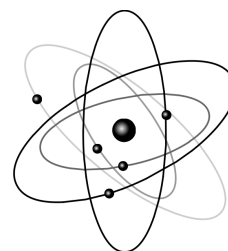




AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE



Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

SKRYPT

Podstawy fizyki I

WERSJA NIEAUTORYZOWANA

Radosław Strzałka

Kraków, styczeń 2025



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Spis treści

Przedmowa	6
1. Wprowadzenie matematyczne	8
1.1. Układy równań	8
1.2. Pochodna funkcji	10
1.3. Rachunek wektorowy	13
1.4. Rachunek całkowy*	18
1.4.1. Całka nieoznaczona	18
1.4.2. Metody całkowania	19
1.4.3. Całka oznaczona	21
2. Kinematyka	25
2.1. Podstawowe pojęcia	25
2.2. Równania położenia	30
2.3. Rzuty	33
2.3.1. Spadek swobodny	33
2.3.2. Rzut pionowy do góry	35
2.3.3. Rzut pionowy w dół	38
2.3.4. Rzut poziomy	38
2.3.5. Rzut ukośny	41
2.4. Ruch po okręgu	43
3. Dynamika	46
3.1. Zasady dynamiki	46
3.2. Równia pochyła	47
3.3. Układ ciał połączonych linami	49
3.4. Ważne przykłady sił	51
3.4.1. Siła tarcia	51
3.4.2. Siła dośrodkowa	55
3.4.3. Siła oporu	56
3.5. Układy nieinercjalne. Siła bezwładności	58
3.6. Dynamika bryły sztywnej	62
3.6.1. Moment bezwładności	62
3.6.2. Moment siły	64
3.6.3. II zasada dynamiki dla bryły sztywnej	64
3.6.4. Toczenie	66
3.6.5. Statyka bryły sztywnej	68

3.7.	Zasada zachowania pędu	72
3.7.1.	Odrzut	72
3.7.2.	Zderzenie niesprężyste	73
3.7.3.	Zderzenie sprężyste	74
3.7.4.	Zderzenie w dwóch wymiarach	74
3.7.5.	Wahadło balistyczne	75
3.7.6.	Rozpad pocisku	76
3.8.	Zasada zachowania momentu pędu	78
3.9.	Ruch układu o zmiennej masie*	79
4.	Praca, moc, energia	86
4.1.	Podstawowe definicje	86
4.2.	Zasada zachowania energii	89
5.	Grawitacja	94
5.1.	Prawo powszechnego ciążenia	94
5.2.	Prędkości kosmiczne, satelity	97
5.2.1.	I prędkość kosmiczna	97
5.2.2.	II prędkość kosmiczna	97
5.2.3.	Satelita geostacjonarny	98
5.3.	Prawa Keplera	101
6.	Ruch harmoniczny	104
6.1.	Siła i energia sprężystości	104
6.2.	Oscylator harmoniczny	106
6.2.1.	Energia oscylatora	109
6.2.2.	Składanie drgań	111
6.2.3.	Oscylator tłumiony	114
6.2.4.	Oscylator wymuszony. Rezonans mechaniczny	115
6.3.	Wahadło matematyczne	119
6.4.	Wahadło fizyczne	120
7.	Fale mechaniczne	124
7.1.	Podstawowe pojęcia	124
7.2.	Fala w napiętej strunie	126
7.3.	Fala dźwiękowa, prędkość dźwięku	127
7.3.1.	Efekt Dopplera	130
7.3.2.	Parametry dźwięku	131
7.4.	Energia, moc i natężenie fali	133
7.4.1.	Moc fali biegnącej w strunie	133
7.4.2.	Energia i moc średnia fali w dowolnym ośrodku sprężystym	133
7.4.3.	Natężenie fali	134
7.4.4.	Poziom natężenia dźwięku	134
7.5.	Interferencja fal	135
7.5.1.	Fala płaska, dyfrakcja, zasada Huyghensa	136
7.5.2.	Fala stojąca	137
7.5.3.	Rezonans akustyczny	137

8. Hydrostatyka i hydrodynamika	143
8.1. Podstawowe pojęcia	143
8.2. Prawo Archimedesesa	145
8.3. Elementy hydrodynamiki	147
8.3.1. Prawo ciągłości strugi	148
8.3.2. Prawo Bernoulliego	148
8.3.3. Siła oporu	149
9. Termodynamika	154
9.1. Temperatura i ciepło. Podstawowe pojęcia	154
9.1.1. Rozszerzalność cieplna	158
9.2. I zasada termodynamiki	159
9.3. Równanie stanu gazu, przemiany	160
9.3.1. Przemiana izobaryczna	161
9.3.2. Przemiana izochoryczna	161
9.3.3. Przemiana izotermiczna	162
9.3.4. Przemiana adiabatyczna	162
9.4. Cykl termodynamiczny	166
9.5. Entropia	170
9.5.1. II zasada termodynamiki	171
9.6. Teoria kinetyczna gazów*	173
10. Szczególna Teoria Względności	178
10.1. Relatywistyczny czynnik Lorentza	179
10.1.1. Masa relatywistyczna i pęd relatywistyczny	179
10.2. Energia relatywistyczna	181
10.2.1. Niezmiennik relatywistyczny	183
10.3. Transformacja Lorentza	185
10.3.1. Relatywistyczny efekt Dopplera	188
10.3.2. Relatywistyczne składanie prędkości	189
10.3.3. Relatywistyczna transformacja przyśpieszenia*	190
10.4. Efekty relatywistyczne	191
10.4.1. Dylatacja czasu	191
10.4.2. Kontrakcja długości	192
10.4.3. Relatywistyczne zwężenie wiązki promieniowania*	193
10.5. Elementy dynamiki relatywistycznej*	196
10.5.1. Siła relatywistyczna	196
10.5.2. Relatywistyczna energia kinetyczna	197
Bibliografia	198

Przedmowa

Niniejszy skrypt został opracowany w oparciu o program ćwiczeń audytoryjnych dla kierunku Geodezja i Kartografia WGGiIŚ oraz zajęć wyrównawczych z fizyki dla kierunku Technologia Chemiczna WIMiC AGH w Krakowie i ma służyć uczestnikom tych zajęć w przygotowaniu się do zaliczenia przedmiotu „Fizyka I” lub analogicznych. Chociaż skrypt jest adresowany w pierwszej kolejności do studentów GiK, jego materiał jest odpowiedni także dla studentów pozostałych kierunków i wydziałów AGH. Autorem skryptu jest dr inż. Radosław Strzałka, a recenzentami prof. dr hab. inż. Andrzej Baczyński (rozdziały 1-4) oraz prof. dr hab. Janusz Wolny (rozdziały 1-6,8-9), pracownicy WFiIS AGH.

Materiał skryptu został podzielony na osiem głównych Rozdziałów, w których kolejno opracowane są następujące działy:

- Podstawy matematyczne, szczególnie pomocne w nauce i rozumieniu podstaw fizyki
- Kinematyka
- Dynamika, w tym także dynamika bryły sztywnej
- Praca, moc i energia
- Grawitacja
- Ruch harmoniczny
- Fale mechaniczne
- Hydrostatyka i hydrodynamika
- Termodynamika
- Szczególna Teoria Względności

Niektóre podrozdziały zostały oznaczone gwiazdką (*) i jako nieco trudniejsze, lub nie niezbędne dla zrozumienia dalszych części skryptu, mogą zostać początkowo pominięte.

Omawiane przykłady i zadania w większości pochodzą z programu zajęć audytoryjnych dla Geodezji i Kartografii WGGiIŚ AGH, prowadzonych przez R. Strzałkę. Zbiór zadań jest nieco poszerzony, co ma pozwolić studentowi na samodzielne sprawdzenie własnych umiejętności. Część problemów i zadań jest autorstwa R. Strzałki. Wszystkie rysunki są autorstwa R. Strzałki.

Autorzy mają nadzieję, że skrypt spełni swoją rolę i będzie pomocny w przyswojeniu wiedzy z podstaw fizyki. W przypadku wszelkich uwag (merytorycznych, redakcyjnych itp.) autorzy proszą o kontakt:

dr inż. Radosław Strzałka
strzalka@fis.agh.edu.pl
Tel. (12) 617 - 41 -51
Pok. 315 paw. D-10

17.03.2020

Rozdział 1.

Wprowadzenie matematyczne

W pierwszym rozdziale przedstawiamy podstawowe informacje dotyczące narzędzi matematycznych niezbędnych do dalszych rozważań fizycznych. Definiujemy pojęcie pochodnej funkcji, prezentujemy jej graficzną interpretację i zastosowania, a następnie wprowadzamy podstawy rachunku wektorowego. Jako uzupełnienie, przy pierwszej kontakcie do pominięcia przez Czytelnika, omawiamy podstawy rachunku całkowego.

1.1. Układy równań

Układem dwóch równań na dwie niewiadome x i y nazywamy parę równań, w których zmienne x i y występują jednocześnie, np.:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad (1.1.)$$

Powyższe równanie należy dodatkowo nazwać układem równań *liniowych*, gdyż zmienne x i y występują w pierwszych potęgach.

Metod rozwiązywania układów równań jest przynajmniej kilka, np. powyższe równanie (1.1.) można by rozwiązać wyznaczając x z pierwszego równania i podstawiając do drugiego. W ten sposób otrzymamy jedno równanie na jedną niewiadomą y . Mając y wykorzystujemy którekolwiek z równań układu (1.1.) do znalezienia x .

Można też pomnożyć obie strony drugiego równania przez 2 i dodać równania stronami. Wtedy wyeliminujemy zmienną y i dostaniemy równanie $7x = 14$, z którego $x = 2$. Znowu, wstawiając obliczone x do któregoś z równań (1.1.) dostaniemy y . Tak na marginesie, rozwiązaniem układu (1.1.) jest para $x = y = 2$.

Nie jest naszym celem ćwiczenie rozwiązywania układów równań. Chcemy zwrócić uwagę na to, że nie każde równanie warto rozwiązywać jedną z dwóch powyższych metod (nie każde się też da w ten sposób rozwiązać). Tak jest np. z równaniem:

$$\begin{cases} y = x^2 - 16 \\ 3y - 2x = 8 \end{cases} \quad (1.2.)$$

Wstawiając bezpośrednio y z pierwszego do drugiego równania otrzymamy równanie kwadratowe, które oczywiście potrafimy rozwiązać, ale jest to dość czasochłonne. Można zauważyć, że przenosząc w drugim równaniu $2x$ na drugą stronę znaku równości dostaniemy $2x+8$, czyli $2(x+4)$. Z kolei wyrażenie x^2-16 w pierwszym równaniu możemy rozłożyć na $(x-4)(x+4)$ korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{cases} y = (x-4)(x+4) \\ 3y = 2(x+4) \end{cases} \quad (1.3.)$$

Jeśli teraz podzielimy stronami te równania (np. pierwsze przez drugie), to bardzo prosto dostaniemy $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x-4)$, a stąd już $x = \frac{14}{3}$. Ale przecież równanie kwadratowe, którego nie chcieliśmy rozwiązywać ma w ogólności 2 rozwiązania - my dostaliśmy jedno? Należy pamiętać, że dzieląc równania stronami, gdy wyrażenie $(x+4)$ uprościło się, założyliśmy po cichu, że jest ono jednocześnie różne od zera. Także dzieląc przez y przyjęliśmy $y \neq 0$. W tym założeniu tkwi klucz do znalezienia drugiego rozwiązania. Jeśli $x+4=0$, czyli $x=-4$, to oba równania układu (1.2.) są także spełnione (dostajemy $y=0$ z pierwszego i $3y=0$ z drugiego).

UWAGA! Należy pamiętać, że równanie kwadratowe (także będące jednym z równań układu) może mieć 2 rozwiązania.

UWAGA 2! Generalnie, często warto szukać wzoru skróconego mnożenia w równaniach.

Na koniec zastanowimy się nad rozwiązaniem układu równań, mającego fizyczny sens:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1.4.)$$

Tym razem x, y są znanymi liczbami (np. 7 i 15), a szukanymi są r i φ . Aby w najprostszy sposób znaleźć φ wystarczy podzielić równania stronami. Dostaniemy wtedy $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, co jednoznacznie definiuje nam φ . Aby znaleźć r dodamy oba równania, podniesione wcześniej stronami do kwadratu. Dostaniemy wówczas: $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi$, co przy zauważeniu jedynki trygonometrycznej da nam $r^2 = x^2 + y^2$.

Jak wspomnieliśmy, równanie (1.4.) ma znaczenie fizyczne - wyraża bowiem zależność położenia (x, y) punktu materialnego od promienia r i kąta obrotu φ w ruchu po okręgu. Równania te jednocześnie wiążą kartezjański układ współrzędnych z układem biegunowym (zwanym też polarnym), często wykorzystywanym w fizyce.

Zadania

Rozwiąż układy równań dwóch lub trzech zmiennych.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 6y = 2x^2 - 18 \\ y - 2 = x + 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + 13 = 2y \\ 3x = 2 - y \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x^2 - 4x = y + \frac{2}{3} \\ 2x - 1 = -3y \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 7a = 3 - 4b \\ 2a = 4b - 5c + 1 \\ a = 2 + 5c \end{cases} & \end{array}$$

1.2. Pochodna funkcji

Matematycy definiują pojęcie pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_0$ jako granicę ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.5.)$$

Najczęściej oznaczamy pochodną na dwa sposoby: $f'(x)$ (czyt.: f prim od x) lub $\frac{df}{dx}$ (czyt.: de f po de x). Dla konkretnej funkcji, np. $x^2 - 1$, napiszemy: $(x^2 - 1)'$.

W tym zawiłym wzorze występuje przynajmniej kilka znaków zapytania. Przede wszystkim, co to jest *granica funkcji*? Możemy sobie wyobrazić, że wędrujemy wzdłuż jakiejś krzywej (będącej wykresem jakiejś funkcji) - od dowolnego punktu $(x, f(x))$ do wybranego punktu $(x_0, f(x_0))$. Szukanie granicy funkcji w punkcie x_0 jest właśnie tym zbliżaniem się wzdłuż krzywej nieskończenie blisko punktu $(x_0, f(x_0))$. Obliczanie granicy w punkcie praktycznie sprowadza się do obliczania wartości funkcji w tym punkcie. Należy jednak pamiętać, że to nie to samo - funkcja może nie mieć wartości w punkcie $x = x_0$ (bo jest np. nieciągła w tym punkcie), ale granica w tym punkcie może istnieć. Dla przykładu, zastanówmy się nad granicą funkcji tangens w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (pamiętamy jak wygląda jej wykres). Wędrując wzdłuż tangensoidy np. od początku układu współrzędnych do punktu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ widzimy, że wykres zmierza asymptotycznie do nieskończoności. Zatem granica tangensa w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ wynosi: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x) = +\infty$. Granicę taką nazwiemy *niewłaściwą*. Jednocześnie punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ nie należy do dziedziny funkcji tangens.

Drugim nowym pojęciem jest zapewne *iloraz różnicowy*. Jest to po prostu iloraz dwóch różnic - w liczniku różnica wartości funkcji f w punktach x oraz x_0 , a w mianowniku różnica argumentów. Obliczanie granicy takiego ilorazu nie jest tak bezpośrednie jak w przypadku opisanym powyżej przy obliczaniu granicy funkcji. Zauważmy, że jeśli w ilorazie wprost wstawimy $x = x_0$, to dostaniemy wyrażenie $\frac{0}{0}$, które w matematyce nazywa się symbolem nieoznaczonym i nie ma sensu. Granicę ilorazu różnicowego liczy się sprytnie, tzn. należy odpowiednio przekształcać iloraz tak, by pozbyć się problemu z symbolem nieoznaczonym. Sposób obliczania granicy ilorazu różnicowego, czyli znajdowania pochodnej funkcji w punkcie, opiszemy na dwóch przykładach.

Należy jeszcze skomentować jedną rzecz. Wzór (1.5.) definiuje pochodną w punkcie x_0 , czyli $f'(x_0)$. Jest to liczba, np. $f'(x_0) = 5$. Mówimy też o pochodnej jako o funkcji pochodnej dowolnego argumentu x , czyli $f'(x)$. Definicja (1.5.) tak samo dobrze definiuje funkcję pochodną, bo x_0 w tej definicji jest zupełnie dowolne.

Przykłady

1. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ korzystając z definicji pochodnej.

$$f'(x_0) = (x^2)'|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

Zauważmy, że rzeczywiście kładąc $x = x_0$ dostaniemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$, co musimy jakoś obejść. Rozłóżmy różnicę kwadratów $x^2 - x_0^2$ na iloczyn $(x - x_0)(x + x_0)$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Ostatnie przejście to po prostu podstawienie $x = x_0$. Mogliśmy podzielić przez $(x - x_0)$, bo x nigdy nie jest równe x_0 (liczymy granicę!). Ponieważ punkt x_0 jest zupełnie dowolny (nic o nim nie zakładaliśmy), to możemy uogólnić wynik do dowolnego punktu x i powiedzieć, że pochodną funkcji $f(x) = x^2$ jest funkcja $f'(x) = 2x$.

2. Teraz znajdziemy pochodną funkcji $f(x) = \sin x$.

$$f'(x_0) = (\sin x)'|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \quad (1.6.)$$

Wykorzystamy teraz wzór trygonometryczny na różnicę sinusów: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x + x_0}{2} \quad (1.7.)$$

W ostatnim kroku przenieśliśmy „2” z licznika do mianownika. W ten sposób dostaliśmy wyrażenie typu: $\frac{\sin u}{u}$, co w granicy $u \rightarrow 0$ daje 1, zgodnie z pewnym matematycznym twierdzeniem. W naszym przypadku $u = \frac{x - x_0}{2}$ i rzeczywiście zdąża do zera, gdy $x \rightarrow x_0$. Skoro tak, to pozostaje nam jedynie obliczyć granicę z kosinusa, znajdującego się w (1.7.), co zrobimy po prostu podstawiając za x .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x + x_0}{2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}}_{\rightarrow 1} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos \frac{2x_0}{2} = \cos x_0 \quad (1.8.)$$

Pochodną funkcji sinus jest więc funkcja kosinus: $(\sin x)' = \cos x$.

Szukanie pochodnej funkcji przy użyciu definicji (1.5.) jest uciążliwe i nierzadko trudne. Dlatego chcąc obliczyć pochodną dowolnej funkcji, najczęściej korzystamy ze wzorów na pochodne funkcji podstawowych, takich jak wielomian, funkcje trygonometryczne, czy wykładnicze. Poniżej podajemy pochodne prostych funkcji, za pomocą których można znajdować pochodne także funkcji bardziej skomplikowanych. Należy jednak pamiętać, że każdy z tych wzorów został kiedyś przez kogoś wyprowadzony z definicji (1.5.), z czego my teraz korzystamy dla wygody. Dla kompletności podajemy też reguły, wg których należy liczyć pochodne dla wyrażeń zawierających kilka funkcji, w szczególności dla funkcji złożonych. W sekcji Przykłady poniżej pokażemy też jak stosować te wzory dla prostych przypadków.

Pochodne wyższych rzędów (np. drugą pochodną) liczymy jako pochodną pochodnej niższego rzędu (np. druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej itd.). Zapisujemy to tak (na przykładzie drugiej pochodnej):

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (1.9.)$$

(czyt.: f bis od x, de dwa f po de x kwadrat). W fizyce, dla oznaczenia pochodnej po czasie, używa się czasem specyficznej notacji z kropką. Np. $\dot{x}$ albo $\dot{x}(t)$ oznacza $\frac{dx}{dt}$, podobnie druga pochodna to $\ddot{x}$ itd.

Pochodne podstawowych funkcji

$f(x)$	c	$c \cdot g(x)$	x^α	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	$c \cdot g'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$\frac{1}{x}$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Tabela 1.1.: Pochodne podstawowych funkcji i prostych operacji na dwóch funkcjach.

Przykłady

3. $(3 + x^5)' = 5x^4$
4. $\left(\frac{1}{2} \sin x\right)' = \frac{1}{2} \cos x$
5. $(3x^2 \cos x)' = 2 \cdot 3x \cos x + 3x^2(-\sin x) = 6x \cos x - 3x^2 \sin x$
6. $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 2 \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$ albo $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = (2x^{-2})' = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$
7. $[(5 - x^3)^2]' = 2(5 - x^3) \cdot (-x^3)' = 2(5 - x^3) \cdot (-3x^2) = -6x^2(5 - x^3)$
8. $(3 \cos(x^2 - 1))' = -3 \sin(x^2 - 1) \cdot 2x = -6x \sin(x^2 - 1)$

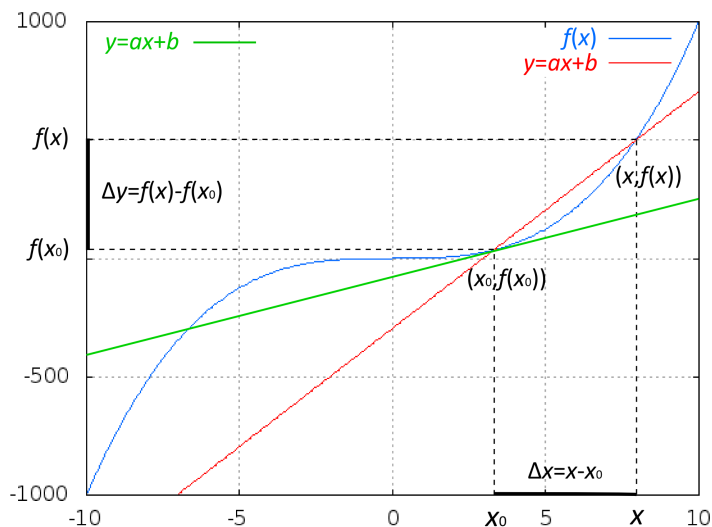
Interpretacja geometryczna

Teraz zastanowimy się nad geometryczną interpretacją pochodnej funkcji. Jeśli spojrzymy na Rysunek 1.1. to łatwo odgadniemy interpretację ilorazu różnicowego. $f(x) - f(x_0)$ jest długością pionowego odcinka Δy , natomiast $x - x_0$ jest długością poziomego odcinka Δx . Stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest tangensem kąta oznaczonego jako α , a ten z kolei jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej oznaczonej kolorem czerwonym.

Iloraz różnicowy jest więc współczynnikiem kierunkowym stycznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x, f(x))$. Pamiętamy, że granica ilorazu różnicowego przy $x \rightarrow x_0$ jest pochodną funkcji w punkcie x_0 . Jeśli zbliżymy się z punktem $(x, f(x))$ nieskończenie blisko punktu $(x_0, f(x_0))$, tak jak każe nam granica przy $x \rightarrow x_0$, to styczna (kolor czerwony) stanie się styczną (kolor zielony) w punkcie x_0 . Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie x_0 jest więc taka:

Pochodna $f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej w punkcie x_0 do krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)$.

Ciekawy wniosek wypływa z warunku zerowania się pochodnej w danym punkcie. Odpowiada to sytuacji, gdy parametr kierunkowy stycznej jest równy 0, a więc styczna jest funkcją stałą. Ta sytuacja z kolei oznacza, że funkcja ma w tym punkcie tzw. *lokalne ekstremum* - tzn. minimum bądź maksimum. O ekstremum lokalnym można myśleć jak o wartości najmniejszej bądź największej funkcji w pewnym małym zakresie argumentów. Jeśli więc będzie nas interesowało znalezienie argumentu, dla którego dana funkcja ma lokalne minimum lub maksimum, wystarczy, że przyrównamy pochodną tej funkcji do zera i z tego warunku obliczymy argument x . Jest to tzw. warunek konieczny występowania ekstremum.



Rysunek 1.1.: Ilustracja interpretacji graficznej siecznej i pochodnej.

