neq\mathbf{a}} \; f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$.

**Def.** Funkcja $f : X \supset D \to R$ ($\mathbf{a} \in D$ - otwarty, $X$ – przestrzeń metryczna) ma w punkcie $\mathbf{a}$

- maksimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{Ot(\mathbf{a})\subset D} \forall_{\mathbf{x}\in Ot(\mathbf{a})} \; f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
- minimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{Ot(\mathbf{a})\subset D} \forall_{\mathbf{x}\in Ot(\mathbf{a})\, \mathbf{x}\neq\mathbf{a}} \; f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$.

**Tw.** (**warunek konieczny istnienia ekstremum** )

Jeżeli funkcja $f : X \supset D \to R$ ma w punkcie $\mathbf{a} \in D$ ekstremum lokalne i istnieje w punkcie $\mathbf{a}$ pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ ($i = 1,\dots,n$), to $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ dla $i = 1,\dots,n$.

**Dowód**. dla minimum $\dfrac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = \begin{cases} > 0 & \text{dla } t > 0 \\ < 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ istnieje. Stąd $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ =0.

**Tw.** (**warunek wystarczający istnienia ekstremum**)

Jeżeli $f: R^n \supset D \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$

- jest klasy $C^2_D$ (tzn. ma drugie pochodne cząstkowe ciągłe w $D$)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i$=1,...,$n$ ; $\mathbf{a} \in D$
- $d^2 f(\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) > 0$ ($<0$) , $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

to $f$ ma w punkcie $\mathbf{a}$ minimum (maksimum) lokalne właściwe

**Dowód.** Z wzoru Taylora dokładnie jak dla funkcji jednej zmiennej mamy $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \mathbf{x}-\mathbf{a}) > 0 \; \forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, gdy $d^2 f(\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) > 0$, gdyż z ciągłości pochodnych rzędu drugiego, dla ustalonych przyrostów druga różniczka jest funkcją ciągłą w $\mathbf{a}$, więc z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ i $d^2 f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \mathbf{x}-\mathbf{a})$ mają ten sam znak dla $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

## Uzupełnienia z algebry

Niech *V* będzie przestrzenią liniową nad ciałem *R* liczb rzeczywistych. **Formą dwuliniową** nad *V* nazywamy funkcję $Q: V \times V \to R$ spełniającą warunki:

$$Q(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{w}) = Q(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}) + Q(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}) \qquad Q(\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}) = \lambda Q(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

$$Q(\mathbf{v},\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) = Q(\mathbf{v},\mathbf{w}_1) + Q(\mathbf{v},\mathbf{w}_2) \qquad Q(\mathbf{v},\lambda\mathbf{w}) = \lambda Q(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i dowolnej liczby rzeczywistej $\lambda$.

Niech $B = \{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ będzie bazą przestrzeni *V*. Niech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oznaczają współrzędne wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ w bazie *B* tzn. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$ i $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} y_i\mathbf{e}_j$.

Wówczas $Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} Q(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, czyli wartość formy dwuliniowej dla dowolnej pary wektorów jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości na parach wektorów bazowych $a_{ij} = Q(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$; $i,j=1,\ldots,n$, które tworzą **symetryczną** ($a_{ij} = a_{ji}$) **macierz kwadratową**

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przy ustalonej bazie *B* przestrzeni *V* możemy traktować formę dwuliniową jako funkcję $Q: R^n \times R^n \to R$ określoną w przestrzeni współrzędnych wzorem

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j ,$$

który można także zapisać jako

$$Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{lub} \quad Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza klasyczny iloczyn skalarny w $R^n$.

Przyjmując w szczególności $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ otrzymujemy z formy dwuliniowej tzw. **formę kwadratową** *n* zmiennych rzeczywistych $x_1,\ldots,x_n$ ,czyli funkcję

$$\varphi: R^n \ni \mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad \text{przy czym } a_{ij} = a_{ji}$$

Oczywiście forma kwadratowa ma przy ustalonej bazie przestrzeni *V* ma dokładnie jedną reprezentację macierzową $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$, gdzie **A** jest macierzą symetryczną.

**Przykład** . Forma kwadratowa 3 zmiennych

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 =$$

$$= [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

**Problem**. Jak zmienia się macierz formy gdy zmienimy bazę przestrzeni *V*.

Oczywiście przechodząc od starej bazy $B = \{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}$ do nowej $B' = \{\mathbf{e}'_1,...,\mathbf{e}'_n\}$ określamy macierz przejścia $\mathbf{P} = \lfloor p_{ij} \rfloor$ formułą $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e}_i$ ; *j*=1,…,*n*. Związek miedzy współrzędnymi wektora **v** w starej i nowej bazie jest zadany równością $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$. Wstawiając powyższe do równości

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = Q(\mathbf{x},\mathbf{x}) = Q(\mathbf{v},\mathbf{v}) = Q(\mathbf{x}',\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{A}'\mathbf{x}' \text{ otrzymujemy}$$

$$(\mathbf{P}\mathbf{x}')^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{A}'\mathbf{x}' \text{ a stąd}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

