Układy współrzędnych krzywoliniowych

Materiały i zadania dostępne na stronie `http://newton.fis.agh.edu.pl/~wiendlocha/`

Przydatne

Wersory będą oznaczane jako $\vec{e_i}$ lub przez umieszczenie daszka '^' nad literą, np. $\hat{x}$.
Konwencja sumowania Einsteina – jeśli w danym wyrazie powtarzają się dwa jednakowe wskaźniki, to zapis ten oznacza konieczność wykonania sumy względem powtórzonego wskaźnika, np. iloczyn skalarny dwóch wektorów zapisanych w układzie kartezjańskim: $i = 1, 2, 3$ (x, y, z)

$$\vec{a}\vec{b} = \sum_i a_i b_i \equiv a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1}$$

Symbol Levi-Civity – często przy rachunkach na operatorach różniczkowych wygodnie jest posługiwać się antysymetrycznym symbolem ϵ_{ijk} (zwanym symbolem Levi-Civity), o własnościach:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i = j \text{ lub } j = k \text{ lub } k = i \\ 1 & \text{gdy } (i, j, k) \text{ to permutacja parzysta } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{gdy } (i, j, k) \text{ to permutacja nieparzysta } (1, 2, 3) \end{cases} . \tag{2}$$

Przy użyciu ϵ_{ijk} można zapisać np. skrętność układu współrzędnych. Układ jest prawoskrętny, gdy $\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z}$, w ogólności:

$$\vec{e_i} \times \vec{e_j} = \epsilon_{ijk} \vec{e_k}. \tag{3}$$

Symbol ϵ_{ijk} pozwala uprościć zapis iloczynu wektorowego:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk}\, \vec{e_i} a_j b_k \tag{4}$$

i jest wygodny np. do udowadniania relacji typu $rot(rot\, \vec{a}) = \ldots$. Wiąże się on również z deltą Kroneckera:

$$\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{jl}\, \delta_{im} \tag{5}$$

(zastosowano konwencję o sumowaniu).

Operatory różniczkowe – układ kartezjański (x,y,z)

Operatory gradientu, dywergencji, rotacji i laplasjan. Najłatwiej zapisać przy pomocy operatora 'nabla' $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{6}$$

$$grad(U) = \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \tag{7}$$

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{8}$$

$$rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{10}$$

Prędkość i przyspieszenie – układ kartezjański (x,y,z)

Składowe wektorów prędkości i przyspieszenia w układzie kartezjańskim są równe odpowiednim pochodnym czasowym poszczególnych współrzędnych. Pochodną względem czasu oznaczać będziemy kropką nad symbolem.

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \tag{11}$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \tag{12}$$

Układ cylindryczny (ρ, φ, z)
Z układu cylindrycznego (walcowego) współrzędne transformują się według wzorów:

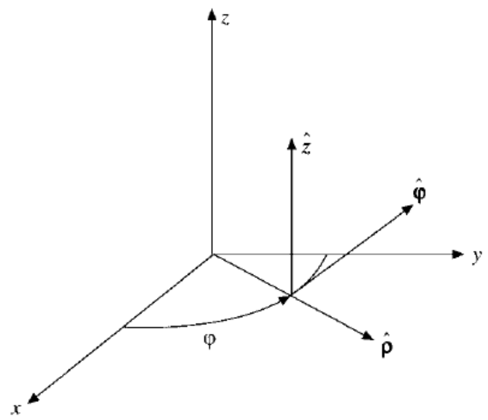
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi && (13)\\ y &= \rho\sin\varphi && (14)\\ z &= z. && (15)\end{aligned}$$

Jakobian transformacji wynosi ρ, element długości łuku $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. Wersory osi pokazane są na poniższym rysunku, a ich związek z wersorami układu kartezjańskiego dany jest poprzez transformację:

$$\begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{16}$$

Z równania (16) widać, że oba układy współrzędnych łączy transformacja obrotu względem osi z. Wektor wodzący punktu (x,y,z) zapisać można jako $\vec{r} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$.

Rysunek 1: Układ współrzędnych walcowych



Operatory różniczkowe – układ cylindryczny

$$\begin{aligned}
grad(U) &= \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) && (17)\\
div(\vec{E}) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(rE_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}E_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}E_z && (18)\\
rot(\vec{E}) &= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\varphi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix} && (19)\\
\Delta U &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}U\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}U + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U && (20)
\end{aligned}$$

Gdy z jest ustalone (np. $z = 0$) układ cylindryczny redukuje się do układu biegunowego.
Prędkość i przyspieszenie – układ cylindryczny
Przy pomocy różniczkowania odpowiednich wersorów układu (których kierunki tutaj zależą od czasu), uzyskujemy wzory na radialną, transwersalną (kątową) i osiową składową prędkości i przyspieszenia:

$$\begin{matrix} v_\rho = \dot\rho & v_\varphi = \rho\dot\varphi & v_z = \dot z \\ a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 & a_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi & a_z = \ddot z \end{matrix} \tag{21}$$

Układ sferyczny (r, θ, φ)
Z układu sferycznego współrzędne transformują się według wzorów:

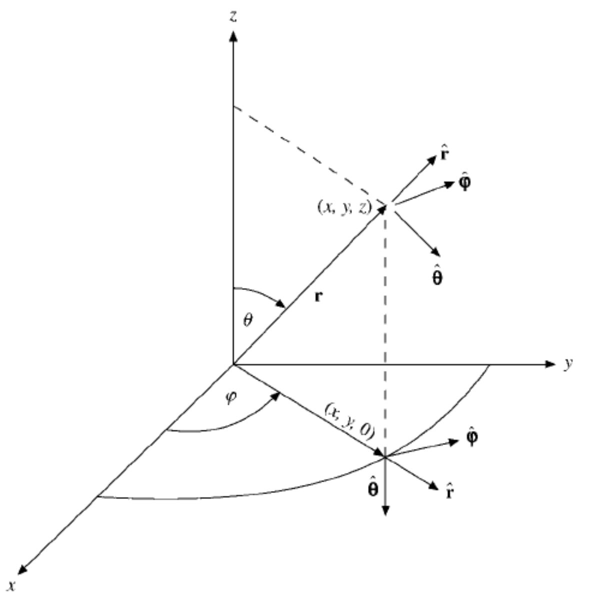
$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\theta && (22)\\
y &= r\sin\varphi\sin\theta && (23)\\
z &= r\cos\theta && (24)
\end{aligned}
$$

Jakobian transformacji wynosi $r^2\sin\theta$, element długości łuku $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$. Wersory osi pokazane są na poniższym rysunku, a ich związek z wersorami układu kartezjańskiego dany jest poprzez transformację:

$$
\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{25}
$$

Wektor wodzący punktu (x,y,z) zapisać można jako $\vec{r} = r\vec{e_r}$.

Rysunek 2: Układ współrzędnych sferycznych, dla $\theta = \pi/2$ redukuje się do biegunowego.



Operatory różniczkowe – układ sferyczny

$$
\begin{aligned}
grad(U) &= \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) && (26)\\
div(\vec{E}) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}E_\varphi && (27)\\
rot(\vec{E}) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & r\sin\theta e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ E_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\varphi \end{vmatrix} && (28)\\
\Delta U &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}U\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}U\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}U && (29)
\end{aligned}
$$

Prędkość i przyspieszenie – układ sferyczny
Prędkość i przyspieszenie w układzie sferycznym mają składowe:

$$
\begin{array}{lll}
v_r = \dot{r} & v_\theta = r\dot{\theta} & v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} \\
a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 & a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 & a_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})
\end{array} \tag{30}
$$