Zadania

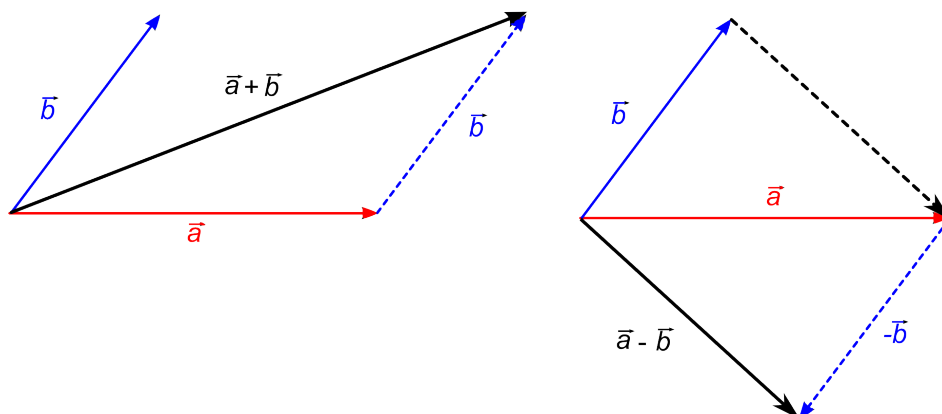
- Korzystając z definicji pochodnej (1.5.), oblicz pochodną funkcji $f(x) = 1/x^2$ oraz $g(x) = \cos x$. Dla ambitniejszych: $h(x) = x^n$.
- Korzystając ze wzorów na pochodne podstawowych funkcji, oblicz:
 $(x^6 - 3x + 2)'$, $(\sin x - \frac{1}{x})'$, $[(1 - x)e^x]'$, $(\ln x + 3 \cos x)'$, $\left(\frac{x^3 e^{-x^2}}{x-1}\right)'$
- Proszę znaleźć równanie prostej stycznej do krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = 3 + 2x^2 + x^3$ w dwóch przypadkach: w punkcie $x_0 = 1$ oraz punkcie $x_0 = 0$.
Uwaga. Do znalezienia wyrazu wolnego 'b' w równaniu prostej trzeba wykorzystać fakt, że punkt $(x_0, f(x_0))$ należy zarówno do krzywej, jak i stycznej.

1.3. Elementy rachunku wektorowego

Rachunek wektorowy jest działem matematyki bardzo potrzebnym fizyce. Wiele wielkości fizycznych jest wektorem (np. prędkość czy siła), wobec tego trzeba znać elementy rachunku wektorowego, aby dobrze rozumieć ich opis.

Wektor jest pojęciem matematycznym, który można definiować z różnym stopniem trudności. Najprościej można powiedzieć, że jest to odcinek zorientowany w przestrzeni (prościej: strzałka), do którego opisu nie jest potrzebny układ odniesienia czy współrzędnych. Żyje własnym życiem. Matematycy nazywają taki wektor swobodnym, jego początek można zaczepić gdziekolwiek. W oparciu o taką definicję można wprowadzić technikę dodawania lub odejmowania wektorów bazującą na metodzie równoległoboku (Rysunek 1.2.). Suma dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest również wektorem, którego początek znajduje się w początku wektora $\vec{a}$ (pierwszego), a koniec w końcu wektora $\vec{b}$ (drugiego). Na Rysunku 1.2. widać, że taka konstrukcja jest równoważna znajdowaniu dłuższej przekątnej równoległoboku zbudowanego przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Podobnie definiujemy różnicę wektorów $\vec{a} - \vec{b}$: jest to suma wektora $\vec{a}$ i wektora $-\vec{b}$. Z Rysunku 1.2. wynika z kolei, że taka konstrukcja jest równoważna znajdowaniu krótszej przekątnej równoległoboku. W obu przypadkach - sumy i różnicy - wektor

traktujemy jak swobodny.



Rysunek 1.2.: Geometryczne dodawanie i odejmowanie wektorów.

W fizyce jednak, wektory nie są swobodne. Mają 4 cechy (dobrze znane ze szkoły):

- kierunek
- zwrot
- punkt przyłożenia
- długość

Pierwsze dwie cechy (kierunek i zwrot) są dość oczywiste, choć w mowie potocznej często mylone. Kierunek jest prostą, na której leży wektor, natomiast zwrot jest orientacją wektora wzdłuż kierunku (np. w lewo lub prawo). Ważne jest to, że wektor w fizyce jest zaczepiony do ciała, obiektu, punktu itd. Nie jest swobodny. I tak np. chcąc na schemacie zaznaczyć wektor siły ciężkości, z jaką Ziemia przyciąga masę, wektor oznaczający siłę ciężkości zaczepiamy w środku tej masy. Czasem zdarza się, że rysujemy na schematach sam wektor (bez punktu przyłożenia) - np. przyspieszenie ziemskie $\vec{g}$ w przypadku zadań z rzutami. Dajemy wtedy do zrozumienia, że omawiamy ruch ciała *w polu działania przyciągania ziemskiego*, a więc każde ciało odczuwa przyspieszenie $\vec{g}$, w szczególności to, którym się zajmujemy. Oczywiście wektor $\vec{g}$ też ma punkt przyłożenia - w każdym poruszającym się w polu ziemskim ciele - czego wyraźnie nie zaznaczamy.

Długość wektora (zwana też wartością) jest już ściśle powiązana z wyborem układu współrzędnych, jaki wybierzemy. Inna będzie długość wyrażona w jednostkach '1cm', a inna w jednostkach '2mm'. Np. metrowy sznurek mierzy 100 jednostek pierwszych ('1cm'), a 500 jednostek drugich ('2mm').

Skoro już wspomnieliśmy o wyborze układu współrzędnych, to wprowadźmy matematyczny opis wektora jako zestaw liczb określających jego współrzędne. Dla prostoty zajmijmy się wektorami na płaszczyźnie, co łatwo uogólnimy na trzy wymiary, i wybierzemy kartezjański układ współrzędnych. W ogólnym przypadku możemy sobie wyobrazić, że zarówno początek jak i koniec wektora są punktami, które mają jakieś współrzędne - np. wektor $\overrightarrow{AB}$ ma początek w punkcie $A = [x_A, y_A]$ i koniec w punkcie $B = [x_B, y_B]$. Liczby w nawiasie kwadratowym oznaczają współrzędne punktów na płaszczyźnie (stosuje się także nawias okrągły). Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ obliczymy następująco:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] \quad (1.10.)$$

Układ odniesienia możemy wybrać dowolnie, w szczególności tak, żeby jego początek znajdował się w początku wektora $\vec{AB}$, wtedy, jak każdy łatwo zauważy, punkt A otrzymuje współrzędne $[0,0]$, a wektor $\vec{AB} = [x_B, y_B]$.

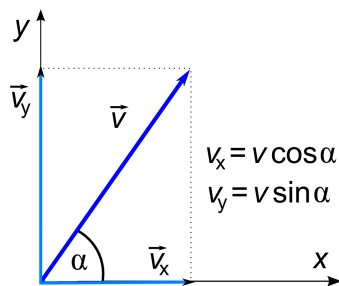
Długość wektora $\vec{a} = [a_x, a_y]$ możemy obliczyć z tw. Pitagorasa:

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1.11.)$$

W tym miejscu chcemy omówić bardzo ważną z punktu widzenia dalszej części opracowania kwestię. Mianowicie rozkład wektora na składowe. Tak jak wspominaliśmy, układ odniesienia może być wybrany dowolnie - najlepiej tak, żeby był dla nas wygodny. Jeśli wektor jest w tym układzie zorientowany pod jakimś kątem do osi, to najczęściej, aby opis zagadnienia był wygodny, znajdujemy jego składowe. Dotyczy to np. takich problemów jak rzut poziomy czy ukośny lub ruch na równi pochyłej.

Rozkład na składowe nie jest niczym nowym, opiera się po prostu na definicji funkcji trygonometrycznych, szczególnie sinus i kosinus. Rysunek 1.3. definiuje dwie składowe wektora $\vec{v}$ (np. prędkości) poprzez sinus i kosinus kąta między tym wektorem a osią poziomą. Czasem, przez nieuwagę lub zawilóści rysunku/zadania, znajdowanie składowych może stanowić problem, dlatego proponujemy prostą, „szkolną” regułę, przypominającą jak rozkład przeprowadzić:

*Składowa wektora przy kącie jest związana funkcją kosinus,
składowa naprzeciw kąta - funkcją sinus.*



Rysunek 1.3.: Ilustracja rozkładu wektora na składowe.

Iloczyn skalarny

Znamy dwa rodzaje mnożenia wektorów. Pierwszy - iloczyn skalarny - jest w efekcie liczbą (skalarem). Aby znaleźć iloczyn skalarny dwóch wektorów, znając ich współrzędne, wystarczy, że wykonamy sumę iloczynów odpowiednich współrzędnych:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \circ [b_x, b_y, b_z] = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.12.)$$

Jeśli znamy długości wektorów oraz kąt α pomiędzy nimi, wtedy stosujemy taki wzór:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \alpha \quad (1.13.)$$

W oparciu o wzór (1.13.) definiuje się także kąt pomiędzy wektorami. Ważną „funkcją” iloczynu skalarnego jest detekcja wektorów prostopadłych. Zgodnie z (1.13.) iloczyn skalarny takich wektorów jest 0, bo $\cos \alpha = 0$. Zatem

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (1.14.)$$

Iloczyn skalarny ma oczywiście zastosowania w fizyce - najprostszym przykładem jest tu definicja pracy jako iloczyn skalarny siły działającej na ciało i wektora przemieszczenia ciała: $W = \vec{F} \circ \Delta \vec{r}$. Wszelkiego rodzaju strumienie (np. przepływającej cieczy lub prądu elektrycznego) są także wyrażone przez iloczyny skalarne (ściślej: całki powierzchniowe, które w swojej strukturze mają iloczyn skalarny).

Iloczyn skalarny daje także informację o rzucie prostokątnym jednego wektora na drugi. Zauważmy, że składowa równoległa wektora $\vec{b}$ mierzona wzdłuż wektora $\vec{a}$ ma długość $b \cos \alpha$ (oznaczymy ją przez b_a) - wynika to z prostego rozkładu wektora na składowe w wybranej bazie. Przyjmujemy, że kąt między wektorami wynosi α . Przekształcając wzór (1.13.) mamy:

$$b_a = b \cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a} \quad (1.15.)$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów podzielony przez długość jednego z nich jest długością rzutu prostokątnego wektora drugiego na pierwszy. Taka interpretacja iloczynu skalarnego dotyczy nie tylko prostych wektorów, ale także funkcji wektorowych, co jest przedmiotem bardziej zaawansowanych działów analizy matematycznej i ma zastosowanie np. w mechanice kwantowej.

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dwóch wektorów jest również wektorem o następujących cechach: jest on prostopadły zarówno do wektora $\vec{a}$, jak i $\vec{b}$, ma zwrot wynikający z reguły prawej dłoni (śruby prawoskrętnej), a jego wartość zdefiniowana jest wzorem:

$$c \equiv |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \alpha \quad (1.16.)$$

gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Jeśli znamy współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to współrzędnych wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ szukamy obliczając wyznacznik zbudowany z odpowiednich wierszy: w pierwszym ustawiamy wersory osi, w drugim współrzędne wektora $\vec{a}$, a w ostatnim współrzędne wektora $\vec{b}$. Wyznacznik obliczamy zgodnie z algebrą macierzową.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z} \quad (1.17.)$$

W powyższym wzorze pojawiły się symbole $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ - są to tzw. *wersory* osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Wersorem nazywamy bezwymiarowy wektor, którego długość jest równa 1 (czyli $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$).

Poprzez iloczyn wektorowy definiujemy wszelkie momenty w fizyce - np. moment siły ($\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$) lub moment pędu ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$), a także np. związek prędkości liniowej i kątowej ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), lub związek przyspieszenia stycznego i kątowego ($\vec{a}_s = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$). Jest to więc bardzo przydatny w fizyce element rachunku wektorowego.

Iloczyn wektorowy interpretujemy czasem jako zorientowane pole powierzchni rozpiętej między dwoma wektorami. Pamięamy prostą definicję pola powierzchni równoległoboku o bokach a i b , między którymi występuje kąt α : $P = ab \sin \alpha$. To pole to nic innego jak długość iloczynu wektorowego, $|\vec{a} \times \vec{b}|$, zgodnie z definicją (1.16.). Powierzchnię obszaru (niekoniecznie płaskiego) możemy traktować wektorowo (w ramach bardziej zaawansowanych rozważań

analizy matematycznej), dlatego mówimy, że obszar może być zorientowany - iloczyn wektorowy zależy od kolejności wektorów. W efekcie zorientowane pole powierzchni, $\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}$, może być dodatnie lub ujemne, w zależności od kolejności wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany to iloczyn trzech wektorów w postaci:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (1.18.)$$

Jest on oczywiście liczbą (skalarem), ze względu na iloczyn skalarny jako działanie zewnętrzne w powyższym wyrażeniu. Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego jest taka, że jest to objętość graniastosłupa rozpiętego przez wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Przykłady

1. Mamy trzy wektory $\vec{a} = [0, -3, 1]$, $\vec{b} = [1, 2, -1]$, $\vec{c} = [-2, 2, 6]$. Sprawdźmy, czy są wśród nich pary wektorów prostopadłych.

Wiemy, że kąt między wektorami prostopadłymi jest prosty, a jego kosinus jest 0. Skorzystamy więc z faktu, że iloczyn skalarny wektorów prostopadłych zdefiniowany wzorem (1.13.) musi wynosić 0. Do obliczenia tego iloczynu, wykorzystamy z kolei wzór (1.12.), ponieważ znamy współrzędne wektorów.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -7$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{c} = -4$$

Widzimy więc, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$ są prostopadłe.

Teraz znajdziemy iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$ wg wzoru (1.17.):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3 - 2)\hat{x} + (1 - 0)\hat{y} + (0 + 3)\hat{z} = [1, 1, 3]$$

Na koniec obliczmy iloczyn mieszany $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$.

$$\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = [-2, 2, 6] \circ [1, 1, 3] = 18$$

Przypomnijmy, że w ten sposób obliczyliśmy objętość graniastosłupa zbudowanego przez te trzy wektory. Przy okazji zastanówmy się jak rozumieć ew. ujemny wynik iloczynu mieszanego (może taki przecież być). Oznacza to tylko tyle, że wektory w iloczynie wektorowym są zamienione miejscami, tak że tworzą lewoskrętny układ (zamiast prawoskrętnego używanego przez nas). Wynik obliczenia objętości będzie więc modulem ujemnej liczby, którą otrzymaliśmy.

Zadania

1. Znajdź pary wektorów prostopadłych spośród trójki: $\vec{a} = [1, 0, -3]$, $\vec{b} = [4, -2, 2]$, $\vec{c} = [3, 2, 1]$. Jakie są kąty pomiędzy wszystkimi parami wektorów? Ile wynosi objętość graniastosłupa zbudowanego przez te wektory?

2. Mamy parę wektorów $\vec{u} = [m, 0, n]$, $\vec{v} = [1, 2, -1]$, gdzie m, n są nieznanymi parametrami. Wiedząc, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są do siebie prostopadłe, oraz że ich suma jest równoległa do osi x , oblicz m i n . *Wskazówka. O równoległości wektorów możemy wnioskować z wartości iloczynu wektorowego.*
3. Proszę wykazać, że objętość graniastosłupa zbudowanego przez trzy wektory jest dana przez ich iloczyn mieszany.

1.4. Elementy rachunku całkowego*

Nie jest naszą intencją, aby wyłożyć tutaj kompletną teorię rachunku całkowego, ani nawet podać precyzyjne definicje i twierdzenia. Tego wszystkiego Czytelnik dowie się na kursie Analizy matematycznej. Całki są jednak potrzebne w fizyce, szczególnie na akademickim poziomie. Dlatego podamy tutaj najważniejsze informacje dot. rachunku całkowego i przedstawimy jego proste zastosowania w fizyce. *Rozdział ten można początkowo pominąć, szczególnie w pierwszych tygodniach nauki fizyki na uczelni.

1.4.1. Całka nieoznaczona

Rozróżniamy dwa rodzaje całek w analizie matematycznej: **całki nieoznaczone** i **całki oznaczone**. Właściwie są to zupełnie inne twory - te pierwsze są funkcjami, natomiast te drugie to liczby. Jednak ich definicje i sposób obliczania są bardzo zbliżone. Zaczniemy więc od podstawowych informacji dot. całek nieoznaczonych.

Zasadniczo całkowanie jest procedurą odwrotną do różniczkowania. W tym sensie powiemy, że całka (nieoznaczona) jest **funkcją pierwotną** dla tzw. funkcji podcałkowej. Zapiszemy to tak:

$$\int f(x)dx = F(x) + const \quad \Leftrightarrow \quad [F(x)]' = f(x) \quad (1.19.)$$

Symbol całki to charakterystyczne wydłużone „S”, funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową. Należy zawsze pamiętać, aby po funkcji $f(x)$ jeszcze „pod całką” dopisać różniczkę dx - jawnie sugeruje ona „po czym” jest całkowanie (może być oczywiście po innej niż x zmiennej, a jest to szczególnie ważne w przypadku funkcji wielu zmiennych, np. $f(x, y, z)$, kiedy musimy wiedzieć, po czym ma być całka). Czasem dx zapisuje się tuż po symbolu całki, np. $\int dx f(x)$. Funkcja $F(x)$, która jest wynikiem całki, to tzw. funkcja pierwotna. Definicja (1.19.) właściwie od razu podaje nam sposób obliczania całki nieoznaczonej:

Całka nieoznaczona z funkcji $f(x)$ to taka funkcja $F(x)$, której pochodna $[F(x)]'$ jest funkcją podcałkową $f(x)$.

Czyli żeby obliczyć całkę z jakiejś funkcji, musimy „zgadnąć” jakiej innej funkcji jest ona pochodną. Np. całką z funkcji $f(x) = x$ będzie funkcja $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, bo pochodną $F(x)$ jest z powrotem $f(x) = x$. Tutaj wyjaśnia się też, dlaczego w definicji (1.19.) potrzebna jest stała $const$ (nazywamy ją stałą całkowania) - całkę nieoznaczoną jesteśmy w stanie znaleźć tylko z dokładnością do stałej, bo pochodna ze stałej wynosi, jak wiemy, zero. Występowanie stałej całkowania nie zmienia więc postaci funkcji podcałkowej (pochodna z $\frac{1}{2}x^2 + const$ to nadal x). Jeżeli funkcja $f(x)$ ma jakiś sens (np. fizyczny, typu prędkość jako funkcja czasu

$v(t)$ - funkcję nazwaliśmy tutaj v , a zmienną t), to stała całkowania też ma sens. Samym w sobie zadaniem jest jej wyznaczenie. Służą do tego tzw. **warunki początkowe** lub **warunki brzegowe**. Nie będziemy się tym więcej zajmować, ale powiemy sobie tylko, że w przypadku funkcji $v(t)$ (wektor prędkości w ruchu prostoliniowym), całka $\int v(t)dt = x(t) + x(0)$ (ponieważ prędkość $v(t)$ jest pochodną położenia po czasie, to całką z prędkości jest właśnie położenie $x(t)$, rozważamy tu przypadek jednowymiarowy). Stała całkowania natychmiast nabiera znaczenia jakiegoś stałego położenia, np. na początku ruchu, dlatego od razu zapisaliśmy ją jako $x(0)$. Jeżeli np. wiemy, że w chwili początkowej ciało znajdowało się w początku układu odniesienia (jest to właśnie warunek początkowy), to napiszemy $x(0) = 0$. Jeżeli nie interesują nas tego typu zagadnienia, to stałą całkowania jako oczywistą możemy śmiało pomijać w zapisie.

Podstawową metodą obliczania całek nieoznaczonych jest właśnie „zgadywanie”, czyli ustalenie postaci takiej funkcji, której pochodną jest nasza funkcja podcałkowa. W Przykładach całkujemy różne funkcje w ten sposób. Jeżeli funkcja podcałkowa nie jest prostą funkcją, całka może nie być łatwa do zgadnięcia. Nie wszystkie zasady dot. różniczkowania (patrz: ostatni wiersz tabeli 1.1.) obowiązują w przypadku całkowania. Prawdą jest, że całka sumy lub różnicy funkcji może być zapisana jako suma lub różnica całek:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (1.20.)$$

Także stałą, która mnoży funkcję podcałkową można wyłączyć przed znak całki: $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$. Natomiast nie ma prostych reguł dla iloczynu lub ilorazu funkcji, albo funkcji złożonych.

Przykłady

1. $\int 3x^2 dx = x^3 + const$, bo $(x^3)' = 3x^2$
2. $\int (6x^6 - 2) dx = \int 6x^6 dx - \int 2 dx = \frac{6}{7}x^7 - 2x + const$, bo $(x^7)' = 7x^6$
3. $\int \frac{10}{x^4} dx = -\frac{10}{3x^3} + const$, bo $(x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + const$, bo $(-\cos x)' = -(\cos x)' = \sin x$
5. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + const$, bo $(\sin(2x))' = 2 \cos(2x)$ (mogliśmy zapisać jedną stałą całkowania, która jest sumą dwóch stałych pochodzących od dwóch całek nieoznaczonych)
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + const$, bo $(\ln x)' = x^{-1}$.
7. $\int \left(\frac{4}{t^2} - e^{2t}\right) dt = -\frac{4}{t} - \frac{1}{2}e^{2t} + const$, bo $\left(-\frac{4}{t}\right)' = \frac{4}{t^2}$ oraz $(e^{2t})' = 2e^{2t}$.

1.4.2. Metody całkowania

Oprócz „zgadywania” istnieje wiele „bardziej mądrych” reguł całkowania i sposobów na obliczanie bardziej złożonych całek. Podamy tutaj tylko dwie najważniejsze, choć nie będziemy później z nich korzystać w dalszej części skryptu.

Całkowanie przez podstawienie

Idea jest prosta: za jakieś wyrażenie w funkcji podcałkowej (albo nawet całą funkcję) podstawiamy nową zmienną (dokonujemy zamiany zmiennych) taką, która ma potencjalnie ułatwić nam całkowanie. Szybkie zauważenie tego, jakie podstawienie będzie wygodne, jest kwestią praktyki i doświadczenia, choć są też ogólne zasady. Ważne jest, aby pamiętać przy zamianie zmiennych, że zmienia się zmienna całkowania i różniczkę dx musimy wyrazić przez różniczkę nowej zmiennej. Liczymy wtedy tzw. jawną pochodną, np. podstawienie $x^2 = u$ (u jest nową zmienną) po obliczeniu jawnej pochodnej jest następujące: $2xdx = du$. Stąd możemy wyznaczyć dx : $dx = \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$. Przykłady:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{array} \right| = -\int \frac{1}{u} du = \\ &= -\ln u + \operatorname{const} = |u = \cos x| = -\ln(\cos x) + \operatorname{const}'\end{aligned}$$

Tutaj za całe wyrażenie $\sin x dx$ mogliśmy podstawić $-du$, co znacznie ułatwiło nam dalsze obliczenia. Ogólnie: zawsze, gdy w funkcji podcałkowej licznik jest pochodną mianownika, wynik całkowania jest logarytmem naturalnym z mianownika. Dla porządku zapisaliśmy powyżej inne stałe całkowania const i const' , bo dotyczą one różnych zmiennych u lub x ; zazwyczaj nie będziemy na to zwracać uwagi.

$$\int x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{2} e^u + \operatorname{const} = \frac{1}{2} e^{x^2} + \operatorname{const}$$

Oczywiście $(e^x)' = e^x$ i podobnie całka $\int e^x dx = e^x + \operatorname{const}$.

