IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

# Informatyka, Algebra
# - KOLOKWIUM DRUGIE -
# 22 stycznia 2019

Czas: 90 min.

1. (22 pkt) Dane są rekurencyjnie trzy ciągi:

$$\begin{cases} a_n &= 4a_{n-1} - b_{n-1} - 2c_{n-1}, \\ b_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} - 2c_{n-1}, \\ c_n &= 2a_{n-1} - b_{n-1}, \end{cases} \qquad a_0 = \frac{1}{2^{2021}-2},\ b_0 = 1,\ c_0 = \frac{1}{2^{2020}-1}.$$

Wyznacz $b_{2020}$.

Zauważmy, że

$$[a_n, b_n, c_n]^T = A[a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}]^T, \boxed{1 \text{ pkt}}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

W takim razie

$$[a_n, b_n, c_n]^T = A^n[a_0, b_0, c_0]^T = A^n[\alpha, \beta, \gamma]^T \boxed{1 \text{ pkt}}.$$

Aby wyznaczyć $A^n$ zdiagonalizujemy macierz $A$.

1. Wyliczamy wartości własne $A$:
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 \boxed{1 \text{ pkt}}$$
Stąd wartości własne i ich krotności dane są jako
$$\lambda_1 = 1, k_1 = 1, \boxed{1 \text{ pkt}} \qquad \lambda_2 = 2, k_2 = 2 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

2. Szukamy wektorów własnych:
$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= s \\ u_2 &= s \ , s \in \mathbb{R} \\ u_3 &= s \end{cases} \boxed{3 \text{ pkt}} \Leftrightarrow V_1 = Lin\{[1,1,1]\}$$
$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= s \\ u_2 &= 2s - 2t \ , s, t \in \mathbb{R} \\ u_3 &= t \end{cases} \boxed{3 \text{ pkt}} \Leftrightarrow V_{-1} = Lin\{[1,2,0], [0,-2,1]\}$$

3. Macierz $A$ możemy zapisać w postaci
$$A = PDP^{-1},$$
gdzie
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$
Szukamy macierzy $P^{-1}$ (np. metodą dopełnień algebraicznych):
$$\det P = -1 \boxed{1 \text{ pkt}},$$
$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \boxed{1 \text{ pkt}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

4. Wyliczamy $A^{2020}$:

$$
\begin{aligned}
A^{2020} &= PD^{2020}P^{-1}\boxed{1\text{ pkt}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{2020} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2020} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2020} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^{2020} & 0 \\ 1 & 2^{2021} & -2^{2021} \\ 1 & 0 & 2^{2020} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{1\text{ pkt}} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{2020}\cdot 3 - 2 & 1 - 2^{2020} & 2 - 2^{2021} \\ 2^{2021} - 2 & 1 & 2 - 2^{2021} \\ 2^{2021} - 2 & 1 - 2^{2020} & 2 - 2^{2020} \end{pmatrix} \boxed{1\text{ pkt}}
\end{aligned}
$$

W takim razie

$$
b_{2020} = (2^{2021} - 2, 1, 2 - 2^{2021})(a_0, b_0, c_0)^T \boxed{1\text{ pkt}} = 1 + 1 - 2 = 0. \boxed{1\text{ pkt}}
$$

**Odpowiedź** $b_{2020} = 0$.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

2. (23 pkt) W zależności od parametru rzeczywistego $p$ rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (p+1)x - y - pz & = 2p \\ x + py + 2pz & = 1 \\ x + pz & = 1 \\ px + y & = 1 \end{cases}$$

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

Zapiszmy podany układ w postaci macierzowej, tj.

$$Ax = b, \quad \text{gdzie } A = \begin{pmatrix} p+1 & -1 & -p \\ 1 & p & 2p \\ 1 & 0 & p \\ p & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obliczamy

$$\det(A|b) = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -p & 2p \\ 1 & p & 2p & 1 \\ 1 & 0 & p & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -p & 2p \\ 0 & p & p & 0 \\ 1 & 0 & p & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \boxed{\text{1 pkt}} = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -p+1 & 2p \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & 1 \\ p & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \boxed{\text{1 pkt}}$$

$$= p \begin{vmatrix} p+1 & -p+1 & 2p \\ 1 & p & 1 \\ p & -1 & 1 \end{vmatrix} \boxed{\text{1 pkt}} = p(p^2 + p - p^2 + p - 2p - 2p^3 + p + 1 + p - 1) \boxed{\text{1 pkt}}$$

$$= p(-2p^3 + 2p) = -2p^2(p^2 - 1) = -2p^2(p-1)(p+1) \boxed{\text{1 pkt}}$$

Stąd

$$\det A = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = 1 \vee p = -1 \boxed{\text{1 pkt}}$$

