**Zestaw 5**

Portfele złożone z wielu walorów. Notacja macierzowa.

1. Niech $C$ będzie macierzą kowariancji pomiędzy stopami zwrotu $n$ walorów. Wykaż, że $C$ jest nieujemnie określoną macierzą symetryczną. Czy $C$ zawsze jest macierzą odwracalną?

2. Niech $C$ będzie macierzą kowariancji pomiędzy stopami zwrotu $n$ walorów. Przypuśćmy, że $C$ jest odwracalna. Wykaż, że $C$ jest dodatnio określona.

3. Przypuśćmy, że dana jest macierz korelacji $\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ oraz wektor odchyleń $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Wyznacz *wzór macierzowy* pozwalający wyliczyć, na podstawie tych danych, macierz kowariancji $C$.

4. Przypuśćmy, że dana jest macierz kowariancji $C$ oraz wektor odchyleń $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Wyznacz *wzór macierzowy* pozwalający wyliczyć, na podstawie tych danych, macierz korelacji $\rho$.

5. Niech $w_j^{(n)} = \frac{1}{n}$ będzie wagą $j$-tego waloru w portfelu $\boldsymbol{w}_n = (w_1^{(n)}, \dots, w_n^{(n)})$ złożonym z $n$ walorów. Zbadaj zbieżność ciągu $\sigma_{\boldsymbol{w}_n}$ przy $n \to \infty$. Sformułuj warunki wystarczające zbieżności.

6. Rozważ dwa walory z parametrami $\mu_1 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.4$ oraz $\rho = -0.5$. Korzystając z notacji macierzowej
   (a) oblicz oczekiwany zwrot i wariancję portfela $\boldsymbol{w} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$,
   (b) wyznacz portfel o minimalnej wariancji, jego oczekiwany zwrot oraz odchylenie standardowe.

7. Inwestujemy zgodnie z wektorem wag $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{2})$, gdzie waga $w_1$ to inwestycja w walor wolny od ryzyka. Wiadomo, że $\mu = (\mu_2, \mu_3)^{\mathrm{T}} = (0.11, 0.15)^{\mathrm{T}}$ oraz, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 5\%$. Ponadto macierz kowariancji dana jest jako
$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.02 \end{pmatrix}.$$
   (a) Oblicz oczekiwany zwrot z inwestycji.
   (b) Znajdź wariancję i odchylenie standardowe portfela.

8. Rozważmy macierz kowariancji stóp zwrotu
$$C = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.03 \end{pmatrix}.$$
   Znajdź portfel o minimalnej wariancji.

9. Dane jest $n$ walorów o stopach zwrotu $\boldsymbol{K} = (K_1, \dots, K_n)$ i macierzy kowariancji stóp zwrotów $C$. Niech $\boldsymbol{w}_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,n})$ oraz $\boldsymbol{w}_2 = (w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,n})$ będą dwoma portfelami. Niech $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}_1} = \boldsymbol{w}_1^T \boldsymbol{K}$ oraz $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}_2} = \boldsymbol{w}_2^T \boldsymbol{K}$ oznaczają zwroty z portfeli odpowiednio $\boldsymbol{w}_1$ oraz $\boldsymbol{w}_2$. Udowodnij, że
$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}_1}, \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{w}_2}) = \boldsymbol{w}_1^T C \boldsymbol{w}_2.$$

10. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2010)* Odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela składającego się z 20 akcji, w którym udziały akcji są jednakowe wynosi 0,182. Kowariancja pomiędzy każdą z par akcji wchodzących w skład tego portfela jest jednakowa i wynosi 0,03. na podstawie powyższych informacji określ, której z podanych poniżej wartości jest najbliższa wartość wariancji stopy zwrotu z akcji wchodzących w skład tego portfela, jeśli założysz, iż wariancja ta jest taka sama dla każdej akcji.

    (a) 0.06;
    (b) 0.09;
    (c) 0.19;
    (d) $0,36$.

11. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2001)* Inwestor skonstruował portfel składający się z akcji o równych udziałach (bez krótkiej sprzedaży). Odchylenie standardowe stopy zwrotu każdej z akcji wynosi 20%, zaś kowariancja pomiędzy stopami zwrotu każdej z par akcji tego portfela wynosi 0,01. Która z poniżej wymienionych wartości na pewno nie jest równa odchyleniu standardowemu stopy zwrotu z tego portfela?

    I: 25,3%;
    II: 12,6%;
    III: 10,3%;
    IV: 8,7%.

    Warianty odpowiedzi:

    (a) (I);
    (b) (I,IV);
    (c) (II,III,IV);
    (d) (I,III,IV).

12. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2002)* Proszę obliczyć ryzyko portfela (wyrażone odchyleniem standardowym) składającego się z trzech akcji A, B i C, w przypadku, gdy zabroniona jest krótka sprzedaż, zaś udziały poszczególnych akcji w portfelu wynoszą $A = 30\%$, $B = 25\%$. Odchylenie standardowe poszczególnych akcji wynosi odpowiednio: $A = 30\%$, $B = 20\%$, zaś $C = 10\%$. Korelacja pomiędzy akcjami wynosi: $AB = 0,3$, $AC = 0,1$, $BC = 0,5$.

(a) $2,10\%$;
(b) $4,40\%$;
(c) $13,56\%$;
(d) $16,24\%$.

13. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2006)* Kowariancja pomiędzy stopami zwrotu każdej z par akcji portfela wynosi 100, zaś wariancja stopy zwrotu każdej akcji wynosi 120. Ile wyniesie odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela złożonego z 80 takich akcji, jeżeli udziały akcji w portfelu są jednakowe (po $\frac{1}{80}$):

    (a) $9,5\%$;
    (b) $10,0\%$;
    (c) $10,9\%$;
    (d) $11,5\%$.

14. Dane są trzy nieskorelowane walory o parametrach $\sigma_1^2 = 0.01$, $\sigma_2^2 = 0.02$, $\sigma_3^2 = 0.04$, $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$. Celem inwestora było stworzenie portfela o oczekiwanej stopie zwrotu $m = 25\%$ i najmniejszej możliwej wariancji. Wyznacz wagi tego portfela.

15. Rozważmy macierz kowariancji stóp zwrotu

$$C = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.03 \end{pmatrix}.$$

    Zakładając, że portfel $\widehat{\boldsymbol{w}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ leży na krzywej o minimalnej wariancji znajdź portfel $\boldsymbol{w}$ leżący na krzywej o minimalnej wariancji, dla którego $\sigma_{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{10}$.

16. Dane są trzy walory o oczekiwanych stopach zwrotu $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$ oraz macierzy kowariancji stóp zwrotu

$$C = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

    (a) Wyznacz wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ takie, że dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$ portfel o oczekiwanej stopie zwrotu $m$ i najmniejszej możliwej wariancji ma postać

$$\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

    (b) Korzystając z powyższej zależności wyznacz portfel leżący na krzywej o minimalnej wariancji, dla którego oczekiwana stopa zwrotu jest równa $m = 20\%$.
    (c) Wyznacz portfel leżący na krzywej o minimalnej wariancji, dla którego oczekiwana stopa zwrotu jest równa $m = 10\%$.

(d) Znajdź wariancje portfeli z dwóch poprzednich punktów, a następnie kowariancję pomiędzy ich stopami zwrotu.

(e) Wykorzystaj powyższe obliczenia do narysowania krzywej o minimalnej wariancji na płaszczyźnie $(\sigma, \mu)$.

(f) Znajdź wagi oraz oczekiwaną stopę zwrotu portfela leżącego na krzywej o minimalnej wariancji, dla którego $\sigma^2 = 0.007$.