Całkowanie przez części

Tu także mamy do czynienia z prostą ideą, która wynika z zasad różniczkowania iloczynu funkcji: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]' - f(x)g'(x)$. Jeżeli funkcję podcałkową możemy zapisać jako iloczyn dwóch wyrażeń, z których jedno jest prostą pochodną (którą obliczymy w głowie), a drugie po zróżniczkowaniu będzie prostsze niż przedtem, to całkowanie przez części jest idealną metodą. Zapiszmy definicję metody, którą łatwo zrozumiemy na prostym przykładzie:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \quad (1.21.)$$

Efektywnie nadal zostaje nam do policzenia jedna całka, ale tym razem inna, która może okazać się dużo prostsza. Oczywiście po drodze zauważyliśmy, że $\int [f(x)g(x)]' dx = f(x)g(x) + \operatorname{const}$, zgodnie z definicją całki nieoznaczonej. Sprawdźmy kilka przykładów:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = e^x & \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + \operatorname{const}$$

Drugi przykład jest może nieco mniej oczywisty, bo jako jedno z wyrażeń budujących funkcję podcałkową weźmiemy jedynekę:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & \rightarrow f(x) = x \\ g(x) = \ln x & \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 dx = x(\ln x - 1) + \operatorname{const}$$

Metodę całkowania przez części często wykorzystujemy w przykładach z funkcjami trygonometrycznymi. Czasem całkowanie przez części trzeba wykonać więcej niż raz (gdy całka po prawej stronie w równaniu (1.21.) nadal nie jest prosta).

$$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \left| \begin{array}{ll} f' = \cos \varphi & \rightarrow f = \sin \varphi \\ g = \sin^2 \varphi & \rightarrow g' = 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right| = \sin^3 \varphi - 2 \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

Dostaliśmy w wyniku taką samą całkę, jak wyjściową. Ale to dobrze, bo w takim razie, po przeniesieniu stronami, mamy:

$$3 \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \sin^3 \varphi \Rightarrow \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + \text{const}$$

1.4.3. Całka oznaczona

Całka oznaczona jest szczególnie ważna w fizyce, dlatego teraz poświęcimy jej trochę uwagi. W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, całka oznaczona jest liczbą, a mówiąc precyzyjniej: różnicą wartości funkcji pierwotnej w dwóch punktach, nazywanych granicami całki oznaczonej. Liczba ta w fizyce będzie miała także jednostkę. Całka oznaczona ma więc **granice całkowania**. Są to takie skrajne wartości zmiennej całkowania a i b , w zakresie których interesuje nas zmienność funkcji podcałkowej: $x \in (a, b)$ (domknięcie przedziałów nie ma tutaj większego znaczenia, przynajmniej dla naszych potrzeb). Zapis całki oznaczonej różni się tylko tym, że podajemy dolną ($x = a$) i górną ($x = b$) granicę całkowania przy znaku całki:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.22.)$$

Jak liczyć całkę oznaczoną? Przepis podaje tzw. podstawowe twierdzenie rachunku całkowego (wzór Newtona-Leibnitza):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1.23.)$$

Całka oznaczona o granicach całkowania (a, b) jest równa różnicy wartości funkcji pierwotnej w górnej granicy $F(b)$ i wartości funkcji pierwotnej w dolnej granicy $F(a)$.

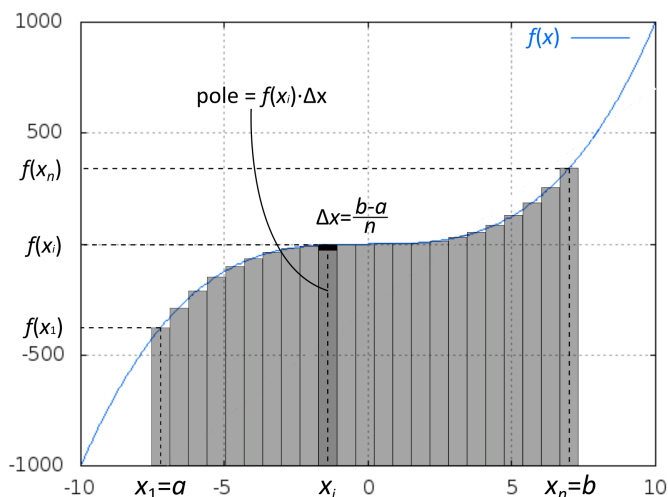
Żeby więc obliczyć całkę oznaczoną, trzeba najpierw znaleźć funkcję pierwotną, czyli obliczyć całkę nieoznaczoną. Zauważmy przy tym, że nie ma potrzeby zapisywania stałej całkowania (ona znika), bo odejmując dwie wartości funkcji pierwotnej w dwóch punktach odejmujemy od siebie także dwie te same stałe całkowania. W wyniku całki oznaczonej nie zapisujemy więc stałej całkowania.

Tak jak pochodna funkcji w punkcie (która jest liczbą) ma interpretację geometryczną, tak całka oznaczona (także liczba) również ma interpretację geometryczną. Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest wielkością pola powierzchni po wykresie funkcji $f(x)$ między punktami $x = a$ oraz $x = b$. Chodzi tu o pole między krzywą $f(x)$ a osią x (spójrz na Rysunek 1.4.). Ta interpretacja wynika wprost z definicji całki oznaczonej. Jeśli wyobrazimy sobie, że obszar pod krzywą między punktami a i b podzielimy na wąskie paseczki o (nieskończenie małej) szerokości dx , to wyrażenie $f(x) \cdot dx$ jest polem wąskiego prostokąta wychodzącego z punktu x

na osi. Całkowanie po zmiennej x to nic innego jak sumowanie tych wyrażeń, czyli dodawanie pól kolejnych prostokątów. Nie będziemy tutaj wchodzić w szczegóły, ale definicję całki oznaczonej można zapisać w postaci granicy następującej sumy:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (1.24.)$$

Przedziały Δx stają się nieskończenie wąskie, jeśli liczba przedziałów n staje się nieskończona. Żeby więc powyższa suma była całką (pole powierzchni było dokładnie polem pod krzywą, a nie polem prostokątnych pasków) musimy obliczyć granicę $n \rightarrow \infty$, co jest równoważne granicy $\Delta x \rightarrow 0$. Pole pod krzywą, która w danym obszarze przyjmuje ujemne wartości (np. sinusoida w przedziale $(-\pi, 0)$) jest ujemne, a w obszarze o dodatnich wartościach (sinusoida w przedziale $(0, \pi)$) - dodatnie.



Rysunek 1.4.: Ilustracja interpretacji graficznej całki oznaczonej jako pola pod krzywą.

Korzystając z powyższej definicji (1.24.) można obliczyć każdą całkę, podobnie jak z definicji pochodnej możemy policzyć każdą pochodną. Jest to jednak bardzo niepraktyczne i właściwie nigdy tego nie robimy. W kursie Analizy matematycznej Czytelnik pozna więcej interpretacji geometrycznych całek, np. dla funkcji wielu zmiennych (pole powierzchni bocznej lub objętość brył obrotowych itd.). Granice całkowania mogą być zupełnie dowolne. Jeśli jednak są sobie równe, to wynik takiej całki jest trywialny - zero (pole obszaru między tą samą prostą $x = a$ jest przecież zerowe). Jeśli jedna z granic jest nieskończona (lub obie są), to całkę oznaczoną nazywamy wtedy **całką niewłaściwą**. Taka całka może być **zbieżna** lub nie, tzn. jej wartość może być skończona lub nieskończona (pole pod parabolą w zakresie $x \in (0, \infty)$ jest nieskończone).

Całki oznaczone znajdują szerokie zastosowanie w fizyce. Takie wielkości jak praca, entropia, strumień pola magnetycznego itd. mają ogólnie definicje w postaci całek, w dodatku oznaczonych, bo fizyka wymaga określonego zakresu zmienności pewnych wielkości (np. jest sens mówić o pracy pewnej siły na określonej drodze itp.). Całki w fizyce są najczęściej więc oznaczone. Co więcej, mogą to być bardziej skomplikowane całki niż te omawiane powyżej. Np. praca jest tak naprawdę całką krzywoliniową po pewnej trajektorii w przestrzeni

(wzdłuż której przesuwane jest ciało pod wpływem siły). Możemy mówić o całkach krzywoliniowych, powierzchniowych, objętościowych, skierowanych i nieskierowanych itd. W naszym podręczniku jednak nie będziemy mówić o takich przypadkach.

Przykłady

1. Oblicz następujące całki oznaczone:

- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$. Pole pod parabolą o równaniu $f(x) = x^2$ od zera do 1 wynosi więc $1/3$ (w umownych jednostkach).
- $\int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 + 1 = 1$. Mimo że całka jest niewłaściwa (nieskończoność w granicy), to jest zbieżna - pole pod eksponentą w tym zakresie argumentów jest skończone.
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Zauważmy, że liczyliśmy pole pod sinusoidą w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kiedy sinus jest raz ujemny, a raz dodatni. Przedział całkowania jest symetryczny względem $x = 0$, a funkcja sinus jest parzysta, dlatego pole (ujemne) po lewej stronie zera jest równe na moduł polu (dodatniemu) po prawej stronie. W efekcie oba pola dodają się do zera.

2. Oblicz pole powierzchni między krzywymi: $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x + 2$ w przedziale $x \in (0, 2)$.

Mamy tutaj trochę inne zagadnienie, niż dotychczas. Nie chodzi o pole pod jedną krzywą (między krzywą a osią x), ale o pole pomiędzy krzywymi. Czytelnikowi zostawiamy naszkicowanie tej sytuacji. Można zauważyć, że w punkcie $x = 2$ obie krzywe (parabola i prosta) się spotykają. W punkcie $x = 0$ tak nie jest, ale to nie jest problem. Aby obliczyć pole między krzywymi, od pola pod krzywą położoną wyżej (w tym przypadku jest to prosta) odejmiemy pole pod krzywą położoną niżej (parabola). Gdyby w obszarze zmienności argumentu krzywe się przecinały, musielibyśmy uważnie zdefiniować obszary całkowania, żeby poprawnie dokonać tego odejmowania. Zapiszemy więc:

$$P = \int_0^2 g(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

co po scałkowaniu daje: $P = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{10}{3}$.

3. Obliczymy teraz trochę bardziej skomplikowaną całkę: $I = \int_0^4 x^3 e^{-x^2} dx$.

Jest to dość trudna całka. Spróbujmy najpierw zastosować metodę zamiany zmiennych w całce nieoznaczonej:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x dx = du \\ x^3 dx = \frac{1}{2} u du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u e^{-u} du$$

Ta całka jest już o wiele prostsza. Można ją obliczyć przez części, a bardzo podobne obliczenia wykonaliśmy w przykładzie w podrozdziale 1.4.2.. Wynik jest:

$$-\frac{1}{2}e^{-u}(u + 1) + const$$

Teraz uwaga. Mieliśmy do policzenia całkę oznaczoną, musimy więc podstawić teraz granice całkowania. Po drodze zmieniliśmy jednak zmienną całkowania (zamiast x używamy teraz $u = x^2$). Naturalnie zmieniają się też granice całkowania w nowej zmiennej. Możemy w tej sytuacji zawsze postąpić na dwa sposoby:

- (i) Zmienić granice całkowania tak, by były prawdziwe w nowych zmiennych. W naszym przypadku: dolna granica ($x = 0$) $\rightarrow$ ($u = 0$) oraz górna granica ($x = 2$) $\rightarrow$ ($u = 4$).
- (ii) Równoważnie, możemy zawsze wrócić do pierwotnej zmiennej całkowania, czyli x , a granice wtedy pozostają niezmienione.

Wybór opcji (i) lub (ii) nie wpływa na wynik końcowy. Sprawdźmy:

$$(i) \quad I = \left[-\frac{1}{2}e^{-u}(u+1) \right]_0^4 = -\frac{5}{2e^4} + \frac{1}{2}$$

$$(ii) \quad I = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) \right]_0^2 = -\frac{5}{2e^4} + \frac{1}{2}$$

Zadania

1. Oblicz całki nieoznaczone:

- a) $\int 6x^3 dx$ b) $\int \left(\cos x - \frac{4}{x^2} \right) dx$ c) $\int \sin \theta \cos \theta d\theta$
(można przez podstawienie)
- d) $\int x^2 \sin x dx$ (przez części 2 razy) *e) $\int \frac{2x^3}{\cos^2(x^2)} dx$
(najpierw podstawienie $x^2 = u$,
potem przez części,
na końcu całka z tgu)

2. Korzystając z całki oznaczonej, oblicz pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(0,3)$.

3. Oblicz całki oznaczone:

- a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta d\theta$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ c) $\int_0^1 x e^x dx$ d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ (narysuj)

Rozdział 2.

Kinematyka

Kinematyka jest działem mechaniki, który zajmuje się opisem ruchu, bez wnikania w jego przyczyny. Póki co nie będą nas na razie interesować siły, zasady dynamiki itp. W szczególności nie będziemy się zastanawiać, skąd ciało ma przyspieszenie, najczęściej będziemy po prostu wiedzieć, że jest ono jakieś. Cała sztuka, praktycznie w każdym zadaniu, będzie polegała na poprawnym zapisie równań ruchu lub położenia, by na ich podstawie wyliczyć nieznaną wielkość. Rozdział zaczniemy od definicji ruchu oraz podstawowych wielkości fizycznych opisujących ruch.

2.1. Podstawowe pojęcia

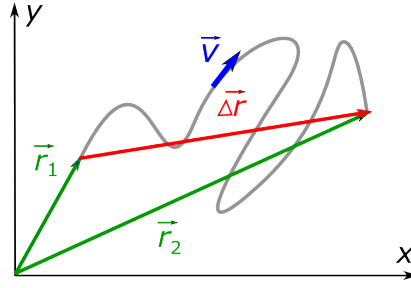
Położenie. Intuicyjnie łatwo zrozumieć, że położenie jest po prostu punktem w przestrzeni, w którym znajduje się ciało. Do określenia położenia potrzebny jest układ odniesienia, w którym położenie będzie wektorem $\vec{r} = (x, y, z)$. Mówimy czasem o takim wektorze - wektor wiodący, gdyż w trakcie ruchu jego koniec przemieszcza się wraz z ciałem, podczas gdy początek jest zaczepiony w początku układu odniesienia.

Ruch jest zmianą położenia ciała w czasie.

Przemieszczenie to wektor będący różnicą wektorów położenia końcowego i początkowego w jakimś ruchu. Wektor przemieszczenia najczęściej oznaczamy przez $\Delta\vec{r}$ dla podkreślenia, że jest on zmianą położenia, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Zauważmy, że zarówno o ruchu jak i przemieszczeniu mówimy, że jest to zmiana położenia. Rzeczywiście, ruch jest wtedy, gdy mamy niezerowy wektor przemieszczenia. Oczywiście, ruch nie jest wielkością fizyczną, jest pojęciem, podczas gdy przemieszczenie jest wektorową wielkością fizyczną - ma więc cztery cechy wektora, w szczególności jednostkę.

Tor ruchu jest krzywą (linią), po której porusza się ciało. Mówiąc o równaniu toru ruchu myślimy o matematycznym równaniu krzywej - np. paraboli lub okręgu.

Droga jest długością toru i oznaczamy ją przez s . Ważne jest, aby rozróżniać pojęcie drogi od długości przemieszczenia. Droga jest długością krzywej - od początku do końca ruchu. Przemieszczenie jest natomiast wektorem, którego długość to długość odcinka prostego - od położenia początkowego do końcowego. W ogólności są to zdecydowanie różne wielkości. Jedynym przykładem ruchu, gdzie droga jest równa długości wektora przemieszczenia jest ruch prostoliniowy (bez zawracania).



Rysunek 2.1.: Wektory położenia, przemieszczenia i prędkości w układzie współrzędnych.

Prędkość zdefiniowana jest przez pochodną wektora położenia po czasie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.1.)$$

Wzór ten definiuje tzw. prędkość chwilową. Wektor prędkości (chwilowej) jest zawsze styczny do toru i ma zwrot przemieszczenia. Wartość prędkości nazywamy często szybkością. Jednostką prędkości jest m/s (ew. km/h, przy czym $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$).

W szczególności, jeśli mamy do czynienia z ruchem prostoliniowym ze stałą szybkością (czyli ruchem jednostajnym), zmiana położenia (czyli przemieszczenie) ma tę samą długość co droga. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego możemy więc stosować szkolny wzór:

$$v = \frac{s}{t} \quad (2.2.)$$

Przyspieszenie jest zmianą wektora prędkości w czasie, a więc zdefiniowane jest jako pochodna wektora prędkości lub druga pochodna położenia po czasie.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.3.)$$

Jednostką przyspieszenia jest m/s^2 .

Uwaga. Przez pochodną wektora rozumiemy wektor, którego składowe są pochodnymi składowych wyjściowego wektora. Wobec tego następująco definiujemy składowe prędkości i przyspieszenia:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x, y, z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = (a_x, a_y, a_z) \end{aligned} \quad (2.4.)$$

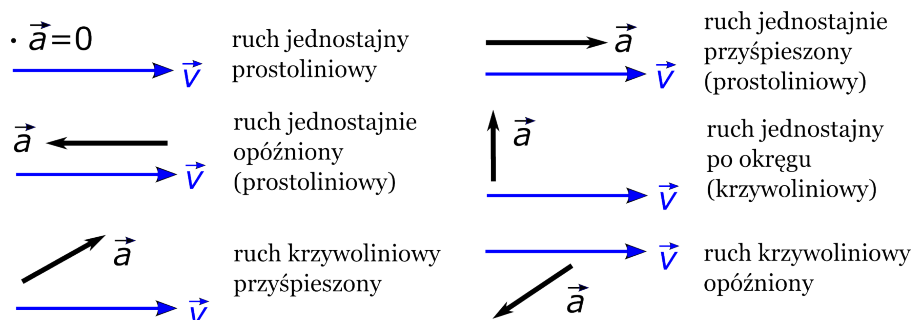
Przyspieszenie dośrodkowe i styczne. Wektor przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym rozkładamy na dwie składowe - prostopadłą do toru (oraz jednocześnie wektora prędkości) i równoległą. Składowa prostopadła, zwana także normalną, to przyspieszenie dośrodkowe (lub normalne) $\vec{a}_d$. Jest ono odpowiedzialne za zakrzywianie wektora prędkości w czasie ruchu, ale bez zmiany jego wartości. Ze zmianą wartości wektora prędkości związana jest składowa styczna przyspieszenia $\vec{a}_s$. Obie składowe obliczamy ze wzorów:

$$a_d = \frac{v^2}{r} \quad a_s = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad (2.5.)$$

gdzie v jest prędkością, a r promieniem krzywizny (np. promieniem okręgu). Możemy sobie wyobrazić ruch bez zmiany wartości prędkości, a jednak z przyspieszeniem. Jest to ruch jednostajny po okręgu. Wartość prędkości się nie zmienia (stąd nazwa „jednostajny”), ale występuje przyspieszenie dośrodkowe, powodujące zakrzywienie toru w okrąg.

Klasyfikacja rodzajów ruchu.

Wektor przyspieszenia może być względem toru czy wektora prędkości zorientowany różnie. Na tej podstawie wyróżniamy różne rodzaje ruchów, ze względu na wzajemną orientację wektorów $\vec{v}$ i $\vec{a}$. Jeżeli wartość przyspieszenia jest stała w czasie, to mówimy, że ruch jest *jednostajnie* zmienny (przyspieszony bądź opóźniony), czyli ze stałym przyspieszeniem.



Rysunek 2.2.: Klasyfikacja rodzajów ruchu ze względu na wzajemną orientację wektora prędkości i przyspieszenia.

Średni wektor prędkości (prędkość średnia). Jest to wektor wyrażający stosunek przemieszczenia do czasu ruchu. W odróżnieniu od definicji prędkości chwilowej (2.1.), w przypadku prędkości średniej symbole pochodnej są zastąpione przyrostami (symbol Δ):

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.6.)$$

Zauważmy, że gdy rozważamy krótkie przyrosty czasu, czyli przy $\Delta t \rightarrow 0$, średni wektor prędkości podaje wektor prędkości chwilowej (przy $\Delta t \rightarrow 0$ mówimy o chwilowych zmianach wektora), a definicja prędkości chwilowej - wzór (2.1.) - wynika z definicji średniego wektora prędkości (2.6.), zgodnie z definicją pochodnej - wzór (1.5.).

Szybkość średnia jest inną wielkością niż zdefiniowana poprzednio. Wyraża ona szybkość, jaką średnio miało ciało w całym ruchu. Określona jest za pomocą ilorazu całkowitej drogi pokonanej przez ciało i całego czasu ruchu:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_c}{t_c} \quad (2.7.)$$

Należy zauważyć, że szybkość średnia nie jest wartością średniego wektora prędkości. Dla podkreślenia tego faktu, wartość średniego wektora prędkości oznaczamy $|\vec{v}_{\text{sr}}|$, a więc $v_{\text{sr}} \neq |\vec{v}_{\text{sr}}|$. Wartość średniego wektora prędkości jest zawsze mniejsza (lub równa) od szybkości średniej. Równość zachodzi jedynie w przypadku ruchu prostoliniowego, kiedy, jak pamiętamy, droga jest równa długości przemieszczenia.

Przykłady

1. Ruch ciała opisany jest przez wektor położenia $\vec{r} = [x(t), y(t)]$, gdzie $x(t) = \frac{a}{t} - bt^3$, $y(t) = c + \frac{d}{t^2}$ (t - czas, a, b, c, d - stałe, jakie powinny być ich jednostki?). Znajdziemy wektor prędkości oraz przyspieszenia ciała w tym ruchu.

Po pierwsze, jednostkami składowych x i y musi być metr, więc jednostki stałych a, b, c, d powinny jakoś „usuwać” sekundę, która jest jednostką czasu t . Tak więc, dokonujemy tzw. analizy wymiarowej, aby uzgodnić jednostki. Np. wyrażenie a/t ma jednostkę $[a]/s$, a musi mieć jednostkę metra 'm'. Z równania ' $[a]/s=m$ ' otrzymujemy, że stała a musi mieć jednostkę 'm·s'. Podobnie dla kolejnych wyrażeń:

$$[b] \cdot s^3 = m \Rightarrow [b] = m/s^3$$

$$[c] = m$$

$$[d]/s^2 = m \Rightarrow [d] = m \cdot s^2$$

Współrzędne wektora prędkości i przyspieszenia znajdziemy w oparciu o wzór (2.4). Wystarczy tylko zrózniczkować po zmiennej t funkcje $x(t)$ oraz $y(t)$:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{t} - bt^3 \right) = -\frac{a}{t^2} - 3bt^2 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(c + \frac{d}{t^2} \right) = -\frac{2d}{t^3} \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{a}{t^2} - 3bt^2 \right) = \frac{2a}{t^3} - 6bt \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{2d}{t^3} \right) = \frac{6d}{t^4} \end{aligned}$$

2. Wektor położenia ciała ma następujące współrzędne zależne od czasu $\vec{r} = [x(t), y(t)]$, gdzie $x(t) = 16t$, $y(t) = 3 + 4t - 5t^2$, czas mierzymy w sekundach, a położenie w metrach. Jaka jest wartość wektorów położenia, prędkości i przyspieszenia w chwili $t = 3$ s.

W pierwszej kolejności musimy znaleźć zależność prędkości i przyspieszenia od czasu, dopiero wtedy będzie wolno nam podstawić za czas $t = 3$ s. To potrafimy już zrobić, zupełnie tak samo jak w poprzednim przykładzie. Zatem:

$$v_x(t) = 16$$

$$v_y(t) = 4 - 10t$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -10$$

Teraz możemy podstawić $t = 3$ s i znaleźć współrzędne, a także wartości wektora położenia, prędkości i przyspieszenia:

$$\vec{r}(t = 3s) = [48, -30] \Rightarrow |\vec{r}(t = 3s)| = \sqrt{2304 + 900} = \sqrt{3204} \text{ m} \approx 56,5 \text{ m}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = [16, -26] \Rightarrow |\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{256 + 676} = \sqrt{932} \text{ m/s} \approx 30,5 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t = 3s) = [0, -10] \Rightarrow |\vec{a}(t = 3s)| = \sqrt{0 + 100} = 10 \text{ m/s}^2$$

Zadajmy sobie teraz pytanie, jaka jest wartość kąta pomiędzy wektorem prędkości a jego x -ową składową dla $t = 3$ s? Pamiętamy, że kąt pomiędzy wektorami jest określony przez iloczyn skalarny - wzór (1.13.). Sam iloczyn skalarny wyliczymy znając składowe wektorów, a więc korzystając ze wzoru (1.12.).

$$\vec{v} \circ \vec{v}_x = v v_x \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{[16, -26] \circ [16, 0]}{\sqrt{932} \cdot 16} = \frac{256}{\sqrt{932} \cdot 16} = \frac{16}{\sqrt{932}} \Rightarrow \alpha_1 \approx 58,4^\circ$$

Kąt α_1 można obliczyć też inaczej, prościej - wykorzystując wzór na składową x wektora, zgodnie z Rysunkiem 1.3.. Wynik jest oczywiście ten sam.

