Zestaw 8 - wycena instrumentów typu europejskiego w modelu wielokrokowym.

1. Rozważmy model dwumianowy, dwukrokowy. Niech $S(0) = 100$, $U = 20\%$, $D = -10\%$, $R = 10\%$, $A(0) = 100$.

   (a) Rozważ opcję europejską typu put z ceną wykonania $K = 100$ w momencie 2. Wyznacz strategię replikującą tę opcję oraz jej uczciwe ceny w chwilach 0 i 1.

   (b) Korzystając z parytetu put-call wyznacz strategię replikującą oraz uczciwe ceny opcji call o tych samych parametrach.

   (c) Rozważ instrument pochodny H_1 o wypłacie[1]

   $$H_1 = (\max\{S(n) : n = 0, 1, 2\} - 100)^+.$$

   Wyznacz strategię replikującą ten instrument oraz jego uczciwe ceny w chwilach 0 i 1.

   (d) Rozważ instrument pochodny H_2 o wypłacie [2]

   $$H_2 = (\frac{S(0) + S(1) + S(2)}{3} - 100)^+.$$

   Wyznacz strategię replikującą ten instrument oraz jego uczciwe ceny w chwilach 0 i 1.

2. Niech $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $A(0) = 10$, $R = 0.05$. Znajdź portfel replikujący opcję o terminie zapadalności $N = 2$ i wypłacie

   $$D(2) = \mathbb{1}_{\{S(2)>120\}} + \mathbb{1}_{\{S(2)>100\}}.$$

   Podaj uczciwą cenę tej opcji w chwili 0.

3. Dany niech będzie model dwukrokowy dwumianowy, w którym

   $$\begin{aligned} &A(0) = 1,\ A(1) = 1.1,\ A(2) = 1.21,\\ &S(0) = 300,\ S^u(1) = 360,\ S^d(1) = 270,\\ &S^{uu}(2) = 432,\ S^{ud}(2) = 324,\ S^{du}(2) = 324,\ S^{dd}(2) = 243. \end{aligned}$$

   Rozważmy opcję azjatycką typu call o wypłacie

   $$D(N) = \max\left\{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S(n) - K, 0\right\}.$$

   Przyjmując za $N = 2$ i $K = 307$ wyznacz uczciwą cenę opcji w podanym modelu metodą:

   (a) prawdopodobieństw martyngałowych,

[1] opcję o takiej wypłacie nazywamy opcją call typu **lookback**
[2] opcję o takiej wypłacie nazywamy **azjatycką** opcją call

(b) strategii replikującej.

4. Wyprowadź wzór CRR na uczicwą cenę europejskiej opcji put z ceną wykonania K w dumianowym modelu N-krokowym CRR z parametrami $R, U, D, S(0)$:

$$\boxed{P(0) = \frac{K}{(1+R)^N} F_{q_1}(l) - S(0)F_q(l)},$$

gdzie $l = \max\{k \in \{0, \ldots, N\} : S(0)(1+U)^k(1+D)^{N-k} < K\}$

5. Rozważmy model CRR z parametrami $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $R = 0.1$. Podaj uczciwe ceny w momencie 0 europejskich opcji typu call i put o terminie zapadalności $N = 4$ i cenie wykonania $K = 100$.

6. Wyznacz uczciwą cenę w chwili 0 europejskiej opcji typu straddle o wypłacie $D(3) = |S(3) - 150|$ w dwumianowym trójkrokowym modelu CRR o parametrach $S(0) = 100$, $U = 0.5$, $D = 0$ oraz $R = 0.2$.

7. Rozpatrzmy europejską opcję call. Cena wykonania opcji K zależy od ceny akcji w chwili zapadalności opcji w następujący sposób:

$$K = \begin{cases} 60, & \text{gdy } S(T) < 60, \\ S(T), & \text{gdy } 60 \leq S(T) \leq 130, \\ 130 + \frac{1}{10}(S(T) - 130), & \text{gdy } 130 < S(T). \end{cases}$$

Wyceń ten instrument w trzyokresowym modelu dwumianowym o następujących założeniach:

- bieżąca cena akcji wynosi $S(0) = 50$,
- $U = 25\%$, $D = -20\%$,
- jeden okres = 3 miesiące,
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (per annum),

jeżeli wiadomo, że czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy.

8. Rozważmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty

$$H(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S(T) \leq K, \\ S(T) - K - A, & \text{gdy } K < S(T). \end{cases}$$

Wyznacz wartość A tak aby cena tego instrumentu wynosiła 0 przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S(0) = 100$,
- $U = 25\%$, $D = -15\%$,
- jeden okres = 3 miesiące,

- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (per annum),

jeżeli wiadomo, że

- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy,
- cena wykonania opcji wynosi $K = 100$.

9. *(Egzamin aktuarialny, 2012)* Rozpatrujemy instrument finansowy wypłacający w chwili $t = 3$ kwotę $S_M - S_m$, gdzie S_t jest ceną akcji w chwili $t = i$, $i = 0, 1, 2, 3$, natomiast $S_M = \max(S_0, S_1, S_2, S_3)$ i $S_m = \min(S_0, S_1, S_2, S_3)$. Inwestor wycenia instrument na drzewie dwumianowym przy następujących założeniach:

   - $S_0 = 100$,
   - w ciągu roku cena akcji rośnie o 25% lub spada o 20%,
   - roczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 10\%$,
   - rynek nie dopuszcza arbitrażu.

   Jaką cenę instrumentu otrzyma inwestor wykorzystując opisaną metodę (podać najbliższą odpowiedź)?

   (a) 38.3
   (b) 40.3
   (c) 42.3
   (d) 44.3
   (e) 46.3

10. *(Egzamin aktuarialny, 2008)* Inwestor kupuje po zaproponowanej przez siebie cenie europejską opcję kupna po cenie średniej na akcje spółki X. Do wyznacznia tej ceny przyjmuje on następujące założenia dotyczące kursu akcji w trzech kolejnych okresach

    - w każdym z okresów cena akcji spółki może wzrosnąć o 30% z prawdopodobieństwem 60% lub zmaleć o 20%
    - obecna cena akcji wynosi 100,
    - oczekiwana przez inwestora efektywna stopa zwrotu z tej inwestycji wynosi $i = 15\%$ w skali jednego okresu.

    Po upływie trzech okresów okazuje się, że cena akcji kształtowała się następująco: 120 na koniec pierwszego okresu, 160 na koniec drugiego okresu i 150 na koniec trzeciego. Efektywna stopa zwrotu z tej inwestycji, w skali jednego okresu, wyniosła

    (a) -57.6%;
    (b) -5.8%;

(c) 7.6%;

(d) 15.0%;

(e) 21.3%.

Uwaga: Europejska opcja kupna po cenie średniej wypłaca na koniec trzeciego okresu różnicę pomiędzy ceną końcową a ceną średnią w całym okresie ważności opcji liczoną z uwzględnieniem ceny początkowej oraz końcowej, o ile ta różnica jest dodatnia.

11. Rozważmy dziesięciokrokowy model dwumianowy, w którym długość jednego okresu wynosi jeden miesiąc (przyjmijmy oznaczenie $S(i)$ na cenę akcji w i-tym miesiacu). Wiadomo, że:

$$S(0) = 100,\ U = 30\%,\ D = -5\%,$$

Stopa wolna od ryzyka wynosi 24% w skali roku, przy kapitalizacji miesiecznej. Wyceń europejską opcję call o cenie realizacji $K = 100$, zapadającą za 10 miesięcy.