KOLOKWIUM - ALGEBRA, 28 stycznia 2014

1. (17 pkt.) Dana jest przestrzeń wektorowa
$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f - \text{funkcja ciągła}\}.$$
Niech $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$.
   (a) (7 pkt.) Sprawdzić, czy (f, g, h) jest układem liniowo niezależnych wektorów przestrzeni X.
   (b) (10 pkt.) Sprawdzić, czy $B = (f, g, h)$ jest bazą przestrzeni X.

2. (14 pkt.) W zależności od paramterów $a, b, p \in \mathbb{R}$ rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} px & +(1-p)y & +pz & = a \\ x & +py & +(1-p)z & = ab \\ (p+1)x & +py & +z & = b(1-p) \end{cases}.$$
W przypadku gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wykorzystać wzory Cramera.

3. (25 pkt.) Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, zdefiniowane następująco
$$(fp)(x) = \frac{p^{''}(2)}{2}x^2 + p^{'}(1)(x-1) - p(x),$$
oraz baza $B = (2x^2 - x, x+1, 3)$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.
   (a) (4 pkt.) Sprawdzić, że f jest odwzorowaniem liniowym.
   (b) (12 pkt.) Znaleźć bazy oraz wymiary przestrzeni $Kerf$ oraz Imf. Określić, czy odwzorowanie f jest epimorfizmem lub monomorfizmem.
   (c) (9 pkt.) Wyznaczyć macierz odwzorowania f w bazie B, a następnie macierz odwzorwania $f \circ f$ (również w bazie B).

4. (19 pkt.) Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt EFG. Współrzędne wierzchołków trójkąta są równe
$$E = (-1, 0, -1),\ F = (1, 10, 5),\ G = (0, 8, 5)$$
Punkt S jest punktem przecięcia środkowych trójkąta EFG. Wiadomo, że równoległobok $ABCD$ leży na płaszczyźnie π równoległej do płaszczyzny π_1 zawierającej trójkąt EFG, przy czym odległość pomiędzymy tymi dwiema płaszczyznami jest równa $2\sqrt{6}$. Ponadto punkty E,S, F są rzutami prostokątnym odpowiednio punktów A, B, C na płaszczyznę π_1. Znaleźć miarę kąta ABC, współrzędne wierzchołka D oraz pole równoległoboku $ABCD$.