Znajdźmy teraz kąt występujący pomiędzy wektorami prędkości i przyspieszenia w tej samej chwili czasu.

$$\vec{v} \circ \vec{a} = v a \cos \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{[16, -26] \circ [0, -10]}{\sqrt{932} \cdot 10} = \frac{260}{\sqrt{932} \cdot 10} = \frac{26}{\sqrt{932}} \Rightarrow \alpha_2 \approx 31,6^\circ$$

3. Biegacz pokonuje pewien dystans w dwóch etapach, poruszając się ruchem jednostajnym. Pierwszy etap o długości $s_1 = 600$ m z szybkością $v_1 = 7$ km/h, a drugi o długości $s_2 = 350$ m z szybkością $v_2 = 8$ km/h. Z jaką średnią szybkością poruszał się biegacz?

Po pierwsze, zalecamy od razu ujednolicić jednostki, póki jeszcze zadanie wydaje nam się łatwe ;-). Np. zmienić km/h na m/s.

Pamiętamy, że do obliczenia szybkości średniej (wzór (2.7.)) potrzebujemy znać całkowitą drogę - to łatwo policzymy dodając długości odcinków s_1 i s_2 , oraz całkowity czas, którego nie znamy. Wykorzystamy więc wzór na szybkość w ruchu jednostajnym prostoliniowym (2.2.):

$$t_c = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 v_2 + s_2 v_1}{v_1 v_2}$$

Zatem szybkość średnia:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1 v_2 + s_2 v_1}{v_1 v_2}} = \frac{(s_1 + s_2) v_1 v_2}{s_1 v_2 + s_2 v_1} = 7,33 \text{ km/h}$$

Zauważmy po pierwsze, że szybkość średnia jest pomiędzy 7 a 8 km/h, co oczywiście musi zachodzić. Po drugie, jest ona bliższa szybkości, z którą biegacz poruszał się na dłuższym odcinku, co też jest bardzo logiczne.

A jak obliczyć szybkość średnią, jeśli nie znamy długości etapów, ale wiemy, że pokonanie pierwszego etapu trwało $t_1 = 2$ min, a drugiego $t_2 = 3$ min? W tym przypadku znamy czas całkowity $t_c = t_1 + t_2$, a drogę liczymy ze wzoru (2.2.):

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = 7,6 \text{ km/h}$$

Tym razem szybkość średnia jest bliższa wartości prędkości, z którą biegacz poruszał się przez dłuższy czas.

Równania ruchu

Równania ruchu są najważniejszym „osiągnięciem” kinematyki. Pozwalają opisać zachowanie ciała w dowolnej chwili czasu, poprzez znalezienie jego prędkości i drogi jaką pokonał od początku ruchu. Tak więc poprzez równania ruchu rozumiemy następującą parę równań (zależność od czasu wartości prędkości i drogi):

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 \pm a t \\ s(t) &= v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \tag{2.8.}$$

gdzie v_0 oznacza prędkość początkową w rozpatrywanym ruchu, a - przyspieszenie ciała, natomiast t - czas.

Znak „+” wybieramy w przypadku gdy zwroty wektorów prędkości początkowej i przyspieszenia są ze sobą zgodne, tzn. w przypadku ruchu **przyspieszonego**.

Znak „-” wybieramy w przypadku gdy zwroty wektorów prędkości początkowej i przyspieszenia są do siebie przeciwne, tzn. w przypadku ruchu **opóźnionego**.

Jeżeli mamy do czynienia z ruchem odbywającym się w płaszczyźnie (lub przestrzeni), dla każdego kierunku przyjętego układu współrzędnych znajdujemy składowe wektorów prędkości początkowej i przyspieszenia i zapisujemy dwie (lub trzy) pary równań ruchu.

Jeśli z kolei rodzaj ruchu się zmienia w trakcie ruchu, np. z opóźnionego na przyspieszony, to również musimy zapisać osobne równania ruchu dla każdego przypadku.

2.2. Równania położenia

Przez równania położenia rozumiemy zależność wektora położenia (jego składowych) od czasu, a więc równania zależności $x(t)$, $y(t)$ i ew. $z(t)$. Opisują one współrzędne położenia ciała w dowolnej chwili czasu t . Ogólna postać równań położenia dla ruchu jednostajnie zmiennego na płaszczyźnie jest następująca:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \pm v_{0x} t \pm \frac{1}{2} a_x t^2 \\y(t) &= y_0 \pm v_{0y} t \pm \frac{1}{2} a_y t^2\end{aligned}\tag{2.9.}$$

gdzie: v_{0x}, v_{0y}, a_x, a_y to wartości bezwzględne składowych prędkości początkowej i przyspieszenia rozłożone w wybranym przez nas układzie odniesienia, a x_0, y_0 to współrzędne położenia początkowego - istotne, jeśli ciało rozpoczyna swój ruch nie z początku wybranego przez nas układu odniesienia. W równaniach $\vec{a} = (a_x, a_y) = \text{const.}$

Znaki „+” wybieramy w przypadku gdy zwroty wektorów składowych prędkości początkowej i przyspieszenia są **zgodne z kierunkami osi** układu odniesienia.

Znaki „-” wybieramy w przypadku gdy zwroty wektorów składowych prędkości początkowej i przyspieszenia są **przeciwne do kierunków osi** układu odniesienia.

Zwracamy szczególną uwagę na kwestię wyboru znaków w równaniach ruchu i położenia, który ma zupełnie inne podłoże w obu tych przypadkach. Jest to często mylone przez studentów. W równaniach ruchu o wyborze znaków $+/-$ decyduje fakt, czy ruch jest przyspieszony, czy opóźniony; natomiast w równaniach położenia o znakach decydują wartości składowych wektorów położenia początkowego, prędkości początkowej i przyspieszenia wzdłuż wybranych osi układu współrzędnych. Oczywiście, współrzędne wektorów (inaczej: składowe) mają swoje znaki w wybranym układzie współrzędnych i ta dyskusja mogłaby być pominięta jako trywialna. Sądzimy jednak, że warto ten problem jasno omówić.

Wybór układu odniesienia jest ogólnie dowolny, ale zawsze warto wybrać go tak, aby opis ruchu i postać równań położenia była jak najprostsza. W szczególności, warto związać jedną z osi z kierunkiem wektora przyspieszenia, który jest na ogół stały. Wówczas należy rozłożyć wektor prędkości początkowej na składowe i być konsekwentnym w takim wyborze. Problemy te staną się jasne w trakcie rozwiązywania zadań w następnym rozdziale.

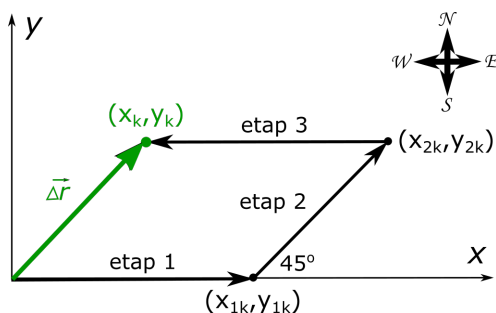
Równania położenia (2.9.) są szczególnie przydatne w zadaniach dotyczących zderzeń, spotkania się ciał w trakcie ich ruchu, gdy chcemy, aby jakiś obiekt (np. wyrzucony kamień) trafił w inny obiekt lub osiągnął jakiś punkt w przestrzeni itd. Najczęściej wystarczy wówczas porównać odpowiednie współrzędne położenia obu obiektów, aby z otrzymanego układu równań uzyskać np. czas zderzenia lub nieznaną prędkość początkową. Równania położenia przydają się również w sytuacjach, gdy jedno ciało ma „dogonić” drugie lub je prześcignąć (zagadnienie pogoni) i w innych tego typu przypadkach.

Przykłady

1. Pociąg jedzie ze stałą prędkością równą $v = 60 \text{ km/h}$, najpierw dokładnie na wschód przez $t_1 = 40 \text{ min}$, następnie w kierunku północno-wschodnim pod kątem 45° do poprzedniego przez $t_2 = 20 \text{ min}$, a w końcu na zachód przez $t_3 = 50 \text{ min}$. Jakie jest przemieszczenie pociągu w tym ruchu, a jaką drogę pokonał?

Sytuację obrazuje Rysunek 2.3.. Obliczenie drogi, jaką pokona pociąg jest najprostsze - skorzystamy ze wzoru (2.2.), ponieważ pociąg porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z szybkością 60 km/h . Całkowita droga wynosi więc:

$$s_c = v(t_1 + t_2 + t_3) = 60 \text{ km/h} \cdot \frac{110}{60} \text{ h} = 110 \text{ km}$$



Rysunek 2.3.: Ilustracja ruchu pociągu z Przykładu 1.

Aby znaleźć wektor przemieszczenia, musimy znaleźć położenie ciała na końcu ruchu (położenie początkowe przyjmujemy w punkcie $(0,0)$). Ruch pociągu składa się z trzech etapów. Położenie końcowe każdego etapu jest położeniem początkowym w etapie następnym. Ten fakt wykorzystamy przy pisaniu równań położenia.

$x_1(t) = v \cdot t$ - w etapie 1 wzdłuż osi x ruch jednostajny. $x_{1k} = x_1(t_1) = 40 \text{ km}$.

$y_1(t) = 0$ - w etapie 1 wzdłuż osi y pociąg się nie porusza. $y_{1k} = 0$.

$x_2(t) = x_{1k} + v_x \cdot t$ - w etapie 2 wzdłuż osi x ruch jednostajny z prędkością $v_x = v \cdot \cos 45^\circ = 42,4 \text{ km/h}$. $x_{2k} = x_2(t_2) = 40 + 14,1 = 54,1 \text{ km}$.

$y_2(t) = v_y \cdot t$ - w etapie 2 wzdłuż osi y ruch jednostajny z prędkością

$v_y = v \cdot \sin 45^\circ = 42,4 \text{ km/h}$. $y_{2k} = y_2(t_2) = 14,1 \text{ km}$.

$x_3(t) = x_{2k} - v \cdot t$ - w etapie 3 wzdłuż osi x ruch jednostajny z prędkością przeciwnie skierowaną względem osi. $x_{3k} = x_k = x_3(t_3) = 54,1 - 50 = 4,1 \text{ km}$.

$y_3(t) = y_{2k}$ - w etapie 3 wzdłuż osi y pociąg się nie porusza. $y_{3k} = y_k = 14,1 \text{ km}$.

Zatem, wektor przemieszczenia ma współrzędne: $\Delta \vec{r} = (x_k, y_k) = (4,1; 14,1) \text{ km}$.

Jaki jest średni wektor prędkości pociągu i jego długość w tym ruchu?

Średni wektor prędkości jest zdefiniowany przez (2.6.). Wystarczy więc, że współrzędne wektora $\Delta \vec{r}$ podzielimy przez całkowity czas ruchu:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{(4,1;14,1) \text{ km}}{110 \text{ min}} = (2,24; 7,7) \text{ km/h}$$

Długość tego wektora to $|\Delta \vec{v}_{sr}| \approx 8 \text{ km/h}$. Wynik wydaje się być zdumiewająco mały, ale przecież przemieszczenie pociągu w całym ruchu było małe. Oczywiście szybkość średnia ($v = 60 \text{ km/h}$) jest większa niż długość średniego wektora prędkości.

2. Samochód łagodnie hamuje, dojeżdżając do świateł. Ile wynosi droga hamowania samochodu, jeśli od prędkości 54 km/h hamuje ze stałym opóźnieniem 2 m/s^2 ?

Pytają nas w tym zadaniu o drogę hamowania s_{ham} , czyli drogę do zatrzymania w ruchu jednostajnie opóźnionym prostoliniowym. Wykorzystamy więc równanie na drogę (2.8.) i położymy $v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$ oraz $a = 2 \text{ m/s}^2$, ale wcześniej musimy wyznaczyć czas ruchu, z równania na prędkość. W obu przypadkach wybierzemy równania ze znakiem „-” (ruch opóźniony).

$$v(t_r) = v_0 - at_r = 0 \Rightarrow t_r = \frac{v_0}{a}$$

W takim razie droga hamowania wynosi

$$s_{ham} = s(t_r) = v_0 t_r - \frac{1}{2} a t_r^2 = \frac{v_0^2}{2a} = 56,25 \text{ m}.$$

To całkiem długa droga hamowania, ale opóźnienie samochodu nie jest zbyt duże. Kierowca zapewne widząc z daleka zmieniające się światło, powoli zaczął zwalniać już z odległości ponad 50 metrów.

Zastanówmy się teraz nad takim przypadkiem: na jezdnię wbiega nagle pies, kierowca zauważa go z odległości tylko 10 metrów. Z jakim przyspieszeniem musi hamować, aby od prędkości 54 km/h zdążyć się zatrzymać? Ile czasu trwa to hamowanie awaryjne?

Przekształcamy powyższy wzór na drogę hamowania, żeby obliczyć a :

$$a = \frac{v_0^2}{2s_{ham}} = 11,25 \text{ m/s}^2, t_{ham} = \frac{v_0}{a} = \frac{2s_{ham}}{v_0} = 1,3 \text{ s}.$$

Tym razem przyspieszenie jest naprawdę duże, a czas hamowania bardzo krótki. Możemy się zastanawiać, co by było gdybyśmy uwzględnili czas reakcji kierowcy (równy ok. 1 s), zanim zauważy on psa, wbiegającego na jezdnię 10 m przed samochodem. Czas na zatrzymanie samochodu nie byłby wtedy wcale równy 0,33 s, jakby się mogło wydawać, ale znacznie krótszy. Obliczenie go zostawiamy Czytelnikowi.

Zadania

1. Wektor położenia ciała ma następujące współrzędne zależne od czasu $\vec{r} = [x(t), y(t)]$, gdzie $x(t) = -3t$, $y(t) = 4t - 5t^2$. Proszę znaleźć wektor prędkości i przyspieszenia. Jaka jest wartość wektora położenia, prędkości i przyspieszenia dla $t = 2 \text{ s}$. Jaki kąt występuje pomiędzy wektorami prędkości i przyspieszenia po czasie $t = 2 \text{ s}$?
2. Rowerzysta poruszający się ruchem jednostajnym pokonuje trasę w trzech etapach o długościach $s_1 = s_2 = 4 \text{ km}$ oraz $s_3 = 6 \text{ km}$. Z jaką szybkością musiał pokonać odcinek s_2 , jeśli pozostałe odcinki pokonał z szybkością $v_1 = v_3 = 22 \text{ km/h}$, a jego szybkość średnia na całej trasie wyniosła $v_{sr} = 20 \text{ km/h}$?

3. Samolot leci na stałej wysokości ze stałą prędkością równą 800 km/h, najpierw dokładnie na południe przez 1,5 godz., następnie w kierunku południowo-wschodnim pod kątem 45° do poprzedniego przez 3 godz. Jakie jest przemieszczenie samolotu, a jaką drogę pokonał? Jaki jest średni wektor prędkości samolotu i jego długość?
4. Sprinter rusza z bloków startowych i do osiągnięcia swojej maksymalnej prędkości przyspiesza ze stałym przyspieszeniem. Ile ono wynosi, jeśli rozpędzanie się sprintera odbywało się na drodze 40 m i zajęło 6,7 s? Jeśli od tego momentu biegacz utrzymuje stałą prędkość (równą swojej prędkości maksymalnej), to jaki czas uzyska on w biegu na 100 m?

2.3. Rzuty

Rzutom nazywamy ruch ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi. Jedynym przyspieszeniem, jakiego doznaje ciało jest przyspieszenie grawitacyjne $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ (dokładna wartość dla Polski wynosi $9,81 \text{ m/s}^2$, ale w zadaniach będziemy używać wartości zaokrąglonej). Jest ono zawsze skierowane pionowo w dół. Każdy z omawianych rodzajów rzutu reprezentuje jeden z opisanych rodzajów ruchu zmiennego (Rysunek 2.2.). Niektóre rzuty są przykładami ruchu w płaszczyźnie, a więc zgodnie z tym, co dyskutowaliśmy w Rozdziale 2.2., będziemy traktować cały ruch jako złożenie ruchu w kierunku osi x i y .

W zadaniach dot. rzutów najczęściej będziemy chcieli obliczyć takie wielkości fizyczne jak czas rzutu, prędkość końcowa, wysokość maksymalna, zasięg, kąt upadku na ziemię itp.

2.3.1. Spadek swobodny

Jest to przykład ruchu jednostajnie przyspieszonego z przyspieszeniem grawitacyjnym g bez prędkości początkowej. Sytuacja jest zobrazowana na Rysunku 2.4.. Zgodnie z (2.8.) równania ruchu w spadku swobodnym są następujące:

$$\begin{cases} v(t) &= g t \\ s(t) &= \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2.10.)$$

W oparciu o te równania wyliczymy teraz czas spadku oraz prędkość końcową, czyli taką, z jaką ciało upada na ziemię. (Chodzi o prędkość, jaką osiągnie ciało tuż przed momentem zderzenia. Po upadku na ziemię prędkość ciała jest oczywiście 0).

Aby obliczyć czas ruchu t_r wystarczy zauważyć, że droga jaką ciało pokonuje w czasie ruchu t_r jest równa wysokości h , z jakiej ciało spada. Możemy więc napisać:

$$s(t_r) = h \Rightarrow \frac{1}{2} g t_r^2 = h \Rightarrow t_r = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.11.)$$

Mając czas ruchu, łatwo obliczymy prędkość końcową. Podstawimy $t = t_r$ do pierwszego równania układu (2.10.)

$$v_k = v(t_r) = g t_r = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (2.12.)$$

Przykłady

1. Zadajmy sobie teraz pytanie, jaką prędkość będzie miało ciało po czasie równym połowie całkowitego czasu ruchu. Aby ją znaleźć wystarczy w (2.12.) podstawić $t = \frac{1}{2}t_r$:

$$v_{1/2} = v\left(\frac{1}{2}t_r\right) = g \cdot \frac{t_r}{2} = g \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

2. Jaka będzie wysokość ciała po czasie $t = \frac{1}{2}t_r$? Wysokość (położenie ciała nad ziemią) dla dowolnej chwili czasu t możemy obliczyć jako różnicę $h - s(t)$ wysokości początkowej i drogi pokonanej po czasie t .

$$h_{1/2} = h - s\left(\frac{1}{2}t_r\right) = h - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{t_r}{2}\right)^2 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2h}{g} = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h$$

Pytaliśmy o wysokość ciała, a więc jego położenie względem osi y . Dlaczego więc nie wykorzystać w tym zadaniu równania położenia $y(t)$ i za jego pomocą obliczyć położenie? Oczywiście można to zrobić, co jest wręcz łatwiejsze. Równanie położenia $y(t)$ dla ciała w spadku swobodnym ma postać (zgodną z ogólnymi równaniami (2.9.)):

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.13.)$$

Łatwo zauważyć, że podstawiając teraz $t = \frac{1}{2}t_r$ otrzymujemy dokładnie taki sam wynik. Ogólnie, jeśli pytamy o położenie ciała w trakcie ruchu, naturalnym jest wykorzystanie równań położenia. Co więcej, jest to często najprostsza droga do znalezienia wyniku.

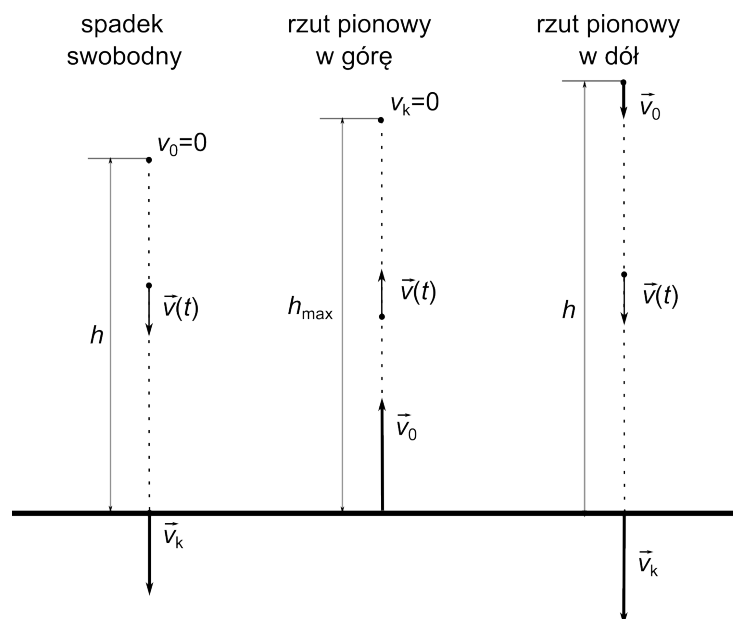
3. Policzmy teraz, z jaką prędkością v_1 spada ciało, gdy znajduje się dokładnie w połowie wysokości początkowej. Aby wykorzystać pierwsze równanie z układu (2.10.), musimy najpierw znaleźć odpowiedni czas. Położenie w połowie wysokości oznacza, że ciało przebyło drogę $s = \frac{1}{2}h$, możemy więc z drugiego równania układu (2.10.) znaleźć potrzebny czas t_1 .

$$s(t_1) = \frac{1}{2}h \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Teraz prędkość:

$$v_1 = v(t_1) = g \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$$

Na koniec komentarz. Kinematyka spadku swobodnego może śmiało posłużyć do opisu innych rodzajów ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej. Np. do opisu zsuwania się ciała z równi pochyłej bez tarcia lub ruchu ładunku elektrycznego w polu elektrycznym. W tych przypadkach trzeba oczywiście znaleźć odpowiednie przyspieszenie, jakiemu poddane jest ciało (co jest zadaniem działu mechaniki zwanym dynamiką), ale jest to jedyna różnica.



Rysunek 2.4.: Ilustracja rzutów pionowych.

2.3.2. Rzut pionowy do góry

Rzut pionowy w górę jest przykładem ruchu jednostajnie opóźnionego do zatrzymania - ciało, któremu nadajemy prędkość początkową hamuje w ruchu do góry, przyśpieszenie grawitacyjne jest opóźnieniem w tym ruchu. W rezultacie ciało na pewnej wysokości zatrzymuje się. Co się wtedy z nim dzieje? Zaczyna spadać swobodnie, co dyskutowaliśmy w poprzednim paragrafie. Równania ruchu w rzucie pionowym do góry:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - g t \\ s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2.14.)$$

Parametry rzutu pionowego, które nas najczęściej interesują to czas wznoszenia t_w i wysokość maksymalna h_{max} , na jaką rzucone ciało się wzniesie. Bardzo łatwo wyliczymy czas wznoszenia - wystarczy, że zauważymy, że po tym czasie ciało traci prędkość (zatrzymuje się). W takim razie z równania na prędkość (2.14.) otrzymujemy:

$$v(t_w) = 0 \Rightarrow v_0 - g t_w = 0 \Rightarrow t_w = \frac{v_0}{g} \quad (2.15.)$$

Aby teraz znaleźć h_{max} wystarczy do równania na drogę wstawić obliczony czas t_w :

$$h_{max} = s(t_w) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.16.)$$

Otrzymany wzór (przy dowolnym przyśpieszeniu a) określa ogólnie drogę przebytą przez ciało poruszające się ruchem jednostajnie opóźnionym do zatrzymania, np. hamującego przed skrzyżowaniem samochodu (por. z Przykładem 2 z Podrozdziału 2.2.).

Zauważmy, że jeśli przy pomocy wzoru (2.16.) wyrazimy prędkość początkową przez h_{max} , to dostaniemy: $v_0 = \sqrt{2gh_{max}}$, a więc wzór taki jak (2.12.) określający prędkość końcową ciała

w spadku swobodnym z wysokości h . Wniosek z tego jest taki, że jeśli upuścimy swobodnie ciało z wysokości h_{max} , to osiągnie ono końcową prędkość równą prędkości początkowej w rzucie pionowym do góry ciała, które wzniesie się na tę samą wysokość h_{max} . A więc oba te przykłady rzutów są dokładnie swoimi odwrotnościami - są symetryczne. W związku z tym, czasy spadku swobodnego i wznoszenia w rzucie pionowym do góry są takie same. Podobnie będzie w przypadku rzutu ukośnego - czas wznoszenia i opadania ciała będą sobie równe. Taka sytuacja zachodzi jedynie wtedy, gdy pomijamy opory powietrza, co w naszych zadaniach zawsze ma miejsce.

Przykłady

1. Chłopiec rzuca piłką pionowo do góry i przed jej złapaniem klaszcze w dłonie 5 razy. Z jaką minimalną prędkością musi wyrzucić piłkę, aby zdążyć ją złapać? Czas jednego klaśnięcia to 0,5 s.

