
KOŁOKWIUM 1 - Algebra, 24 listopada 2014

1. (14 pkt.) Na zbiorze \mathbb{C} wprowadzamy relację R , zdefiniowaną jako:

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{N}.$$

(Zbiór $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$)

- Pokazać, że (\mathbb{C}, R) jest zbiorem uporządkowanym. Stwierdzić czy jest to porządek silny czy słaby.
 - Czy (\mathbb{C}, R) jest uporządkowany liniowo?
 - W zbiorze $A = \{1, 1 + i, 2i, -2 + i, -2 + 2i, i\}$ wskazać (jeżeli istnieją) elementy: minimalny, maksymalny, najmniejszy, największy oraz najdłuższy łańcuch.
2. (12 pkt.) Uzasadnić, że
- struktura $(\mathbb{C}, *)$, gdzie działanie $*$ jest zdefiniowane jako $z_1 * z_2 = z_1^2 + z_2^2$, nie jest grupą,
 - struktura $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest pierścieniem,
 - struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest ciałem,
 - struktura $(\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ nie jest grupą,
 - pierścień $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ ma dzielniki zera,
 - zbiór pierwiastków zespolonych n -tego stopnia ($n \in \mathbb{N}$) z 1 z działaniami $+$ i \cdot nie jest ciałem.
3. (13 pkt.) Na zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ definiujemy relację S w poniższy sposób

$$xSy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{y} = 3^k.$$

- Wykazać, że S jest relacją równoważności.
 - Znaleźć [1] oraz [27].
 - Czy zbiór $\{2, 6, 18, 24\}$ jest elementem zbioru ilorazowego relacji S ?
4. (11 pkt.) Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej zbiory

(a)

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg(i - 1) < \arg(\bar{z} + i) \leq \arg(1 - \sqrt{3}i) \right\},$$

(b)

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z + i}{z - 3i} \right| > 1 \right\}.$$