KOLOKWIUM 1 - ALGEBRA, 15 listopada 2013

1. Dana jest relacja $R = (X, gr(R), X)$, gdzie $X = \{1, 2, 3 \ldots, 10\}$, określona w następujący sposób
$$\forall x, y \in X : xRy \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^k = y^l.$$
   (a) (4 pkt.) Pokazać, że R jest relacją równoważności.
   (b) (3 pkt.) Znaleźć [2] oraz [4].
   (c) (3 pkt.) Jaką moc ma zbiór ilorazowy relacji R?

2. Niech działania $\oplus$ i $\odot$ w zbiorze $\mathbb{R}$ będą określone wzorami:
$$a \oplus b = a + b + 1, \;\; a \odot b = a + b + ab$$
   (a) (9 pkt.) Sprawdzić, że struktura algebraiczna $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, jest ciałem.
   (b) (1 pkt.) Uzasadnić dlaczego struktura $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ nie będzie ciałem.

3. Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{U : U \subset \mathbb{N}\}$ (to jest zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, przy czym przyjmujemy $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) wraz z relacją inkluzji $\subset$. Niech ponadto
$$A = \{1, 3\}, \;\; B = \{1, 3, 4\}, \;\; C = \{2, 3\}$$
$$D = \{1\}, \;\; E = \{1, 2, 3, 4\}, \;\; F = \{3, 4\},$$
   oraz $X = \{A, B, C, D, E\}$.
   (a) (3 pkt.) Wykazać, że relacja $\subset$ porządkuje zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (sprawdzić czy jest to porzadek silny, czy słaby). Czy jest to porządek liniowy?
   (b) (5 pkt.) Wskazać elementy wyróżnione (elementy: minimalny, maksymalny, najmniejszy, największy oraz kresy) zbioru X ze względu na relację $\subset$.
   (c) (2 pkt.) Znaleźć najdłuższy łańcuch w zbiorze X.

4. (10 pkt.) Zilustrować na płaszczyźnie zbiór
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\overline{z} + 2 - i)^4 > 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| < 1\}.$$

5. (10 pkt.) Znaleźć wszystkie rozwiązania z równania
$$z^7 - (8 - i)z^4 - 8iz = 0.$$
   Rozwiązania podać w postaci algebraicznej.