Na wykonanie 5 klaśnień chłopiec potrzebuje $t = 5 \cdot 0,5 \text{ s} = 2,5 \text{ s}$. Taki co najmniej musi być więc czas od chwili wyrzucenia piłki do jej powrotu na dół. Zatem czas lotu do góry (czas wznoszenia) t_w będzie o połowę krótszy $t_w = \frac{1}{2} t = 1,25 \text{ s}$. Korzystamy teraz ze wzoru (2.15.) na czas wznoszenia w rzucie pionowym i przekształcamy go, aby otrzymać prędkość początkową:

$$t_w = \frac{v_0}{g} \Rightarrow v_0 = g t_w = 12,5 \text{ m/s}$$

2. Jaką maksymalną wysokość osiągnie ciało, które rzucono pionowo do góry, znajdzie się na wysokości $h = 3 \text{ m}$ po czasie $t = 3 \text{ s}$.

W tym miejscu najwygodniej będzie skorzystać w równania położenia $y(t)$, które wystarczy rozwiązać ze względu na v_0 i następnie skorzystać ze wzoru na h_{max} w rzucie pionowym. $y(t = 3 \text{ s}) = 3 \text{ m}$.

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow v_0 = \frac{y(t) + \frac{1}{2} g t^2}{t} = 16 \text{ m/s}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 12,8 \text{ m}$$

Czy ciało się wtedy wznosi czy opada?

Aby rozstrzygnąć tę kwestię, obliczmy czas wznoszenia dany wzorem (2.15.):

$$t_w = \frac{v_0}{g} = 1,6 \text{ s} < 3 \text{ s}$$

Zatem ciało po $t = 3 \text{ s}$ ruchu już opada. Co więcej, $t = 3 \text{ s} < 2t_w$ (czas trwania ruchu jest większy niż 3 s), zatem ruch po 3 sekundach jeszcze trwa (zadanie ma sens).

3. Rzucony pionowo do góry kamień wznosił się na wysokość $h = 3,2 \text{ m}$. Z jaką prędkością go wyrzucono?

Korzystamy ze wzoru (2.16.), który przekształcamy aby obliczyć v_0

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_{max}} = 8 \text{ m/s}$$

W kolejnym eksperymencie wyrzucono do góry kamień z tą samą prędkością v_0 , a po czasie $\Delta t = 0,5$ s wyrzucono drugi kamień też z prędkością v_0 . Proszę obliczyć po jakim czasie i na jakiej wysokości dojdzie do zderzenia oraz jakie będą wtedy szybkości obu kamieni.

Skoro po pewnym czasie dojdzie do zderzenia, to oba kamienie znajdą się na tej samej wysokości. Wobec tego wygodnie będzie użyć równań położenia i dla pewnego czasu porównać położenia obu kamieni, z czego uda się wyznaczyć czas do zderzenia.

$$\begin{aligned}y_1(t) &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\y_2(t) &= v_0(t - \Delta t) - \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2\end{aligned}$$

Taki zapis równań oznacza, że czas zaczynamy mierzyć od chwili wyrzucenia kamienia pierwszego. Łatwo sprawdzić, że dla $t = \Delta t$ położenie kamienia 2 jest zero, więc zgodnie z treścią zadania jest on dopiero wyrzucany. Jeśli po czasie $t = t_{zd}$ nastąpi zderzenie, to:

$$\begin{aligned}y_1(t_{zd}) = y_2(t_{zd}) \quad \Rightarrow \quad v_0 t_{zd} - \frac{1}{2} g t_{zd}^2 &= v_0 t_{zd} - v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g t_{zd}^2 + g t_{zd} \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \\t_{zd} &= \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2} \Delta t = 1,05 \text{ s}\end{aligned}$$

Od razu zauważmy, że w chwili zderzenia pierwszy kamień już opadał - wynika to choćby z powyższego wzoru, gdzie wyrażenie v_0/g jest przecież czasem wznoszenia w rzucie pionowym, a t_{zd} jest większe o składnik $\Delta t/2$. $t_w = v_0/g = 0,8$ s. Po drugie, tak wynika z logiki, jeśli oba kamienie zostały wyrzucone z tą samą prędkością, to spotkają się dopiero, gdy pierwszy już opada.

Teraz, mając czas do zderzenia (liczony od chwili wyrzucenia pierwszego kamienia), jesteśmy w stanie już wszystko policzyć. Wysokość, na jakiej dojdzie do zderzenia:

$$h_{zd} = y_1(t_{zd}) = v_0 t_{zd} - \frac{1}{2} g t_{zd}^2 = 2,9 \text{ m}$$

Prędkości obu kamieni:

$$v_1(t_{zd}) = || \text{prędkość w spadku swobodnym po } t_{zd} - t_w || = g \cdot (t_{zd} - t_w) = 2,5 \text{ m/s}$$

$$v_2(t_{zd}) = || \text{prędkość w rzucie pionowym po } t_{zd} - \Delta t || = g \cdot (t_{zd} - \Delta t) = 5,5 \text{ m/s}$$

Zadania

1. Proszę sprawdzić, że rzeczywiście czasy spadku swobodnego z wysokości h i wznoszenia w rzucie pionowym do góry z prędkością $v_0 = \sqrt{2gh}$ są takie same.
2. Proszę napisać równania położenia w rzucie pionowym do góry i na ich podstawie obliczyć, po jakim czasie ciało wzniesie się na wysokość $y = \frac{1}{2} h_{max}$.
3. Rzucony pionowo do góry kamień wznosił się na wysokość $h = 7,2$ m. Z jaką prędkością go wyrzucono? W kolejnym eksperymencie wyrzucono kamień z tą samą prędkością, a po czasie $\Delta t = 0,7$ s z wysokości $h = 7,2$ m puszczo swobodnie drugi kamień. Proszę obliczyć po jakim czasie i na jakiej wysokości dojdzie do zderzenia oraz jakie będą wtedy szybkości obu kamieni.

2.3.3. Rzut pionowy w dół

Tym razem mamy do czynienia z ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową. Równania ruchu w tym przypadku są następujące:

$$\begin{cases} v(t) &= v_0 + g t \\ s(t) &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2.17.)$$

Aby znaleźć czas rzutu musimy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$s(t_r) = h \Rightarrow v_0 t_r + \frac{1}{2} g t_r^2 = h \Rightarrow t_r = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \quad (2.18.)$$

Rozwiązanie ze znakiem '−' musimy pominąć, ponieważ czas nie może być ujemny. Co więcej, wyrażenie pod pierwiastkiem jest większe niż v_0^2 , a więc rozwiązanie ze znakiem '+' jest na pewno dodatnie. Zatem czas ruchu w rzucie pionowym w dół wynosi:

$$t_r = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \quad (2.19.)$$

Prędkość końcowa:

$$v_k = v(t_r) = v_0 + g \cdot \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (2.20.)$$

Kładąc $v_0 = 0$ możemy sprawdzić, że otrzymamy t_r i v_k takie jak dla spadku swobodnego.

2.3.4. Rzut poziomy

W przypadku rzutu poziomego mamy do czynienia z ruchem w dwóch wymiarach (patrz: Rysunek 2.5.). Ułożymy więc dwie pary równań ruchu - osobno w kierunku x i y . Wzdłuż osi y ciało posiada przyspieszenie g zwrócone w dół, nie ma natomiast składowej pionowej prędkości początkowej. Prędkość początkowa v_0 jest skierowana poziomo (stąd nazwa rzutu). Zatem wzdłuż osi y mamy do czynienia z ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem g bez v_0 , czyli spadkiem swobodnym. W kierunku osi x z kolei nie mamy żadnego przyspieszenia, więc prędkość ciała się nie zmienia i zawsze wynosi v_0 . A zatem jest to ruch jednostajny. Możemy teraz napisać równania ruchu wzdłuż obu kierunków:

$$X : \begin{cases} v_x(t) &= v_0 \\ s(t) &= v_0 t \end{cases} \quad Y : \begin{cases} v_y(t) &= g t \\ s(t) &= \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2.21.)$$

Znajdziemy teraz wzory na czas ruchu, prędkość końcową, kąt, pod jakim ciało upadnie na ziemię i zasięg rzutu.

Czas ruchu obliczymy dokładnie tak jak w przypadku spadku swobodnego - zauważymy, że w kierunku pionowym ciało przebyło drogę równą wysokości h , z jakiej je wyrzucono.

$$Y : s(t_r) = h \Rightarrow \frac{1}{2} g t_r^2 = h \Rightarrow t_r = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.22.)$$

Prędkość końcowa będzie miała dwie składowe - v_{kx} oraz v_{ky} , przy czym prędkość $v_{kx} = v_0$, bo w kierunku x ruch jest jednostajny. Prędkość v_{ky} liczymy też tak samo jak w przypadku spadku swobodnego:

$$Y : v_{ky} = v_y(t_r) = g t_r = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (2.23.)$$

Ostatecznie, prędkość końcową v_k znajdziemy z tw. Pitagorasa:

$$v_k = \sqrt{v_{kx}^2 + v_{ky}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (2.24.)$$

Zauważmy, że jest to wynik taki sam jak w przypadku rzutu pionowego w dół. Jednak wektor $\vec{v}_k$ jest tym razem zorientowany pod pewnym kątem α do podłoża. Znajdźmy przykładowe funkcje trygonometryczne tego kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{ky}}{v_{kx}} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \quad \cos \alpha = \frac{v_{kx}}{v_k} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \quad \sin \alpha = \frac{v_{ky}}{v_k} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \quad (2.25.)$$

Zasięg rzutu zdefiniujemy jako drogę pokonaną w kierunku osi poziomej po czasie ruchu. Skorzystamy więc z równań dla składowej x :

$$X : z = s(t_r) = v_0 t_r = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.26.)$$

Ponieważ mamy do czynienia z ruchem w płaszczyźnie, zasadnym jest zapytać o tor ruchu w rzucie poziomym. Aby otrzymać równanie $y(x)$ krzywej, po której porusza się ciało, musimy napisać równania położenia. Do opisu położenia ciała na płaszczyźnie w dowolnej chwili t wystarczą nam dwa równania - $x(t)$ oraz $y(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (2.27.)$$

Żeby znaleźć równanie $y(x)$ musimy wyeliminować z równań zmienną t . Możemy np. wyznaczyć t z pierwszego równania ($t = x/v_0$) i wstawić do drugiego. Otrzymujemy wówczas:

$$y(x) = h - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = h - \frac{g x^2}{2v_0^2} \quad (2.28.)$$

Torem ruchu ciała w rzucie poziomym jest więc parabola. Szybko możemy się teraz przekonać, że jest to poprawny wynik. Po pierwsze, współczynnik przy x^2 jest ujemny, a więc parabola jest zwrócona ramionami w dół. Po drugie, współrzędna $p = -b/a$ wierzchołka paraboli jest zero, co też się zgadza z Rysunkiem 2.5. i przyjętym przez nas układem współrzędnych.

Przykłady

1. Jaką minimalną prędkość początkową trzeba nadać kamieniowi, aby rzucony poziomo z 1. piętra przeleciał przez płot o wysokości $h = 2$ m. Piętro znajduje się na wysokości $h_1 = 3$ m, ramię rzucającego $h_2 = 1,5$ m nad podłogą, a odległość budynku od płotu to $d = 10$ m.

Proponujemy to zadanie rozwiązać używając równań położenia.

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2$$

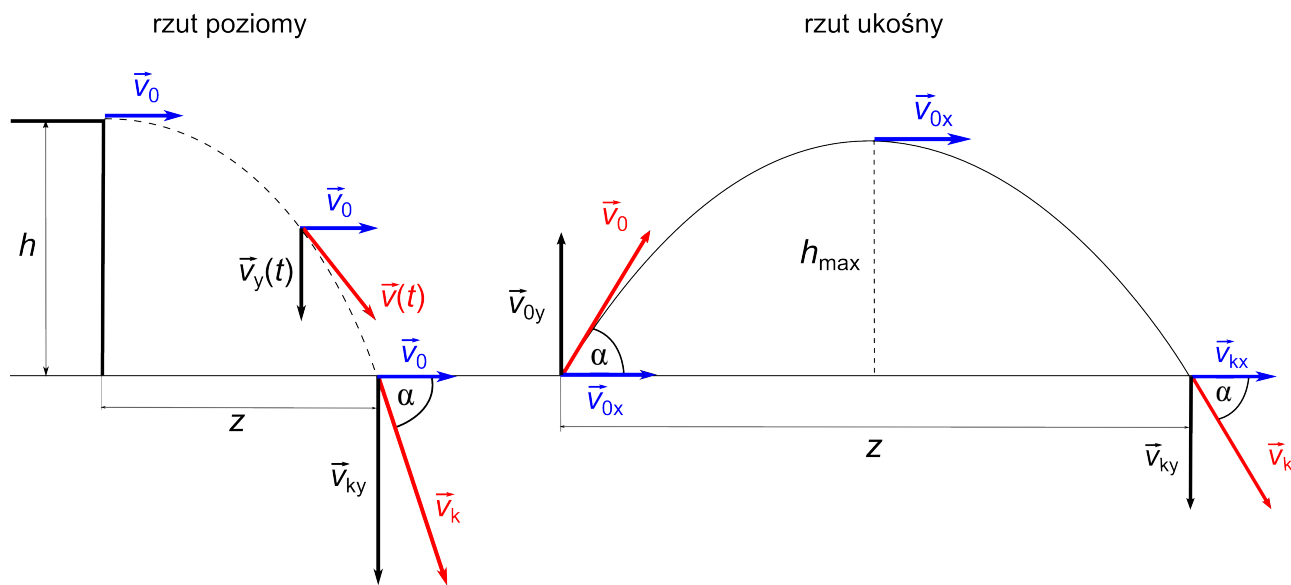
gdzie $H = h_1 + h_2 = 4,5$ m jest wysokością początkową kamienia. Rozważmy sytuację graniczną, gdy kamień trafia w wierzchołek płotu. Znajdziemy wtedy prędkość minimalną - aby kamień przeleciał ponad płotem, potrzebna będzie oczywiście większa prędkość. W chwili zderzenia, kamień znajdzie się w położeniu $x(t_{zd}) = d$, $y(t_{zd}) = h$, co jest położeniem wierzchołka płotu. Zapisując więc układ tych dwóch równań możemy obliczyć dwie niewiadome - czas do uderzenia i prędkość początkową.

$$\begin{cases} v_0 t_{zd} = d \\ H - \frac{1}{2} g t_{zd}^2 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{zd} = \frac{d}{v_0} \\ H - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{d}{v_0}\right)^2 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2(H-h)}} = 14 \text{ m/s} \\ t_{zd} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 0,71 \text{ s} \end{cases}$$

2. Z jakiej wysokości należy wyrzucić poziomo z prędkością v_0 ciało, aby uderzyło o ziemię pod kątem $\alpha = 60^\circ$?

Wykorzystamy jedną z zależności (2.25.) na kąt uderzenia ciała o ziemię. Np.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2g} = \frac{3v_0^2}{2g}$$



Rysunek 2.5.: Ilustracja rzutów w płaszczyźnie.

2.3.5. Rzut ukośny

Rzut ukośny również rozpatrujemy w rozbiciu na dwa kierunki x i y . W kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v_{0x} (patrz Rysunek 2.5.). W kierunku pionowym w pierwszej części mamy do czynienia z rzutem pionowym do góry z prędkością początkową v_{0y} , a w drugiej - ze spadkiem swobodnym z wysokości h_{max} . W pierwszej kolejności jednak, należy rozłożyć prędkość początkową v_0 na dwie składowe:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.29.)$$

Zapiszmy teraz równania ruchu w rzucie ukośnym. Napiшем dwie pary równań - dla ruchu jednostajnego w kierunku x oraz rzutu pionowego w kierunku osi y . Wykorzystujemy w ten sposób fakt, że ruch w dół po osiągnięciu wysokości maksymalnej jest symetrycznym odbiciem ruchu w górę. W związku z tym czas ruchu i droga w kierunku poziomym będą w obu przypadkach takie same.

$$\begin{aligned} X : \begin{cases} v_x(t) &= v_{0x} &= v_0 \cos \alpha \\ s(t) &= v_{0x} t &= v_0 \cos \alpha t \end{cases} \\ Y : \begin{cases} v_y(t) &= v_{0y} - g t &= v_0 \sin \alpha - g t \\ s(t) &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 &= v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30.)$$

Parametrami, które są interesujące w rzucie ukośnym są czas ruchu, wysokość maksymalna oraz zasięg. Całkowity czas ruchu jest dwukrotnie większy od czasu wznoszenia $t_r = 2t_w$. Czas wznoszenia policzymy przyrównując składową pionową prędkości $v_y(t_w)$ do zera:

$$v_y(t_w) = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha - g t_w = 0 \Rightarrow t_w = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow t_r = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2.31.)$$

Teraz łatwo policzymy maksymalną wysokość - kładąc $t = t_w$ do równania na drogę w kierunku y .

$$Y : h_{max} = s(t_w) = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (2.32.)$$

Zasięg jest równy drodze przebytej w kierunku osi x po całkowitym czasie ruchu $t = t_r$.

$$X : z = s(t_r) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (2.33.)$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość trygonometryczną: $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$.

Zapiszmy teraz równania położenia ciała w rzucie ukośnym. Znów bazujemy na ogólnej postaci równań (2.9.).

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (2.34.)$$

Można pokazać (zostawiamy to jako ćwiczenie), że równanie toru w rzucie ukośnym jest następujące:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (2.35.)$$

Przykłady

1. Sprawdzimy teraz, dla jakiego kąta zasięg w rzucie ukośnym jest maksymalny. Pamiętajmy wzór na zasięg w funkcji kąta (2.33.). Aby znaleźć, dla jakiego argumentu funkcja osiąga wartość największą (lub najmniejszą) wystarczy przyrównać pierwszą pochodną tej funkcji do zera. Dyskutowaliśmy to w Rozdziale 1.

$$z'(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g} = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

Zatem wyrzut ciała pod kątem 45° do poziomu daje największy zasięg rzutu. Zapewne kulomoci i oszczepnicy to wiedzą :-).

2. Będziemy chcieli wykazać, że zasięgi rzutów ukośnych dla kątów α i $(90^\circ - \alpha)$ są sobie równe przy tej samej prędkości początkowej. Również skorzystamy ze wzoru (2.33.) na zasięg. Interesuje nas tylko, czy zmienia się wyrażenie $\sin(2\alpha)$ przy zamianie α na $(90^\circ - \alpha)$.

$$\sin(2(90^\circ - \alpha)) = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$$

Zasięgi są więc równe. W ostatniej równości skorzystaliśmy z trygonometrycznych wzorów redukcyjnych (przy wyrażeniu $(180^\circ - \alpha)$ funkcja nie przechodzi w ko-funkcję, sinus w drugiej ćwiartce układu współrzędnych jest dodatni).

Czy również czasy są równe?

W tym przypadku korzystamy ze wzoru (2.31.) na czas ruchu, gdzie występuje funkcja $\sin \alpha$, w odróżnieniu od $\sin(2\alpha)$ we wzorze na zasięg. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, ponieważ przy redukcji o 90° funkcja zmienia się w ko-funkcję. Zatem czasy nie są równe, o ile kąt nie wynosi 45° . (Ogólnie $\sin \alpha \neq \cos \alpha$.) Rzut pod większym kątem trwa dłużej.

Zadania

1. Rzucone poziomo ciało osiągnęło ziemię po czasie $t = 10$ s. Z jakiej wysokości i z jaką prędkością wyrzucono ciało? Proszę spróbować wyprowadzić odpowiednie wzory z równań ruchu.
2. Ciało A wyrzucono ukośnie pod kątem $\alpha = 45^\circ$ z prędkością $v_0 = 3$ m/s. Z jakiej wysokości musiało zostać rzucone poziomo ciało B z tą samą prędkością, jeśli zasięgi obu ciał były takie same? Proszę spróbować wyprowadzić odpowiednie wzory z równań ruchu.
3. Proszę wykazać, że torem ruchu w rzucie ukośnym jest parabola zwrócona ramionami w dół (równanie 2.35.).
4. Pod jakim kątem należy ustawić wyrzutnię pocisków, którym nadawana jest prędkość $v_0 = 120$ m/s, aby trafić w obiekt oddalony o $d = 1$ km umieszczony na wysokości $h = 100$ m nad horyzontem? Dla jakiej maksymalnej wysokości h_1 pocisk może trafić obiekt?

2.4. Ruch po okręgu

Ruch po okręgu jest przykładem ruchu krzywoliniowego. Jeśli wybierzemy układ odniesienia w środku okręgu, to matematyczny opis ruchu ciała będzie prosty - położenie ciała dane jest wektorem wodzącym o stałej długości (równej promieniowi okręgu), zataczającym okrąg. W takim razie wygodnie będzie definiować położenie ciała poprzez kąt zataczany przez wektor wodzący, mierzony od jakiegoś ustalonego położenia początkowego. Do opisu ruchu punktu materialnego po okręgu, a także ruchu obrotowego bryły sztywnej, używa się wielkości kinematycznych „kątowych”. Zamiast mówić o położeniu $x(t)$, mówimy o położeniu kątowym $\theta(t)$. Jednostką kąta w układzie SI jest radian (rad). Podobnie definiujemy prędkość kątową ω (w odróżnieniu od prędkości liniowej) oraz przyspieszenie kątowe ε (w odróżnieniu od przyspieszenia). Poniżej podajemy definicje tych wielkości i ich jednostki

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt} & [\omega] &= \text{rad/s} \\ \vec{\varepsilon} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} & [\varepsilon] &= \text{rad/s}^2\end{aligned}\tag{2.36.}$$

Prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe są wielkościami wektorowymi. Ich kierunki pokrywają się. Jeśli ponadto zwroty są zgodne, mamy do czynienia z ruchem przyspieszonym po okręgu. Gdy zwroty są przeciwne, ruch jest opóźniony. Położenie kątowe nie jest wektorem, dlatego pierwszego wyrażenia z (2.36.) nie zapisujemy wektorowo. Możemy tak zrobić, jeśli potraktujemy kąt θ jako kąt skierowany (o zadanym kierunku, np. zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara). Wtedy kierunek wektora $\vec{\omega}$ wynika z zasady prawej dłoni (albo śruby prawoskrętnej) i jest związany z kierunkiem kąta skierowanego $\vec{\theta}$. Wektory $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{\omega}$ są zawsze prostopadłe do płaszczyzny okręgu, a ich punkt przyłożenia jest w środku okręgu.

Prędkość kątową, szczególnie w kontekście ruchu jednostajnego po okręgu, nazywamy *częstotliwością* i dla każdego ruchu okresowego (ruch po okręgu jest ruchem okresowym) możemy powiązać z okresem T i częstotliwością:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{oraz} \quad \omega = 2\pi f\tag{2.37.}$$

gdzie: okres T jest czasem trwania jednego pełnego okrążenia (obrotu), a częstotliwość f to ilość obrotów na jednostkę czasu.

Dla krzywoliniowego ruchu jednostajnie zmiennego (ze stałym przyspieszeniem kątowym) definiujemy równania ruchu, analogicznie do równań (2.8.) w przypadku ruchu postępowego.

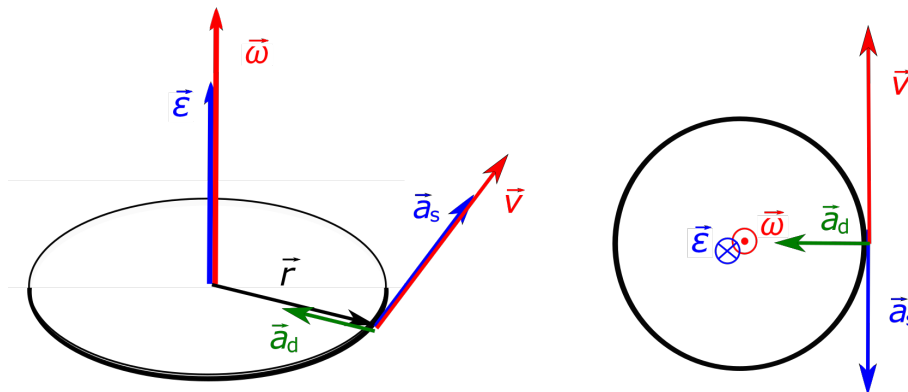
$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 \pm \varepsilon t \\ \theta(t) &= \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \varepsilon t^2\end{aligned}\tag{2.38.}$$

Znaki dobieramy podobnie jak dla ruchu postępowego, tzn. '+' dotyczy ruchu przyspieszonego, '-' dotyczy ruchu opóźnionego.