Rozważamy więc następujące przypadki

- $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

  Wówczas układ jest sprzeczny $\boxed{\text{1 pkt}}$, gdyż $rz(A|b) = 4 > rz(A)$. $\boxed{\text{1 pkt}}$

- $p = 0$

  Wówczas układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ x & = 1 \\ x & = 1 \\ \quad y & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \boxed{\text{3 pkt}}$$

- $p = 1$

  Wówczas przekształcając układ metodą Gaussa dostajemy kolejno

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 - 2w_1]{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_3]{w_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 2w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{\text{5 pkt}}$$

  Widzimy więc, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. $\boxed{\text{1 pkt}}$

- $p = -1$

  Wówczas przekształcając układ metodą Gaussa dostajemy kolejno

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 + w_1]{w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_3 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{\text{5 pkt}}$$

  Widzimy więc, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $(x, y, z) = (0, 1, -1)$. $\boxed{\text{1 pkt}}$

**Odpowiedź** Układ jest sprzeczny dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Gdy $p = 0$ układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań potaci $(1, 1, s)$, $s \in \mathbb{R}$. Gdy $p = 1$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(1, 0, 0)$. Gdy $p = -1$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(0, 1, -1)$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu |

3. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (7 pkt) Dany jest stożek, którego podstawa zawiera się w płaszczyźnie $\pi : -12x + 2y + 3z - 10 = 0$. Wierzchołkiem stożka jest punkt $W = (12, -3, 1)$. Ponadto wiadomo, że punkt $B = (2, 2, 10)$ leży na brzegu podstawy rozważanego stożka. Wówczas

I. Równanie kierunkowe prostej $l$ będącej osią symetrii stożka to $\boxed{\frac{x-12}{-12} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}}$ , ponieważ

$W \in l$ oraz wektor $n = [-12, 2, 3]$ jest wektorem kierunkowym prostej $l$ 2 pkt

II. Środkiem podstawy stożka jest punkt $S$ o współrzędnych $\boxed{(0, -1, 4)}$ , ponieważ

$$S \in l \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} -12x + 2y + 3z - 10 & = 0 \\ y & = -\frac{1}{6}x - 1 \\ z & = -\frac{1}{4}x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = -1 \\ z & = 4 \end{cases}$$ 3 pkt

III. Długość promienia podstawy stożka wynosi $\boxed{7}$ , ponieważ

$r = |SB| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7.$ 2 pkt

(b) (2 pkt) Jeżeli macierz kwadratowa $A$ spełnia równość $AA^T = I$ to $A^T A = I$: ■ **PRAWDA** ☐ FAŁSZ , ponieważ

$AA^T = I \Rightarrow (A^T A)^T = I$ 1 pkt $\Rightarrow A^T A = I^T = I$ 1 pkt.

(c) (2 pkt) Jeżeli macierz $A$ wymiaru $n \times n$ (gdzie $n \in \{1, 2, \ldots\}$) jest diagonalizowalna, to jej wielomian charakterystyczny ma $n$ różnych pierwiastków: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

np. macierz $A = I$ wymiaru $2 \times 2$ jest diagonalizowalna (bo jest diagonalna), ale jej wielomian charakterystyczny ma tylko jeden pierwiastek podwójny (równy 1). 2 pkt

(d) (3 pkt) Jeżeli $A$ jest macierzą spełniającą $I + A = 2A^2 + 3A^3$, to $A^{-1}$ jest równa $\boxed{-I + 2A + 3A^2}$ , ponieważ

$I = -A + 2A^2 + 3A^3 = A(-I + 2A + 3A^2) = (-I + 2A + 3A^2)A$ 3 pkt

(e) (6 pkt) Zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru $p$, dla których wymiar przestrzeni

$$Lin\{(p, p, 3, 4); (1, 1, 1, 1); (p, 2, p, 2)\}$$

jest największy, wynosi $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2, \}}$ , ponieważ

$\begin{vmatrix} p & p & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ p & 2 & p \end{vmatrix} = 2p^2 + 6 - 5p - p^2 = (p-2)(p-3)$ 1 pkt $\Rightarrow$ wymiar wynosi 3, gdy $p \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. 1 pkt