Formę kwadratową $\varphi$ nazywamy

- nieujemną - gdy $\forall \mathbf{x}\in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \geq 0$
- niedodatnią - gdy $\forall \mathbf{x}\in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \leq 0$
- dodatnią - gdy $\forall \mathbf{x}\in R^n, \mathbf{x}\neq\mathbf{0} \ : \ \varphi(\mathbf{x}) > 0$
- ujemna - gdy $\forall \mathbf{x}\in R^n, \mathbf{x}\neq\mathbf{0} \ : \ \varphi(\mathbf{x}) < 0$
- dodatnio określoną - gdy $\exists c>0 \ \forall \mathbf{x}\in R^n \ : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2$
- ujemnie określoną - gdy $\exists c>0 \ \forall \mathbf{x}\in R^n \ : \ \varphi(\mathbf{x}) \leq -c\|\mathbf{x}\|^2$
- nieokreśloną - gdy $\exists \ \mathbf{x}\in R^n \ \varphi(\mathbf{x}) > 0$ i $\exists \ \mathbf{y}\in R^n \ \varphi(\mathbf{y}) < 0$

**Uwaga.** W przypadku definiowania form kwadratowych na nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej unormowanej należy odróżniać pojęcia.

dodatniość formy i dodatnia określoność formy

ujemność formy i ujemna określoność formy

W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych pojęcia te pokrywają się. Jest to konsekwencją zwartości sfery jednostkowej w przestrzeni skończenie wymiarowej.

Badanie określoności formy kwadratowej jest szczególnie proste, gdy macierz tej formy jest macierzą diagonalną. Mówimy wtedy, że forma kwadratowa jest w **postaci kanonicznej**. Istnieje wiele metod sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej. Poniżej omówimy metodę Jakobiego, wykorzystującą tzw. **przekształcenie trójkątne**.

Niech $A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ będzie macierzą formy kwadratowej w pewnej bazie *B*.

**Def.** Minorami wiodącymi (odpowiednich stopni) macierzy $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ nazywamy

następujące wyznaczniki $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Załóżmy, że **wszystkie minory wiodące są różne od 0.**

Szukać będziemy nowej bazy $B' = \{\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'\}$ postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= p_{11}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2' &= p_{12}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n' &= p_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots + p_{nn}\mathbf{e}_n \end{aligned}$$ ,co odpowiada trójkątnej macierzy przejścia $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$.

W nowej bazie forma kwadratowa ma postać $\sum_{i,j=1}^{n} Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') x_i' x_j'$. Szukać będziemy takiej bazy, aby

$Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = 0$ dla $i \neq j$.

Łatwo zauważyć, że gdy $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j) = 0$ dla $j$=1,…,$i$-1, to $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = 0$ dla $j$=1,…,$i$-1.

Rzeczywiście $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = Q(\mathbf{e}_i', \sum_{k=1}^{j} p_{kj}\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{j} p_{kj} Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k) = 0$.

Warunki $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j) = 0$ dla $i$=1,…,$n$; $j$=1,…,$i$-1 wyznaczają wektory $\mathbf{e}_i'$ z dokładnością do stałej.

Przyjmijmy więc, że $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_i) = 1$. Wówczas $Q(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_i') = Q(\mathbf{e}_i', p_{ii}\mathbf{e}_i) = p_{ii}$. Aby wyznaczyć postać kanoniczną formy wystarczy wyliczyć przekątną $p_{ii}$; $i$=1,…,$n$ macierzy przejścia.

$$Q(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1) = 1 \Rightarrow Q(p_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \Rightarrow p_{11}a_{11} = 1 \Rightarrow p_{11} = \tfrac{1}{a_{11}} = \tfrac{1}{D_1}$$

$$\begin{cases} Q(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_1) = 0 \\ Q(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_{22} = \tfrac{D_1}{D_2}$$

$$\begin{cases} Q(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_1) = 0 \\ \quad\vdots \\ Q(\mathbf{e}_n', \mathbf{e}_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1k} \\ \vdots \\ p_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_{kk} = \tfrac{D_{k-1}}{D_k}$$ , $k$=1,…,$n$ , przy czym $D_0 := 1$.

W nowej bazie $B' = \{\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'\}$ forma kwadratowa ma postać $\sum_{i-1}^{n} \tfrac{D_{i-1}}{D_i} x_i'^2$.

Jako wniosek dostajemy.

**Twierdzenie.** (**kryterium Sylvestera**).

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ jest dodatnia (dodatnio określona) $\Leftrightarrow$ $D_i>0$ $i=1,\dots,n$.

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ jest ujemna (ujemnie określona) $\Leftrightarrow$ $(-1)^i D_i>0$ $i=1,\dots,n$.

Jeżeli wszystkie minory wiodące $D_i$ są różne od 0 i zmieniają się inaczej niż w powyższych przypadkach , to forma jest nieokreślona.

**Przykład**. W bazie kanonicznej w $R^3$ dana jest forma kwadratowa

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 = [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Minory wiodące są równe $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{17}{4}$.

Macierz przejścia do nowej bazy jest postaci $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$. Kolejne jej kolumny są rozwiązaniami układów równań

$$[2][p_{11}] = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd uzyskujemy macierz przejścia $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & \frac{8}{17} \\ 0 & -8 & -\frac{12}{17} \\ 0 & 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$ i kanoniczną postać formy

$\varphi(x_1',x_2',x_3') = \frac{1}{2}x_1'^2 - 8x_2'^2 + \frac{1}{17}x_3'^2$. Forma ta jest więc nieokreślona.