Okazuje się, że istnieją związki pomiędzy prędkością liniową a kątową oraz przyspieszeniem stycznym a kątowym. Są to związki wektorowe następującej postaci:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} & v &= \omega r, \text{ dla } \angle(\vec{\omega}, \vec{r}) = 90^\circ \\ \vec{a}_s &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} & a_s &= \varepsilon r, \text{ dla } \angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = 90^\circ\end{aligned}\tag{2.39.}$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu na okręgu (jego długość jest równa promieniowi okręgu). W przypadku ruchu obrotowego bryły sztywnej (dyskutowanego w Rozdziale 3.6.) powyższe relacje zachodzą tylko dla przypadku ruchu bez poślizgu.



Rysunek 2.6.: Ruch po okręgu - wektory prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego, oraz wektor prędkości i składowe przyspieszenia liniowego.

Przykłady

1. Wirnik silnika elektrycznego w chwili wyłączenia wykonywał 600 obr./min. Chcemy znaleźć opóźnienie kątowe i ilość obrotów wirnika do zatrzymania, jeśli nastąpiło ono po czasie $t_z = 2$ min.

Ilość obrotów (na sekundę, minutę itd.) jest to po prostu częstotliwość (wyrażona w hercach, czyli 1/s). Znamy więc częstotliwość początkową w ruchu obrotowym wirnika do zatrzymania, a więc i częstość początkową $\omega_0 = 2\pi f_0$. Z równań ruchu obrotowego opóźnionego (2.38.), a konkretnie z warunku na $\omega(t_z) = 0$ znajdziemy opóźnienie kątowe.

$$\omega(t_z) = 0 \Rightarrow \omega_0 - \varepsilon t_z = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0}{t_z} = \frac{2\pi f_0}{t_z} = 0,52 \text{ 1/s}^2$$

Ilość obrotów znajdziemy mając całkowity kąt zatoczony przez wirnik w czasie t_z i dzieląc go przez miarę kąta pełnego.

$$\theta_c = \theta(t_z) = \omega_0 t_z - \frac{1}{2} \varepsilon t_z^2 = \pi f_0 t_z \Rightarrow N_{obr} = \frac{\pi f_0 t_z}{2\pi} = \frac{f_0 t_z}{2} = 600 \text{ obr.}$$

2. Ile obrotów na sekundę wykonuje tylne koło roweru, gdy my kręcimy pedałami 5 razy w ciągu sekundy, jeśli promień przedniej zębatki to 8 cm, a tylnej - 2 cm? Z jaką liniową prędkością jedzie wtedy rower, którego koła mają rozmiar 28"?

Mechanizm przenoszenia napędu w rowerze jest prosty: tylne koło jest napędzane za pomocą łańcucha, który łączy zębatkę przednią, sprzężoną z pedałami, z zębatką tylną, sprzężoną z tylnym kołem. Źródłem napędu jest oczywiście człowiek, który obraca pedałami. To jak szybko jedziemy, zależy od przełożenia, czyli ile razy szybciej obróci się koło pod wpływem jednego obrotu pedałami. W zadaniu pytają właśnie o to przełożenie. Łańcuch łączący obie zębatki zapewnia to, że prędkości liniowe na obwodach

obu zębatek są sobie równe i równe prędkości liniowej każdego z ogniw łańcucha. Tak samo działają pasy transmisyjne w maszynach rolniczych czy paski klinowe w osprzęcie silnika samochodowego. Skoro prędkości liniowe mają być równe, zapiszemy:

$$v_t = v_p \quad \Rightarrow \quad \omega_t r_t = \omega_p r_p \quad \Rightarrow \quad \omega_t = \omega_p \frac{r_p}{r_t}$$

gdzie oznaczyliśmy częstości zębatego przedniej/tylnej przez ω_p/ω_t oraz promienie zębatego przez r_p/r_t . Stosunek promieni nazwiemy właśnie przełożeniem. Znając częstotliwość obrotu pedałów f_p , a więc także częstotliwość obrotu przedniej zębatego (przednia tarcza jest sprzężona z pedałami) obliczymy $\omega_p = 2\pi f_p$. Zatem częstotliwość obrotu tylnego koła:

$$f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{\omega_p}{2\pi} \frac{r_p}{r_t} = f_p \frac{r_p}{r_t} = 20 \text{ obr./s}$$

Ponieważ przełożenie, dane stosunkiem promieni zębatego, jest równe 4, to częstotliwość obrotu tylnego koła jest 4-razy większa niż częstotliwość obrotu pedałów. Teraz, znając f_t i zakładając ruch koła bez poślizgu (por. Rysunek 3.10. i dyskusja w Rozdziale 3.6.4.), możemy znaleźć prędkość liniową środka masy tylnego koła, a więc i prędkość roweru:

$$v_0 = \omega_t R = 2\pi f_t \frac{D}{2} = \pi D f_p \frac{r_p}{r_t} = 17,6 \text{ m/s} = 63,4 \text{ km/h}$$

Mamy więc do czynienia raczej z kolarzem szosowym niż turystą ;-).

Zadania

1. Koło zamachowe o średnicy $D = 80 \text{ cm}$ wykonuje ruch obrotowy z częstotliwością $f_D = 1000 \text{ obr./min}$. Jaka jest prędkość liniowa punktów na obwodzie koła, a jaka w połowie promienia?
2. Koło z poprzedniego zadania łączymy pasem z innym kołem o średnicy $d = 20 \text{ cm}$. Proszę obliczyć częstotliwość obrotu drugiego koła. *Uwaga. Jeśli dwa koła połączone są pasem, to punkty na obwodach obu kół muszą mieć jednakową prędkość liniową.*
3. W czasie $t = 10 \text{ s}$ jesteśmy w stanie rozkręcić koło rowerowe (uniesione w powietrze) do częstotliwości $f = 5 \text{ obr./s}$. Jaka jest wtedy prędkość liniowa punktów na obwodzie koła. Z jakim przyspieszeniem kątowym koło było rozkręcane?
4. Łopaty śmigłowca w momencie wyłączenia zapłonu wykonywały 2000 obr./min . Jeśli zatrzymały się całkowicie po 10 min , to jakie było opóźnienie katowe w tym ruchu. Ile obrotów jeszcze wykonało śmigło z łopatami? Jakiego przyspieszenia stycznego doznawały czubki łopat o długości 3 m ? Ile wynosiło całkowite przyspieszenie liniowe czubków łopat na tuż po wyłączeniu zapłonu? Porównaj wartości przyspieszeń z g .
5. Prędkość katowa wirującego wokół własnej osi walce o promieniu r jest funkcją zależną od czasu $\omega(t) = 2 - 3t^2$. Znajdź zależność przyspieszenia stycznego i dośrodkowego od czasu dla punktu na obwodzie walca. Dla jakiej chwili czasu t wartości tych przyspieszeń są sobie równe?

Rozdział 3.

Dynamika

Dynamika jest działem fizyki, który zajmuje się badaniem przyczyn ruchu, tzn. skąd wzięło się przyspieszenie (lub przyspieszenie kątowe), powodujące, że ciało porusza się ruchem zmiennym. Sprowadza się to zazwyczaj do zdefiniowania wypadkowych sił (lub momentów sił) działających na ciało. Podstawą dynamiki są 3 zasady dynamiki podane przez Newtona. Od ich podania zaczniemy niniejszy rozdział. Wcześniej jednak zdefiniujemy pojęcie siły.

Siła jest wektorową wielkością fizyczną, stanowiącą miarę oddziaływań między ciałami. Mówimy, że ciało A jest ciągnięte siłą o danej wartości i w danym kierunku. Taka informacja jest dla nas wystarczająca, żeby rozstrzygnąć, czy ciało będzie przyspieszać, czy w ogóle ruszy z miejsca, jaką prędkość osiągnie itd. (jeśli znamy ew. inne warunki). Ponadto jesteśmy w stanie porównywać miarę różnych oddziaływań.

Siła wypadkowa jest wektorową sumą wszystkich sił działających na ciało: $\vec{F}_w = \sum_i \vec{F}_i$. W szczególności, jeśli wszystkie siły działają w jednym kierunku, sumę wektorową zastępujemy zwykłą sumą algebraiczną (ze znakami) - tzn. siły w wybranym kierunku traktujemy jako dodatnie, a przeciwne do nich jako ujemne. Jeśli jakaś siła zorientowana jest pod pewnym kątem do wybranego kierunku (wybranego układu odniesienia), to rozkładamy ją na składowe.

3.1. Zasady dynamiki

I zasada dynamiki

Jeżeli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Możemy to zapisać wzorem:

$$\left(\vec{F} = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0 \right) \Rightarrow (\vec{v} = 0 \quad \text{lub} \quad \vec{v} = \text{const}) \quad (3.1.)$$

Przypadek z ruchem jednostajnym prostoliniowym dotyczy sytuacji, gdy ciało miało już wcześniej prędkość początkową. I zasada mówi, że prędkość ta jako wektor się nie zmienia, jeśli spełniony jest wspomniany warunek.

I zasadę stosujemy zawsze, gdy mamy do czynienia z sytuacją, że ciało jest w spoczynku lub nie zmienia swojej prędkości. Natychmiast mamy wtedy informację o siłach - muszą się równoważyć, zatem siła wypadkowa jest zero.

II zasada dynamiki

Jeśli na ciało działa niezerowa siła wypadkowa, to ciało ma przyspieszenie wprost proporcjonalne do wektora siły wypadkowej i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała, zgodnie ze wzorem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m} \quad (3.2.)$$

II zasada będzie przez nas używana bardzo często. Dzięki niej, znając siłę wypadkową F_w , będziemy w stanie określić przyspieszenie ciała a . Często będziemy zapisywać równoważną postać II zasady, definiując wartość siły wypadkowej $F_w = m \cdot a$.

Chociaż wzór (3.2.) będzie dla nas w zupełności wystarczający, to jednak musimy mieć świadomość, że nie jest on najogólniejszym sformułowaniem II zasady dynamiki. Uogólniona II zasada dynamiki brzmi: **Występowanie niezerowej siły wypadkowej powoduje zmianę pędu ciała w czasie** i może być zapisana przy pomocy wzoru:

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.3.)$$

Pęd jest wektorową wielkością fizyczną zdefiniowaną w późniejszym Podrozdziale 3.7. wzorem (3.20.). Zauważmy, że jeżeli masa rozpatrywanego ciała jest stała w czasie (we wszystkich naszych problemach tak będzie), to pochodna po czasie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$, co jest równoważne definicji (3.2.).

III zasada dynamiki

Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ o tej samej wartości i przeciwnym zwrocie.

Innymi słowy $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. Zasadę tę nazywa się często zasadą akcji-reakcji. Wykorzystamy tę zasadę np. w sytuacji, gdy będziemy opisywać ruch ciała po płaskim podłożu (lub równi pochyłej), gdzie powiemy, że siła nacisku ciała na podłoże (lub równię) jest równoważona przez siłę reakcji podłoża (równi). Wówczas, zgodnie z I zasadą, w kierunku prostopadłym do podłoża (równi) ciało nie będzie się poruszać. Zazwyczaj takiej szczegółowej analizy nie będziemy jawnie przeprowadzać - przyjmujemy ją po prostu niejako w pamięci.

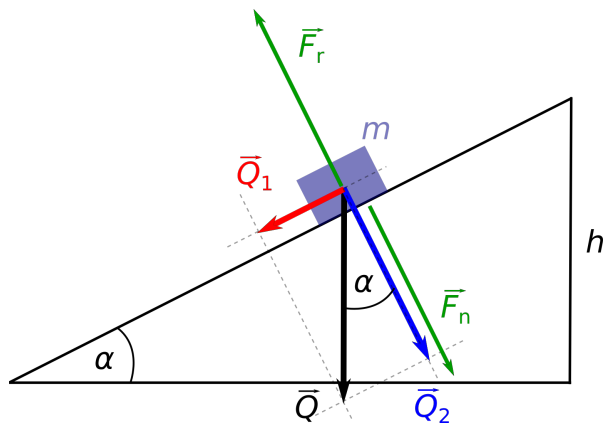
Możemy też wypowiedzieć nieco inaczej treść III zasady dynamiki: siły wewnętrzne układu się zawsze znoszą (równoważą) - np. siły naciągów nierozciągliwych lin w układach bloczków.

3.2. Równia pochyła

Równia pochyła jest modelem fizycznym zbudowanym z płaskiej powierzchni nachylonej do poziomu pod pewnym kątem. Jest to jedna z maszyn prostych (obok dźwigni, krążka, prasy hydraulicznej itd.). Podstawowym parametrem definiującym równię pochyłą jest kąt nachylenia równi do podłoża. Czasem w zadaniach jest też ważna wysokość równi. Na Rysunku 3.1. przedstawiono układ sił występujących dla równi, w szczególności rozkład siły ciężkości $\vec{Q}$ na składową równoległą $\vec{Q}_1$ i prostopadłą $\vec{Q}_2$ do równi.

Spróbujmy teraz obliczyć przyspieszenie ciała z Rysunku 3.1.. Wystarczy tylko znaleźć wypadkową siłę działającą na ciało i zapisać II zasadę dynamiki.

$$F_w = Q_1 \Rightarrow ma = mg \sin \alpha \Rightarrow a = g \sin \alpha \quad (3.4.)$$



Rysunek 3.1.: Schemat równi pochyłej i układ sił.

Składowa $\vec{Q}_2$ jest równoważona przez siłę reakcji równi $\vec{F}_r$, więc obu tych sił nie uwzględniamy w sile wypadkowej (znoszą się). Bardziej precyzyjnie: równia reaguje na nacisk ze strony klocka. Rolę siły nacisku pełni w tym przypadku składowa $\vec{Q}_2$.

Przykłady

1. Ciało zsuwa się z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ bez tarcia. Wysokość równi to $h = 2$ m. Ile czasu zajmie ciało ruch do końca równi?

Policzyliśmy przed chwilą, że przyspieszenie ciała zsuwającego się bez tarcia z równi wynosi $a = g \sin \alpha$. Ruch ciała na równi jest ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. W tym ruchu ciało pokonuje drogę równą długości równi w czasie ruchu t_r . Długość równi $s = \frac{h}{\sin \alpha}$ (zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 3.1.). Czas znajdziemy z równania na drogę:

$$s(t_r) = \frac{1}{2} a t_r^2 \Rightarrow t_r = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Zauważmy, że czas zsuwania z równi bez tarcia jest $\frac{1}{\sin \alpha}$ -dłuższy ($\sin \alpha \leq 1$) niż czas spadku swobodnego z wysokości h (por. ze wzorem (2.11.)).

Jaką prędkość uzyska ciało u dołu równi?

Tym razem użyjemy wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$v_k = v(t_r) = a t_r = g \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

Zatem prędkość ciała u dołu równi jest sama jak w przypadku wzoru (2.12.) na prędkość końcową w spadku swobodnym.

2. Ciało nadajemy szybkość początkową $v_0 = 10$ m/s, z którą ciało zaczyna ruch bez tarcia w górę równi o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$. Jak wysoka może być równia, aby ciało nie spadło z równi (nie przeleciało poza nią)?

Znowu, zaczynamy od znalezienia przyspieszenia działającego na ciało. W tym przypadku będzie to opóźnienie, bo siła wypadkowa działa przeciwnie do wektora prędkości początkowej v_0 .

$$F_w = Q_1 \Rightarrow a = g \sin \alpha$$

Ciało porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym do zatrzymania. Drogę przebytą w tym ruchu znaleźliśmy podczas omawiania rzutu pionowego do góry, albo ruchu opóźnionego do zatrzymania (samochód na światłach). Wynosi ona:

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

Znając drogę s , czyli maksymalną długość równi i kąt nachylenia równi do poziomu, obliczymy wysokość równi:

$$h = s \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g} = 5 \text{ m}$$

A więc jest to wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się ciało rzucone pionowo do góry z prędkością v_0 .

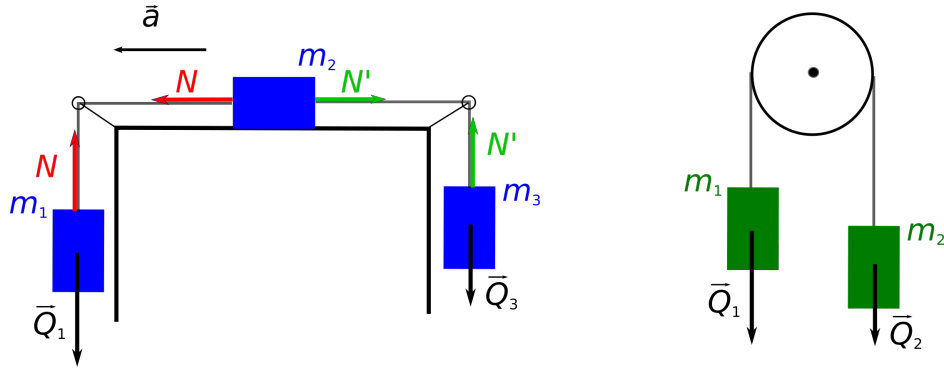
W powyższych dwóch przykładach pokazaliśmy jak podobny jest ruch ciała na równi pochyłej bez tarcia do spadku swobodnego i rzutu pionowego do góry, co przejawia się w podobnych lub takich samych wzorach kinematycznych. Jedyną różnicą w przypadku równi pochyłej jest to, że ciało oprócz ruchu w pionie, przemieszcza się także w poziomie, stąd np. czas ruchu na równi jest dłuższy, a ruch odbywa się z mniejszym przyspieszeniem.

3.3. Układ ciał połączonych linami

Schemat układu ciał połączonych przedstawia Rysunek 3.2.. Układ taki stanowi kilka ciał połączonych liną, co sprawia, że wszystkie ciała układu poruszają się z jednakowym przyspieszeniem. Problem dotyczy zazwyczaj dwóch sytuacji: układ ciał na poziomej powierzchni i zwisających (po jednej lub obu stronach) - rys. po lewej, oraz bloczek, przez który przewieszona jest lina a do niej zaczepione ciała - rys. po prawej. Możemy też sobie wyobrazić sytuację, gdy ciała umieszczono po dwóch stronach podwójnej równi pochyłej (o kątach α i β) itd. Ważne jest tu założenie dot. liny, która musi być nierozciągliwa, tzn. przenosić oddziaływanie jednego ciała na drugie bez zmian siły, i nieważka, tzn. nie posiadać masy. Z takim założeniem mamy do czynienia prawie zawsze. Co więcej, takie założenie gwarantuje, że naciągi wzdłuż tej samej liny, ale przyłożone do różnych ciał są takiej samej wartości. Dodatkowo w przypadku gdy lina jest przewieszona przez bloczek (krążek), często dla uproszczenia pomija się także wpływ ruchu obrotowego bloczka. Taką ogólniejszą sytuację będziemy również rozpatrywać w rozdziale dot. bryły sztywnej.

Rozwiązanie problemu ciał połączonych podlega pewnemu schematowi, który tutaj przedstawimy. Sytuacja dotyczy 3 ciał połączonych jak na Rysunku 3.2. po lewej. Schemat rozwiązania jest następujący:

1. Robimy rysunek, na którym oznaczamy wszystkie siły działające na ciała układu (ciężar, naciąg liny, tarcie, ...). To jest najważniejsze! ;-)



Rysunek 3.2.: Ciała połączone linami: dwie przykładowe realizacje problemu.

- Wybieramy kierunek ruchu układu (w lewo lub prawo) - najczęściej na podstawie oceny, która ze zwisających mas jest cięższa. Jeśli zwisa tylko jedna masa, sprawa jest oczywista. Ogólnie jednak, wybór ten nie rzutuje na rozwiązanie. Najwyżej może się okazać, że wartość przyspieszenia wyjdzie ujemna, co oznacza tylko, że kierunek ruchu ciał jest przeciwny do przyjętego przez nas na początku. My przyjmujemy $m_1 > m_3$, zatem ruch układu w lewą stronę.
- Zapisujemy II zasadę dynamiki dla każdego z ciał układu. Przyjmujemy dodatnią wartość sił w kierunku ruchu, a ujemną - w kierunku przeciwnym. W naszym przypadku będzie tak:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - N \\ m_2 a = N - N' \\ m_3 a = N' - m_3 g \end{cases} \quad (3.5.)$$

Ciężar masy m_2 nie wpływa na ruch układu (działa prostopadle do kierunku ruchu i jest równoważony przez reakcję podłoża), o ile nie występuje tarcie.

- Dostaliśmy układ trzech równań na trzy niewiadome a, N, N' . Powyższy układ najwygodniej jest rozwiązać dodając wszystkie równania stronami. Zyskamy wtedy to, że naciągi się zniosą (mają przeciwne znaki) i od razu znajdziemy przyspieszenie układu.

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = m_1 g - m_3 g \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \quad (3.6.)$$

W tego typu zadaniach naciągi (ile by ich nie było) zawsze się znoszą! Wynika to z III zasady dynamiki (siły naciągów są siłami wewnętrznymi).

- Teraz, mając a możemy wykorzystać np. równanie 1 i równanie 3 z układu (3.5.), żeby znaleźć naciągi lin:

$$\begin{aligned} N &= m_1 g - m_1 a = m_1 g - \frac{m_1^2 - m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = \frac{m_1(m_2 + 2m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g \\ N' &= m_3 a + m_3 g = \frac{m_1 m_3 - m_3^2}{m_1 + m_2 + m_3} g + m_3 g = \frac{m_3(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} g \end{aligned} \quad (3.7.)$$

3.4. Ważne przykłady sił

3.4.1. Siła tarcia

Siła tarcia jest miarą zjawiska tarcia, czyli oporu, jakiego doznaje ciało ze strony otoczenia, np. podłoża. Tarcie utrudnia ruch ciała względem podłoża, czasem mówimy także, że tarcie przeciwdziała ruchowi ciała. Bardziej precyzyjne określenia tarcia, a także wzory określające jego wartość, wymagają rozróżnienia, o jakie tarcie nam chodzi. Wyróżniamy 2 podstawowe rodzaje tarcia. Wektor i wartość sił tarcia będziemy oznaczać jako T .

Tarcie kinetyczne

Występuje, gdy ciało przemieszcza się względem podłoża (lub innego ciała). Nazywamy je czasem także tarcie poślizgowym lub suwnym. Jego kierunek jest przeciwny do wektora prędkości ciała, a mówiąc ściślej: tarcie kinetyczne ma zwrot przeciwny do względnej prędkości ciała względem podłoża (lub innego ciała). Na schematach przykładamy wektor tarcia kinetycznego (a także statycznego) do ciała w pobliżu punktu styku z podłożem. Wektor tarcia jest równoległy do powierzchni styku (w przypadku punktu styku - do płaszczyzny stycznej). Wartość siły tarcia kinetycznego T_k definiujemy jako iloczyn siły nacisku F_n i współczynnika tarcia kinetycznego f_k (oznaczanego też czasem μ_k), który jest bezwymiarowy:

$$T_k = f_k F_n \quad (3.8.)$$

Rolę siły nacisku pełni najczęściej ciężar (lub jego składowa), ale nie zawsze. Czasem jest to siła zewnętrzna lub bezwładności, a także inne siły. Zwracamy na to uwagę w Przykładach. Tarcie kinetyczne przeciwdziała ruchowi (utrudnia go), powodując np. rozpraszanie energii w układzie. W tym sensie mówimy, że jest to siła dyssypacyjna - rozpraszająca energię, co będziemy dokładniej dyskutować podczas omawiania zasady zachowania energii.

Tarcie statyczne

Występuje w sytuacji, gdy ciało jeszcze nie jest wprawione w ruch, ale jakiś czynnik (np. siła zewnętrzna) ten ruch wymusza. Gdy chcemy przesunąć po podłożu jakiś obiekt (np. szafę po podłodze) i przykładamy zewnętrzną siłę, pojawia się siła tarcia statycznego, przeciwdziałająca sile zewnętrznej. W efekcie obiekt się nie porusza, chociaż przyłożono do niego siłę zewnętrzną. W tym sensie możemy powiedzieć, że tarcie statyczne nie ma stałej wartości, ale się zmienia. Jest równe sile zewnętrznej i ma przeciwny do niej zwrot. Ruch ciała zaczyna się po przekroczeniu maksymalnej wartości tarcia statycznego, która wynosi:

$$T_{s,max} = f_s F_n \quad (3.9.)$$

gdzie f_s jest bezwymiarowym współczynnikiem tarcia statycznego.