Dla $p = 2$ wymiar tej przestrzeni nie jest maksymalny 1 pkt (bo $(1, 1, 1, 1)$ i $(2, 2, 2, 2)$ są liniowo zależne) 1 pkt. Dla $p = 3$ wymiar tej przestrzeni również jest maksymalny 1 pkt, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ 1 pkt,

IMIĘ I NAZWISKO , numer indeksu

4. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (2 pkt) Odwzorowanie $L : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zdefiniowane jako $(Lf)(x) = \cos f(x)$, jest odwzorowaniem liniowym: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

Np. dla $\alpha = 2$, $f(x) = x$, $x = \frac{\pi}{2}$ mamy:

$$\alpha(Lf)(x) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \neq -1 = \cos\pi = (L\alpha f)(x) \boxed{2 \text{ pkt}}$$

(b) (9 pkt) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorwaniem liniowym, gdzie $U$ i $V$ są pewnymi przestrzeniami wektorowymi z bazami odpowiednio $B_U$, $B_V$. Wiadomo, że macierz odwzorowania $f$ w tych bazach jest równa

$$M_f(B_U, B_V) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

I. $f$ jest endomorfizmem: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$dimU = 4 \neq 2 = dimV \Rightarrow U \neq V \boxed{2 \text{ pkt}}$.

II. Wymiar jądra odwzorowania $f$ wynosi ☐ 1 ☐ 2 ■ **3** ☐ 4 , ponieważ

$$dimKerf = dimU - dimImf \boxed{1 \text{ pkt}} = dimU - rzM_f(B_U, B_V) \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$= 4 - 1 \boxed{1 \text{ pkt}} = 3$$

III. Jeżeli $B'_V$ jest bazą przestrzeni $V$ powstałą z bazy $B_V$ przez wymnożenie każdego wektora z tej bazy przez $-2$ (przy zachowaniu kolejności tych wektorów), to drugi wiersz macierzy $M_f(B_U, B'_V)$ wynosi $[2, -2, 1, 3]$ , ponieważ

$$M_f(B_U, B'_V) = P^{-1}_{B_V \to B'_V} M_f(B_U, B_V) \boxed{1 \text{ pkt}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

(c) (9 pkt) Dane są proste o równaniach:

$$l_1 : \begin{cases} x &= 1 + 5t, \\ y &= -1 - 2t, \\ z &= t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x &= 1 + 3t, \\ y &= -2 + 2t, \\ z &= \sqrt{3}t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_3 : \begin{cases} x &= 1, \\ y &= -1 + t, \\ z &= 0, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wówczas:

I. Proste $l_1$ i $l_2$ są współpłaszczyznowe: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

nie są równoległe (bo $\sim \exists\alpha : [5, -2, 1] = \alpha[3, 2, \sqrt{3}]$) $\boxed{1 \text{ pkt}}$ ani się nie przecinają $\boxed{1 \text{ pkt}}$, bo:

$$\begin{cases} 1 + 5t &= 1 + 3s, \\ -1 - 2t &= -2 + 2s, \\ t &= \sqrt{3}s. \end{cases} \Rightarrow s, t \in \emptyset$$

II. Równanie ogólne wspólnej płaszczyzny prostych $l_1$ i $l_3$ to $-x + 5z + 1 = 0$ , ponieważ

wektory kierunkowe tych prostych to $v_1 = [5, -2, 1], v_3 = [0, 1, 0]$, a ich punkt wspólny to $P_0 = (1, -1, 0)$. Stąd równanie ich wspólnej płaszczyzny:

$$\pi : 0 = ([x, y, z] - P_0) \cdot (v_1 \times v_3) = [x-1, y+1, z] \cdot [-1, 0, 5] = 0 \boxed{2 \text{ pkt}} = -x + 5z + 1 = 0 \boxed{1 \text{ pkt}}$$

III. Miara kąta pomiędzy prostą $l_2$ a $l_3$ wynosi $60^o$ , ponieważ

wektory kierunkowe tych prostych to $v_2 = [3, 2, \sqrt{3}], v_3 = [0, 1, 0]$. Stąd kąt między nimi:

$$\sphericalangle(l_2, l_3) = \sphericalangle(v_2, v_3) = \arccos\left(\frac{v_2 \circ v_3}{||v_2|| \cdot ||v_3||}\right) \boxed{1 \text{ pkt}} = \arccos(\frac{2}{4}) \boxed{2 \text{ pkt}} = 60^o \boxed{1 \text{ pkt}}$$