O tarcu statycznym mówimy czasem, że przeciwdziała poślizgowi ciała - uniemożliwia ruch ślizgowy ciała względem podłoża (lub innego ciała). W tym sensie tarcie statyczne może mieć bardzo pożądaną wpływ na ruch ciał, powodując np. toczenie bez poślizgu kół naszego samochodu na śliskiej nawierzchni, lub umożliwiając nam chodzenie. W przypadku toczenia (bez poślizgu) tarcie statyczne występuje, chociaż samo ciało się porusza. Nie występuje jednak poślizg między punktem styku ciała z podłożem a podłożem.

Przywołując w myśli przykład z próbą przesunięcia szafy, szybko skojarzymy, że łatwiej

utrzymać ruch szafy niż ją w ruch wprowadzić. W związku z tym prawdziwy jest wniosek, że $f_s \gtrsim f_k$. Tak rzeczywiście jest w przypadku doskonałej większości materiałów. f_k oraz f_s są stałymi materiałowymi, typowymi dla rodzaju dwóch stykających się powierzchni (np. guma-asfalt, drewno-beton, metal-lód itd.). Współczynnik tarcia (kinetycznego i statycznego) nie zależy od: (i) masy ciała naciskającego, (ii) wielkości powierzchni styku ciał, (iii) prędkości ciała (dotyczy f_k).

W podejściu niektórych autorów podręczników do fizyki, tarcie statyczne zawsze określa się wzorem $T_s = f_s F_n$, a współczynnik f_s nie jest wówczas stały i zmienia się wraz ze wzrostem siły zewnętrznej. Wyróżnia się wówczas graniczny (maksymalny) współczynnik tarcia statycznego, $f_{s,max}$, który jest stabilizowany. My jednak będziemy uważać, że tarcie statyczne ma zupełnie inny charakter niż tarcie kinetyczne, i zmienia się ono proporcjonalnie do przykładanej siły zewnętrznej, aż do osiągnięcia pewnej granicznej wartości siły, dla której definiuje się współczynnik tarcia statycznego ($f_s = T_{s,max}/F_n$).

Na koniec należy wyjaśnić, że natura tarcia nie jest do końca poznana i nie dysponujemy satysfakcjonującą i prostą teorią tarcia. Współczynniki f_k i f_s często wyznacza się eksperymentalnie. Z pewnością tarcie jest zjawiskiem mikroskopowym i możemy je rozumieć jako efekt oddziaływania punktów styku chropowatych powierzchni ciała i podłoża. Oczywiście z jednej strony zmniejszamy tarcie wygładzając obie powierzchnie (redukując chropowatość), z drugiej jednak bardzo dokładnie wypolerowane powierzchnie trących o siebie ciał wykazują większe współczynniki tarcia - oddziałujących ze sobą na bardzo bliskiej odległości fragmentów powierzchni (atomów) jest po prostu więcej, skutkiem czego tarcie rośnie.

Przykłady

1. Ciało zsuwa się z równi o nachyleniu $\alpha = 30^\circ$. Proszę znaleźć przyspieszenie ciała, jeśli współczynnik tarcia (kinetycznego) wynosi $f = 0,2$?

Ciało zsuwa się w dół równi, więc siła tarcia będzie zwrócona w górę. Rolę siły nacisku pełni składowa Q_2 ciężaru. Tarcie wynosi $T = fQ_2$. W takim razie na siłę wypadkową składają się przeciwnie zwrócone siły $\vec{Q}_1$ i $\vec{T}$:

$$F_w = Q_1 - T \Rightarrow ma = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha \Rightarrow a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \approx 3,3 \text{ m/s}^2$$

W zadaniach, w których mamy do czynienia z ruchem występuje zawsze tarcie kinetyczne, więc nie będziemy dodatkowo oznaczać współczynnika tarcia przez f_k , a po prostu przez f .

2. Przy jakim najmniejszym kącie ciało będzie się zsuwać z równi pochyłej, jeśli współczynnik tarcia (kinetycznego) wynosi f ?

Wykorzystajmy wynik poprzedniego przykładu. W granicznym przypadku (gdy ciało jeszcze się nie zsuwa, ale za chwilę zacznie) możemy przyrównać przyspieszenie ciała do zera:

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \tan \alpha_{min} = f$$

Zatem, aby ciało mogło się zsuwać z równi, kąt musi być taki, aby jego tangens był większy od współczynnika tarcia kinetycznego. Inną sytuacją jest, gdy ciało spoczywa na równi i chcemy je dopiero wprowadzić w ruch. Wtedy musimy pokonać maksymalne tarcie statyczne. Kąt graniczny wynosi $\tan \alpha'_{min} = f_{s,max}$. Ponieważ $f_{s,max} > f$ (mamy na myśli $f = f_k$), to kąt graniczny $\alpha'_{min} > \alpha_{min}$ - znowu, trudniej ciało jest wprowadzić w ruch niż ruch podtrzymać.

3. Jaka musi być wartość siły F , którą dociskamy książkę do ściany, aby ta nie spadła, jeśli współczynnik tarcia książki o ścianę wynosi μ ?

Mamy tutaj do czynienia z sytuacją, kiedy rolę siły nacisku pełni nie ciężar, a inna siła. Mianowicie siła dociskająca książkę do ściany F . Zatem siła tarcia ma wartość $T = \mu F$ (jest to tarcie statyczne). Jest ona zwrócona do góry, bo ciało „chce” spadać w dół. Zatem II zasada dynamiki mówi nam, że:

$$ma = Q_1 - T = mg - \mu F$$

Aby książka nie spadła, siła wypadkowa musi być zero, skąd znajdujemy wartość poszukiwanej siły F :

$$mg - \mu F = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu}$$

4. Chłopiec ciągnie pod górę sanki za sznurek skierowany pod kątem $\beta = 30^\circ$ do stoku góry, który z kolei jest nachylony pod kątem $\alpha = 20^\circ$ do poziomu. Ile wynosi siła, z jaką chłopiec ciągnie sanki, jeśli współczynnik tarcia wynosi $f = 0,2$, a masa sanek jest równa $m = 20$ kg? Przyjmij, że chłopiec porusza się ruchem jednostajnym.

Po pierwsze musimy rozłożyć wszystkie siły na składowe. Nazwijmy siłę, z jaką chłopak ciągnie sanki F . Nie robimy rysunku, ale zgodnie z wytycznymi zadania składowe sił mają postać:

$Q_1 = mg \sin \alpha$ - składowa ściąająca ciężaru.

$Q_2 = mg \cos \alpha$ - składowa dociskająca ciężaru.

$F_1 = F \cos \beta$ - składowa równoległa siły F do równi.

$F_2 = F \sin \beta$ - składowa prostopadła siły F do równi, skierowana w górę.

Na siłę nacisku składają się siły Q_2 oraz F_2 , zwrócone przeciwnie, obie prostopadłe do równi. Zatem tarcie wynosi (zakładamy oczywiście, że mimo wszystko ciało dociska do równi, skąd $Q_2 > F_2$):

$$T = f(Q_2 - F_2) = f(mg \cos \alpha - F \sin \beta)$$

Teraz zapiszemy II zasadę dynamiki i znajdziemy siłę wypadkową działającą na sanki.

$$F_w = F_1 - Q_1 - T = F \cos \beta - mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha + f F \sin \beta$$

Z treści zadania wiemy, że sanki poruszają się ruchem jednostajnym, zatem I zasada dynamiki natychmiast mówi nam, że wypadkowa siła musi się równać zero. Wobec tego, z powyższego zapisu dostajemy wartość siły F , z jaką chłopiec ciągnie sanki:

$$F_w = 0 \Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta} = 109,7 \text{ N}$$

Jaki wynik otrzymamy, jeśli pominiemy tarcie?

Wystarczy w powyższym wzorze położyć $f = 0$. Mamy wtedy:

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta} = 79 \text{ N}$$

5. W układzie przedstawionym na Rysunku 3.3. znamy kąt nachylenia α do poziomu oraz współczynnik tarcia f między powierzchnią równi a ciałem m_1 . Masę krążka i nici oraz

tarcie w kółku zaniedbujemy. Dla jakiego stosunku mas m_2/m_1 układ pozostaje w spoczynku?

Mamy do czynienia z układem mas połączonych linami, a więc skorzystamy ze schematu przedstawionego w Rozdziale 3.3. Musimy tylko znaleźć siły działające na ciała m_1 i m_2 . Zakładamy początkowo, że układ porusza się w prawo, aby ustalić znaki sił. Zapisujemy układ równań i znajdujemy przyspieszenie:

$$\begin{cases} m_1 a = N - m_1 g \sin \alpha - f m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a = m_2 g - N \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{m_1 + m_2} g$$

Ponieważ chcemy, aby układ pozostawał w spoczynku, przyspieszenie ciała musi być zero, skąd dostajemy warunek na stosunek mas:

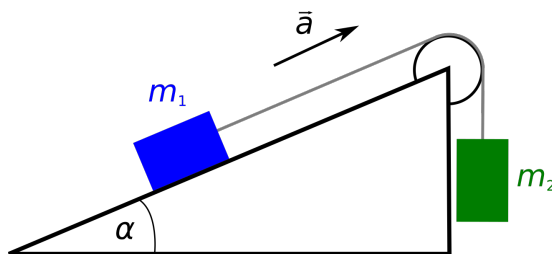
$$a = 0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha + f \cos \alpha$$

A co by było gdybyśmy założyli ruch w lewo? Wtedy zapisalibyśmy:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \alpha - N - f m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a = N - m_2 g \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha - f \cos \alpha$$

Otrzymaliśmy inny wynik! Jak to jest możliwe. Zauważmy, że przy zmianie kierunku ruchu (potencjalnego) zmieniły się zwroty wszystkich sił, z wyjątkiem tarcia. Tarcie jest przeciwnie zwrócone do kierunku ruchu (czyli kierunku a). W obu układach równań powyżej jest z minusem. Który wynik jest więc poprawny? Oba. To, który wybrać, zależy od relacji mas - jeśli $m_2 > m_1 (\sin \alpha + f \cos \alpha)$, to ruch będzie w lewo, jeśli $m_2 < m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha)$, to ruch będzie w prawo. Zauważmy, że w przedziale $(\sin \alpha - f \cos \alpha) < \frac{m_2}{m_1} < (\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ruch w ogóle jest niemożliwy. Układ zawsze będzie w spoczynku. Ponadto, musi być $\sin \alpha - f \cos \alpha > 0$, aby stosunek mas był dodatni. Z tej nierówności wynika znany nam warunek na kąt graniczny na równi: $\tan \alpha > f$. Prawdziwe jest następujące spostrzeżenie:

UWAGA! W zadaniach na układ ciał połączonych z tarciem, po otrzymaniu wyniku $a < 0$ nie wystarczy zmiana znaku, trzeba napisać nowy układ równań i na nowo go rozwiązać.



Rysunek 3.3.: Ilustracja do zadania z blokiem i równią.

Zadania

1. Z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ zsuwa się klocek, który w czasie $t = 1,7$ s pokonał całą jej długość $s = 90$ cm. Proszę znaleźć współczynnik tarcia klocka o równię.

2. Z prędkością v_0 popychamy klocek w górę równi o kącie nachylenia α . Jaka musi być jej wysokość, żeby klocek nie spadł z równi (nie przeleciał równi)? Współczynnik tarcia wynosi f .
3. Dwa ciała o masach M_1 i M_2 leżące na stole połączono linami między sobą i ze zwisającymi po obu stronach stołu ciałami m_1 i m_2 odpowiednio. Proszę znaleźć przyspieszenie układu uwzględniając tarcie o współczynniku f .
4. Rozważmy układ podobny do tego na Rysunku 3.3., w którym masa m_2 nie zwisa, ale leży na drugim zboczku równi o kącie β . Tarcie pomijamy. Jaki musi być kąt β , aby układ poruszał się ruchem jednostajnym w prawo. Przyjmij dane: $m_1 = 2m_2$, $\alpha = 15^\circ$.

3.4.2. Siła dośrodkowa

Siła dośrodkowa działa na każde ciało w ruchu krzywoliniowym, w szczególności po okręgu. Jest ona proporcjonalna do przyspieszenia dośrodkowego, a więc na podstawie (2.5.) zapiszemy jej definicję:

$$\vec{F}_d = m\vec{a}_d \quad F_d = ma_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (3.10.)$$

W ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze związku (2.39.) prędkości liniowej i kątowej w ruchu po okręgu. Zgodnie z definicją, kierunek siły dośrodkowej jest zawsze do środka krzywizny (okręgu). Wektor siły dośrodkowej jest przyczyną, dla której ciało porusza się po okręgu. Rolę $\vec{F}_d$ mogą pełnić różne siły, np. siła grawitacji lub Coulomba (o sile grawitacji dyskutujemy w Rozdziale 5.). Jeśli jakakolwiek siła ma cechy siły dośrodkowej (jest prostopadła do toru ruchu, w kierunku środka krzywizny), to możemy opowiedzieć, że ona pełni rolę siły przyciągającej.

W następnym rozdziale poznamy pojęcie *siły odśrodkowej*, która jest tzw. siłą bezwładności. Jest ona równa co do wartości sile dośrodkowej, ale ma przeciwny zwrot.

Przykłady

1. Z jaką częstotliwością musi wirować karuzela, aby siła dośrodkowa działająca na pasażera o masie 70 kg karuzeli była równa jego ciężarowi? Średnica karuzeli to $d = 3$ m. Wykorzystamy definicję siły dośrodkowej:

$$F_d = Q \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 \frac{d}{2} = mg \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{d}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{d}} = 0,41 \text{ Hz}$$

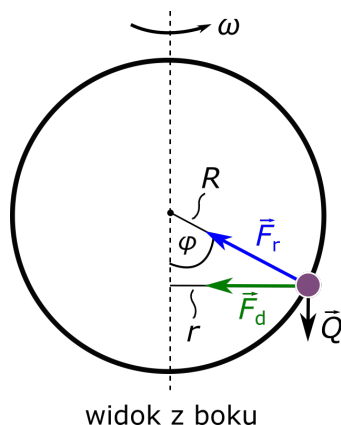
Wynik oczywiście nie zależy od masy.

2. Koralek nawleczono na drucik zwinięty w okrąg o promieniu R , który ustawiono w płaszczyźnie pionowej i wprowadzono w ruch wirowy wokół pionowej osi. Koralek wytrącono z położenia równowagi, więc wychylił się o kąt φ . Jak kąt φ zależy od częstotliwości wirowania drucianego koła ω ?

Na Rysunku 3.4. przedstawiamy sytuację fizyczną i rysujemy wszystkie siły. Na koralek działają 3 siły: siła grawitacji $Q = mg$, siła dośrodkowa $F_d = m\omega^2 r$, gdzie r jest odległością koralka od osi obrotu (w szczególności, ogólnie $r \neq R$), siła reakcji ze strony

druciku F_r , której nie znamy (nie musimy). W sytuacji, gdy koralik jest wychylony o kąt φ i nie odchyła się już bardziej (ani nie obniża), porusza się on po okręgu ze stałą szybkością. Jediną (wypadkową) siłą jest wtedy siła dośrodkowa. Innymi słowy: koralik już nie opada w dół, więc siła grawitacji jest równoważona przez składową pionową reakcji (spójrz na rysunek), więc możemy napisać, że

$$Q = F_r \cos \varphi \quad \text{oraz} \quad F_d = F_r \sin \varphi$$



Rysunek 3.4.: Ilustracja do zadania z koralikiem (siły w układzie inercyjnym).

Odległość r od osi obrotu, potrzebna do określenia siły F_d , jest równa: $r = R \sin \varphi$ (na podstawie rysunku: odcinek r jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego, naprzeciw kąta ostrego φ , a R jest przeciwprostokątną). W takim razie:

$$m\omega^2 R \sin \varphi = \frac{mg}{\cos \varphi} \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Należy skomentować, że dokonaliśmy rozwiązania w tzw. układzie inercyjnym odniesienia. Więcej o tym w następnym podrozdziale.

3.4.3. Siła oporu

W wielu zagadnieniach kinematyki i dynamiki często pomijamy wpływ na ruch ciał ośrodka, w którym ten ruch zachodzi. Rozważamy przypadki wyidealizowane. Rzeczywiście opór ośrodka bywa często pomijalnie mały, a z drugiej strony jest dość trudny do uwzględnienia. W rzeczywistych przypadkach należy go jednak uwzględniać. Łatwo sobie wyobrazić, że na ruch spadochroniarza z otwartą czaszą spadochronu siła oporu ze strony powietrza jest bardzo duża i w zasadniczej mierze determinuje on ruch skoczka. Z kolei w przypadku spadku małej, ciężkiej kulki w polu grawitacyjnym, opór powietrza odgrywa mniejszą rolę.

Miarą oporu ze strony ośrodka na ruch ciał jest **siła oporu**, która zależy od prędkości i jest przeciwnie skierowana do wektora prędkości (czyli kierunku ruchu, podobnie jak siła tarcia). Często dyskutuje się siłę tarcia jako przykład siły oporu, co jest prawdą. W tym skrypcie poświęcamy sile oporu zależnej od prędkości osobny podrozdział. Fakt zależności sił oporu (np. powietrza) łatwo zauważy każdy, kto jeździ na rowerze; im szybciej jedziemy,

tym bardziej „wiatr” rozwiewa nam włosy, czy uderza silniej w twarz (chodzi tu oczywiście o tzw. wiatr pozorny). Siłę oporu zdefiniujemy następująco:

$$\vec{F}_{op} = -b\vec{v}, \quad F_{op} = -bv \quad (3.11.)$$

gdzie stała b oznacza tzw. współczynnik oporu. Może on zależeć od wielu czynników, takich jak wielkość/kształt/opływowość obiektu, gęstość i rodzaj ośrodka, jego lepkość itd. W kolejnych częściach skryptu będziemy bardziej szczegółowo dyskutować opór hydrodynamiczny, gdzie te zależności pokażemy. Znak minus w powyższym wzorze (zapisany także dla relacji między wartością siły, a wartością prędkości) oznacza, że siła jest przeciwnie skierowana do wektora prędkości.

Podobnie jak tarcie, tak i opór ośrodka jest zjawiskiem, które fizyka opisuje bardziej fenomenologicznie niż teoretycznie. Dlatego często mówi się, że zależność siły od prędkości w pierwszej potęgzie dotyczy niewielkich prędkości. Przy większych prędkościach ruchu ciał, siła oporu może zależeć od drugiej, a nawet trzeciej potęgi prędkości (tak przyjmuje się np. w kontekście ruchu bolidów wyścigowych, czy rakiet). Wrócimy do tej kwestii później, teraz ograniczymy nasze rozważania do zależności danej wzorem 3.11.. II zasada dynamiki z uwzględnieniem siły oporu prowadzi do równania, które staje się trudne do rozwiązania. Rozważmy prosty przykład ruchu pod wpływem stałej siły $\vec{F}$ (np. grawitacji) i jednocześnie z oporem $\vec{F}_{op}$. Dodatkowo założmy ruch wzdłuż prostej (wszystkie wektory leżą na wspólnej prostej). Siła wypadkowa wynosi:

$$\vec{F}_w = \vec{F} + \vec{F}_{op} = \vec{F} - b\vec{v}, \quad ma = F - bv \quad (3.12.)$$

Z równania tego wynika, że przyspieszenie ciała zależy od prędkości. Pierwszy raz spotykamy się z taką zależnością. Powoduje ona, że równanie 3.12. staje się trudnym do rozwiązania równaniem różniczkowym: przypomnijmy sobie, że przyspieszenie jest pochodną prędkości po czasie (wzór 2.3.), u nas: $a = \frac{dv}{dt}$, zatem poszukiwana prędkość jako zależność od czasu, $v(t)$, występuje w tym równaniu w postaci pochodnej (stąd nazwa: równanie różniczkowe). Oczywiście w pewnych przypadkach, równanie to daje się rozwiązać stosunkowo nietrudno (spróbujemy w Przykładach).

Przykłady

1. Ustal wielkość tzw. prędkości granicznej v_{gr} skoczka spadochronowego, na którego podczas spadku w powietrzu, oprócz siły ciężkości, działa także siła oporu powietrza o współczynniku oporu b .

Spróbujmy najpierw prześledzić sytuację fizyczną podczas skoku na spadochronie. Zakładamy tu, że w trakcie swojego ruchu nie ma on innej składowej prędkości niż tylko pionowa. Tuż po wyskoczeniu z samolotu na skoczka działa w zasadzie tylko siła grawitacji (jego pionowa prędkość jest z początku zerowa, a po chwili ciągle jeszcze mała, więc siła oporu jest pomijalna). Wobec tego skoczek zaczyna ruch z dużym przyspieszeniem, równym początkowo g . Po chwili jego prędkość wzrasta, pojawia się zatem coraz większa siła oporu (przypomnijmy, że jest wprost proporcjonalna do prędkości). W myśl równania 3.12. siła wypadkowa, a także przyspieszenie, zaczyna maleć. Prędkość więc nadal się zwiększa, ale coraz wolniej, bo przyspieszenie jest coraz mniejsze od g . Możemy łatwo zauważyć, że po pewnym czasie prędkość jest już na tyle duża,

że siła oporu jest tak duża, że równoważy siłę grawitacji. Przyspieszenie jest wtedy 0 i prędkość skoczka przestaje wzrastać. Osiąga on wtedy właśnie prędkość graniczną. Równanie 3.12. w tej chwili wygląda więc następująco:

$$0 = mg - bv_{gr} \quad \Rightarrow \quad v_{gr} = \frac{mg}{b}$$

Jeśli założymy dość realistycznie, że prędkość graniczna (zwana czasem w literaturze fachowej skoków spadochronowych prędkością opadania) ma wartość $v_{gr} = 3 \text{ m/s}$, a masa skoczka (wraz ze spadochronem i całym sprzętem) to $m = 90 \text{ kg}$, to możemy oszacować, jakiego rzędu jest wielkość stałej oporu b . Z powyższego wzoru mamy: $b = \frac{mg}{v_{gr}} \approx 300 \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$. Przy okazji poznaliśmy jednostkę współczynnika oporu.

- *2. Po jakim czasie od rozpoczęcia ruchu koczek z poprzedniego zadania osiągnie połowę swojej prędkości granicznej?

Odpowiedź na to pytanie wymaga ustalenia zależności prędkości od czasu, a więc rozwiązania równania 3.12.. Jest to, przypomnijmy, równanie różniczkowe ze względu na v (matematycy posilkują się tutaj jeszcze kilkoma cechami: zwyczajne, I rzędu, o stałych współczynnikach i niejednorodne). Zakładamy przy tym tzw. warunek początkowy $v(t=0) = 0$ (skoczek zaczyna ruch bez pionowej prędkości). Pominiemy szczegóły rozwiązania równania i podamy tylko wynik, który zinterpretujemy. Zależność prędkości skoczka od czasu wynosi:

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

Zauważmy, że charakter tej zależności od czasu jest zgodny z naszymi oczekiwaniami; prędkość początkowo szybko rośnie, a z biegiem czasu rośnie coraz wolniej, aż po długim czasie (formalnie: nieskończenie długim) ustala się na poziomie $\frac{mg}{b}$, co jest prędkością graniczną. Pytanie jest więc o taki czas $t_{0,5}$, po którym $v(t_{0,5}) = 0,5 \frac{mg}{b}$. Wynosi on $t_{0,5} = \ln 2 \cdot \frac{m}{b}$, co dla danych z poprzedniego zadania daje $t_{0,5} \approx 0,2 \text{ s}$. Szybko! A po jakim czasie skoczek uzyskuje 90% v_{gr} ? $t_{0,9} = \ln 10 \cdot \frac{m}{b} \approx 0,7 \text{ s}$. Tak szybkie czasy osiągania prędkości granicznej w tym przypadku wynikają z dość dużej wartości współczynnika oporu $b = 300 \text{ kg/s}$. Przekłada się ona na całkiem dużą wartość siły oporu. Zastanówmy się, jak dużego obciążenia musi więc doznawać skoczek spadochronowy w trakcie otwierania spadochronu, kiedy bardzo nagle zaczyna działać na niego tak duża siła oporu.

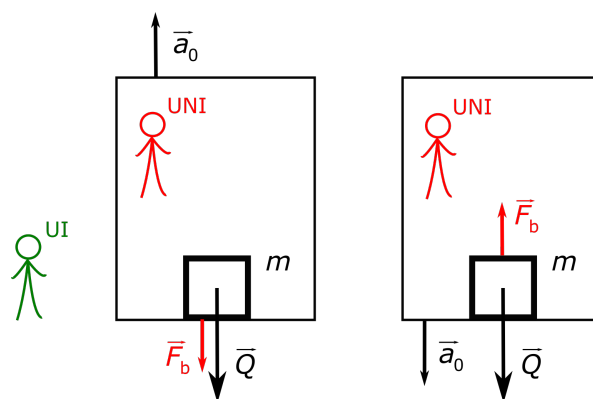
3.5. Układy nieinercyjne. Siła bezwładności

Jadąc windą, szczególnie taką starego typu, odczuwamy często dodatkowe obciążenie przy ruszaniu windy w górę. Jest to uczucie jakby zwiększonego ciężaru lub jakby „ktoś/coś” nas dociskało do podłoża. Analogicznie, gdy winda rusza w dół, czujemy się jakby „lżejsi”. Ruszająca lub hamująca winda doznaje przyspieszenia. W układach poruszających się z przyspieszeniem (nadany przez siłę zewnętrzną) działa dodatkowa siła, zwana **siłą bezwładności** lub **siłą pozorną**. Takie układy, w których występuje zewnętrzne przyspieszenie, nazywamy **nieinercyjnymi** układami odniesienia. Z kolei układ, który nie doznaje tego dodatkowego przyspieszenia nazwiemy **inercyjnym** układem odniesienia. Mówiąc krótko: **w nieinercyjnych układach odniesienia występują pozorne siły bezwładności**.

Siła bezwładności występująca w układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_0$ zdefiniowana jest wzorem:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_0 \quad (3.13.)$$

Jest więc przeciwnie skierowana do przyspieszenia. Wracając do przykładu z windą (patrz: Rysunek 3.5.), zauważamy, że jeśli winda rusza do góry ($\vec{a}_0$ jest zwrócone w górę), to siła $\vec{F}_b$ jest zwrócona w dół. Rzeczywiście pojawia się dodatkowa siła skierowana w dół, jak ciężar, dlatego nasze uczucie dociążenia, czy dociskania do podłogi windy, jest uzasadnione. W zadaniach, gdy będziemy potrzebowali wartości siły bezwładności, oczywiście zapiszemy $F_b = ma_0$ (bez minusa). Minus uwzględniamy na rysunku, odpowiednio rysując wektor siły $\vec{F}_b$ (przeciwnie do przyspieszenia $\vec{a}_0$).



Rysunek 3.5.: Siła bezwładności działająca na ciało w windzie poruszającej się z przyspieszeniem a_0 . Obserwatorzy „UI/UNI” należą odpowiednio do Układu Inercyjnego/Nieinercyjnego odniesienia.

Mówimy, że w układzie nieinercyjnym obserwator „widzi” siłę bezwładności. Obserwator ten sam doświadcza siły bezwładności. Jeżeli będziemy chcieli opisać ruch ciała w układzie nieinercyjnym, to powiemy, że opisujemy ruch ciała względem obserwatora poruszającego się (wraz z układem) z przyspieszeniem. Przeciwnie, obserwator z układu inercyjnego nie „widzi” ani nie doświadcza żadnej siły bezwładności. W przypadku naszej windy, obserwatorem takim może być np. ktoś stojący na parterze, który widzi tylko, że pasażer razem z windą porusza się z przyspieszeniem a_0 , a jedyną siłą, którą rejestruje, jest ciężar. Rozróżnienie między opisem w układzie inercyjnym a opisem w układzie nieinercyjnym wyjaśni się bardziej w Przykładach.

Przykłady

1. Kłódek o masie m umieszczamy na równi o kącie nachylenia α , która porusza się względem podłoża z pewnym przyspieszeniem a_0 w lewo (Rysunek 3.6.). Jaka musi być wartość przyspieszenia a_0 , aby kłódek pozostał nieruchomy względem równi? Rozważyc przypadek z tarcie statycznym między kłódek a równią, o współczynniku f .

Zadanie wprost klasyczne. Oczywiście zaczniemy od rozrysowania wszystkich sił działających na kłódek i rozłożenia ich na składowe (rysunek). Ruch kłodka opiszemy względem poruszającej się z przyspieszeniem a_0 równi, a więc w układzie nieinercyjnym. Na kłódek działa więc siła bezwładności F_b , którą zaznaczyliśmy na rysunku. Składowe sił

mają wartości:

$$Q_1 = mg \sin \alpha, \quad Q_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_{b1} = ma_0 \cos \alpha, \quad F_{b2} = ma_0 \sin \alpha$$

Pozostaje siła tarcia. Jak zawsze, $T = f \cdot F_n$, gdzie F_n to siła nacisku. Tym razem siła nacisku jest równa $Q_2 + F_{b2}$. Ruch równi w lewo powoduje dodatkowe dociskanie klocka do równi. Zwiększa się więc tarcie, a dzięki temu możliwe będzie, żeby klocek się nie zsuwał. Zatem tarcie:

$$T = fm(g \cos \alpha + a_0 \sin \alpha)$$

Chcemy, aby klocek spoczywał względem równi, musi więc występować równowaga składowych sił wzdłuż równi: $Q_1 = T + F_{b1}$. Składowe prostopadłe do równi się równoważą (siła reakcji podłoża równoważy siłę nacisku)- klocek nie zapada się w równię, ani nie unosi w powietrze.

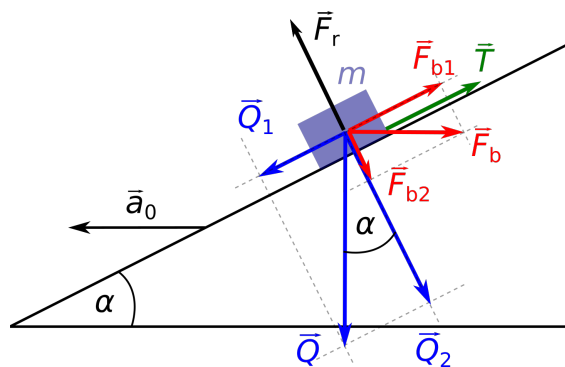
$$mg \sin \alpha = fm(g \cos \alpha + a_0 \sin \alpha) + ma_0 \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} g$$

To jest nasz wynik. Jeżeli pominiemy tarcie między klockiem a równią, wystarczy, że w powyższym wzorze położymy $f = 0$ i automatycznie otrzymamy $a_0 = g \tan \alpha$. Wyrowadzenie tego wzoru od początku (jakby zadanie było sformułowane z pominięciem tarcia) pozostawiamy jako dobre ćwiczenie dla Czytelnika.

Zadanie to można rozwiązać także w układzie inercyjnym (związany ze spoczywającym obserwatorem, np. stojącym obok). Obliczenia jednak są bardziej skomplikowane. Obserwator taki widzi, że klocek razem z równią porusza się z przyspieszeniem a_0 w lewo, nie widzi żadnej siły bezwładności. To, jak opisać ruch klocka w układzie inercyjnym, pozostawiamy bardziej dociekliwym Czytelnikom. Polecamy jednak opis w układzie nieinercyjnym, który zazwyczaj jest prostszy.

2. Z jaką maksymalnie prędkością samochód może wejść w zakręt na oblodzonej jezdni, gdy współczynnik tarcia kinetycznego kół o podłoże wynosi 0,2, żeby nie wypadł z zakrętu? Promień krzywizny zakrętu to 100 m.

Samochód jadący na zakręcie porusza się po łuku okręgu. Skoro porusza się po okręgu, to doznaje przyspieszenia dośrodkowego a_d , które zdefiniowaliśmy za pomocą wzoru (2.5.). Jest ono zależne od prędkości liniowej na obwodzie okręgu i promienia okręgu oraz skierowane do środka okręgu. Zakładając, że wartość prędkości samochodu się nie



Rysunek 3.6.: Ilustracja do zadania z klockiem na równi poruszającej się z przyspieszeniem a_0 . Opis w układzie nieinercyjnym.

zmienia (samochód nie przyspiesza ani nie zwalnia na zakręcie), przyspieszenie dośrodkowe jest jedynym przyspieszeniem w układzie.

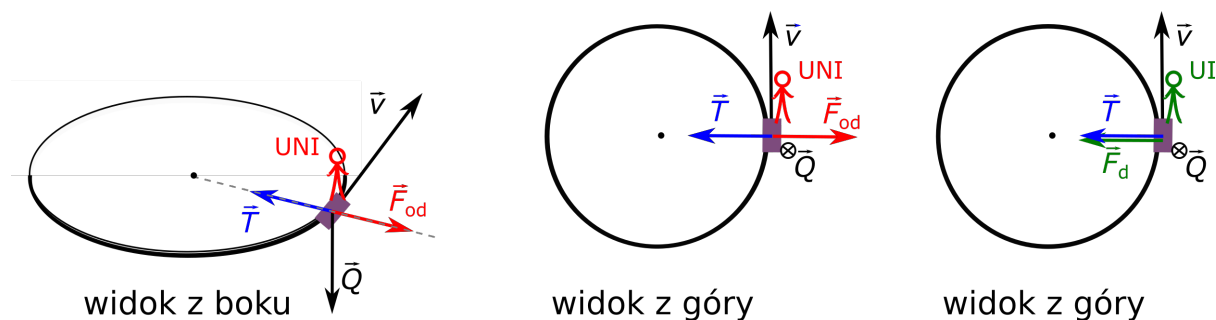
Opis w układzie nieinercyjnym

W układzie nieinercyjnym na samochód działa więc siła bezwładności:

$$\vec{F}_b = \vec{F}_{od} = m\vec{a}_d = \frac{mv^2}{r},$$

którą w przypadku ruchu po okręgu nazywamy siłą odśrodkową bezwładności. Skierowana jest ona na zewnątrz okręgu (przeciwnie do przyspieszenia dośrodkowego) i powoduje „wypadanie” samochodu z zakrętu. Co utrzymuje samochód na jezdni? Siła tarcia, która, jak zawsze, przeciwdziała (nawet potencjalnemu) ruchowi. Samochód „chciałby” poruszać się na zewnątrz zakrętu, więc tarcie działa w kierunku do środka okręgu (Rysunek 3.7.). Aby samochód nie wypadł z zakrętu siła tarcia musi równoważyć siłę odśrodkową:

$$\vec{F}_{od} + \vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{od} = T \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = fmg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{fgr} \approx 14 \text{ m/s} = 50 \text{ km/h}$$



Rysunek 3.7.: Ilustracja do zadania z samochodem na zakręcie. Opis w układzie **nieinercyjnym** (UNI) i **inercyjnym** (UI).

Opis w układzie inercyjnym

W układzie inercyjnym nie ma siły bezwładności. Obserwator z boku widzi tylko, że samochód jedzie na zakręcie, a więc działa na niego siła dośrodkowa $\vec{F}_d = m\vec{a}_d$ skierowana do środka okręgu, która powoduje zakrzywienie toru ruchu. Obserwator w układzie inercyjnym powie: siła tarcia pełni rolę siły dośrodkowej. Dzięki występowaniu tarcia samochód nie wypada z zakrętu i porusza się po okręgu. Zapiszemy wtedy:

$$\vec{F}_d = \vec{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = fmg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{fgr}$$

czyli dokładnie ten sam wynik. Tak musi być. Wybór opisu (w układzie inercyjnym lub nieinercyjnym) nie zmienia fizyki, a jedynie matematyczny opis.

Zadania

1. Winda rusza w dół. Jakie jest przyspieszenie windy w momencie ruszania, jeśli wskazanie wagi umieszczonej w tej windzie, na której leży 1-kilogramowy odważnik przez chwilę wyniosło 0,8 kg?

2. Równia pochyła o kącie nachylenia α porusza się w prawo (przeciwnie niż na Rysunku 3.6.). Jakie powinno być przyspieszenie a_0 , aby klocek nie wywierał nacisku na równię? Proszę rozważyć osobno przypadek z tarcie o współczynniku f i bez tarcia.
3. Chłopiec macha nad głową półkilogramowym kamieniem przywiązany do półmetrowego sznurka, tak że ten wiruje po okręgu w płaszczyźnie poziomej (sznurek zatacza płaskie okręgi w trakcie wirowania). Jaka może być maksymalnie częstość wirowania ω , aby sznurek, którego wytrzymałość na rozzerwanie wynosi 100 N, nie zerwał się. *Uwaga. Siłę odśrodkową bezwładności można wyrazić przy użyciu częstości: $F = m\omega^2 r$.*
4. Samochód sportowy startujący w wyścigu NASCAR musi pokonać z dużą prędkością ostre zakręty na torze. Aby mu to ułatwić, tor na zakrętach jest nachylony do płaszczyzny pod pewnym (dość dużym kątem). Jaki musi być kąt nachylenia toru na zakręcie, aby samochód pokonał zakręt o promieniu 50 m z prędkością 200 km/h? Załóżmy współczynnik tarcia kół o asfalt równy 1. *Odp. $\tan \alpha = \frac{\frac{v^2}{r} - fg}{\frac{fv^2}{r} + g}$, $\alpha \approx 36^\circ$.*

3.6. Dynamika bryły sztywnej

Bryła sztywna, w odróżnieniu od punktu materialnego, którego jedyną cechą jest masa, jest modelem fizycznym, w przypadku którego ważny jest również przestrzenny rozkład masy. Innymi słowy jest to ciało, które posiada masę i skończone rozmiary, a jego kształt nie zmienia się z tracie ruchu (kojarzymy z przymiotnikiem „sztywna”). Przykładami bryły sztywnej jest np. kula, walec, pręt, cienka obręcz, sześcian itd. Bryła sztywna, oprócz ruchu postępowego, może także wykonywać ruch obrotowy. Dlatego na początku tego rozdziału zdefiniujemy kilka podstawowych wielkości, opisujących dynamikę bryły sztywnej.

3.6.1. Moment bezwładności

Jest to odpowiednik masy w ruchu postępowym dla ruchu obrotowego bryły sztywnej. Moment bezwładności punktu materialnego dany jest przez:

$$I = mr^2 \quad (3.14.)$$

gdzie m jest masą punktu materialnego, r - odległością punktu od osi obrotu. Układ kilku punktów materialnych ma moment bezwładności będący sumą momentów wszystkich mas składowych: $I_c = \sum_i m_i r_i^2$ (np. masy punktowe umieszczone w narożach kwadratu).

Bryła sztywna cechuje się ciągłym rozkładem masy, więc moment bezwładności bryły sztywnej podaje definicja całkowa:

$$I = \int r^2 dm \quad (3.15.)$$

Całkowanie w (3.15.) odbywa się po masie bryły, jednak najczęściej zmienia się zmienną całkowania dm tak, by całkować po jakiejś zmiennej przestrzennej (długości, promieniu, kącie, w zależności od symetrii bryły). W poniższych Przykładach wyjaśniamy metodę obliczania momentu bezwładności w oparciu o wzór (3.15.).

Gdy mówimy o momencie bezwładności zawsze mamy na myśli (i musimy to sprecyzować)

moment bezwładności bryły względem jakiejś osi obrotu. Moment bezwładności, podobnie jak masa, jest miarą bezwładności ciała (w ruchu obrotowym), czyli mówi nam o tym, jak trudno wprawić ciało w ruch. Logiczne jest więc, że będzie on miał inną wartość dla różnych osi obrotu (np. łatwiej obracać w palcach długopis względem jego środka geometrycznego niż względem jednego z końców). Generalnie większą bezwładność wykazuje masa rozłożona dalej od osi obrotu. Definicyjne momenty bezwładności podstawowych brył sztywnych (wymienione w Przykładach) podane są zazwyczaj względem osi przechodzących przez ich środek geometryczny. Aby znaleźć moment bezwładności I_O względem dowolnej osi obrotu O , równoległej do osi przechodzącej przez środek geometryczny S , stosujemy **tw. Steinera**:

$$I_O = I_S + md^2 \quad (3.16.)$$

gdzie I_S jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek geometryczny bryły, m - masą bryły, a d - odległością między obiema osiami (osie są równoległe!).

Tw. Steinera pozwala np. znaleźć moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jeden z jego końców, bez potrzeby stosowania całkowego wzoru (3.15.).

Moment bezwładności dowolnego układu brył sztywnych lub punktów materialnych jest zawsze sumą momentów bezwładności wszystkich ciał składowych (względem ustalonej osi) - podobnie jak masa całkowita układu jest sumą mas ciał wchodzących w skład tego układu. Tym samym, jeśli będziemy rozważać układ: obracająca się tarcza + ciężarek umieszczony na niej, całkowity moment bezwładności będzie sumą momentów bezwładności tarczy (bryła sztywna, np. walec...) i ciężarka (punkt materialny).

Przykłady

1. Znajdziemy moment bezwładności pręta o długości L i masie m względem osi przechodzącej przez jego środek geometryczny (Rysunek 3.8.).

Bardzo wygodnie będzie nam całkować po długości pręta (w granicach od $-L/2$ do $L/2$). Dlatego musimy wyrazić element masy przez element długości. Zrobimy to w oparciu o gęstość liniową masy pręta λ (zakładamy, że pręt jest jednorodny i w każdym punkcie wykonany z materiału o tej samej gęstości):

$$\lambda = \frac{m}{L} \Rightarrow m = \lambda \cdot L \Rightarrow dm = \lambda \cdot dx = \frac{m}{L} dx$$

W takim razie całka (3.15.) będzie równa:

$$I_S = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L} \cdot 2 \cdot \frac{L^3}{8} = \frac{1}{12} mL^2$$

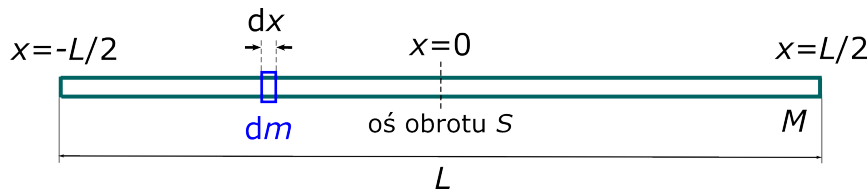
2. Korzystając z tw. Steinera znajdziemy moment bezwładności I_O względem osi przechodzącej przez koniec pręta.

Odległość „starej” osi od „nowej” wynosi $d = L/2$. W takim razie zastosowanie tw. Steinera (3.16.) daje:

$$I_O = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

3. Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środek geometryczny dla podstawowych brył (m - masa, L - długość, R - promień):

- pręt: $I = \frac{1}{12}mL^2$
- walec: $I = \frac{1}{2}mR^2$
- kula: $I = \frac{2}{5}mR^2$
- sfera: $I = \frac{2}{3}mR^2$
- cienka obręcz (rura cylindryczna): $I = mR^2$
- wydrążony walec (r - promień wewnętrzny, R - promień zewnętrzny): $I = \frac{1}{2}m(r^2 + R^2)$



Rysunek 3.8.: Ilustracja do obliczenia momentu bezwładności pręta.

3.6.2. Moment siły

Moment siły jest wektorem zdefiniowanym jako:

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.17.)$$

gdzie $\vec{F}$ jest wektorem siły, a $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym wektora $\vec{F}$ względem osi obrotu (tzw. ramię siły, jego długość jest równa odległości punktu zaczepienia siły od osi obrotu). Zwrot i kierunek wektorów $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}_F$ określa reguła śruby prawoskrętnej.

Jeśli kąt pomiędzy ramieniem siły a wektorem siły jest prosty, to wartość momentu siły jest po prostu: $M_F = rF$. Siła zaczepiona w osi obrotu daje zerowy moment, innymi słowy taka siła nie może wprowadzić ciała w obrót. Jeśli na bryłę działa kilka sił, to wypadkowy moment siły znajdujemy dodając wektorowo wszystkie momenty składowe, podobnie jak w przypadku wypadkowej siły. Wektorowo - to znaczy z uwzględnieniem kierunków i zwrotów. Najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, kiedy momenty sił leżą wzdłuż jednego kierunku, wtedy wartość wypadkowego momentu sił znajdujemy dodając algebraicznie (ze znakami) wartości momentów składowych. Jako dodatnie traktujemy momenty tych sił, które „pomagają” ciału w obrocie. Ujemny znak mają momenty sił, które „przeszkadzają” w obracaniu.

3.6.3. II zasada dynamiki dla bryły sztywnej

Zwana też ogólnie: II zasadą dynamiki w ruchu obrotowym. Jest ona dokładnie tak samo sformułowana jak w przypadku II zasady dynamiki w ruchu postępowym (3.2.), tylko wielkości „liniowe” zastępujemy „obrotowymi”, tzn. $F \leftrightarrow M_F$, $m \leftrightarrow I$, $a \leftrightarrow \varepsilon$.

II zasada dynamiki w ruchu obrotowym mówi, że jeśli na ciało (bryłę) działa niezrównoważony wypadkowy moment sił, to ciało to porusza się ruchem przyspieszonym obrotowym z przyspieszeniem kątowym ε , a stałą proporcjonalności jest moment bezwładności.

$$M_{F(w)} = I \varepsilon, \quad \vec{M}_{F(w)} = I \vec{\varepsilon} \quad (3.18.)$$

Użycie tej zasady polega na znalezieniu wypadkowego momentu sił, co pozwala nam ustalić przyspieszenie kątowe obracającego się ciała. Często dodatkowo stosujemy związek przyspieszenia kąтового z przyspieszeniem liniowym (2.39.), żeby dostać dodatkowe równanie pozwalające znaleźć kolejną niewiadomą. Zróbmy przykład.

Przykłady

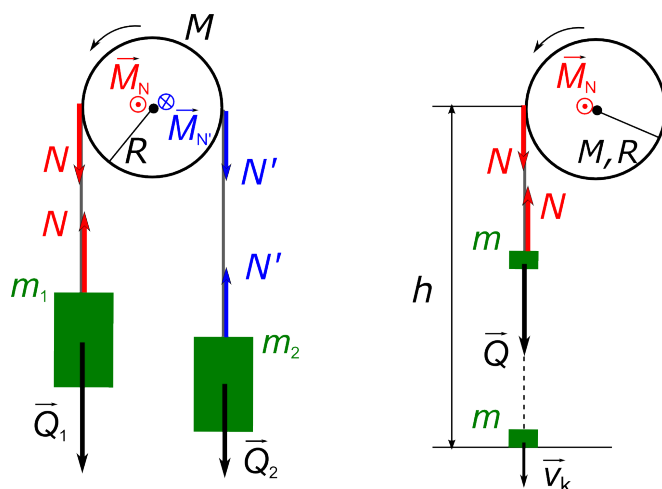
1. Przez ruchomy bloczek w kształcie niskiego walca o masie M i promieniu R przewieszono linę, na której po obu stronach zawieszono ciężarki o masach m_1 i m_2 (Rysunek 3.9. po lewej). Chcemy znaleźć przyspieszenie układu (uwzględniając ruch obrotowy bloczka, co we wcześniejszych wariantach takich zadań pomijaliśmy).

Uwaga! Tym razem siły naciągu liny po obu stronach bloczka są różne (na Rysunku 3.9. siły N i N'). Dlaczego? Bo bloczek się obraca, a więc musi na niego działać niezerównoważony moment sił. Siły N i N' są zwrócone przeciwnie (względem liny i ruchu bloczka), więc jeśli byłyby równe co do wartości, ich momenty zerowałyby się. Znajdujemy wypadkowy moment siły działającej na bloczek:

$$M_w = RN - RN'$$

Siła N daje dodatni moment siły, bo działa w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu bloczka. Moment bezwładności bloczka jako walca wynosi $I = \frac{1}{2}MR^2$. Stosując II zasadę dynamiki (w ruchu postępowym mas m_1 i m_2 oraz w ruchu obrotowym bloczka o masie M), a także związek przyspieszeń (2.39.), zapisujemy układ równań, który następnie dodajemy stronami:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - N \\ m_2 a = N' - m_2 g \\ I \varepsilon = RN - RN' \\ \varepsilon = \frac{a}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a = m_1 g - N \\ m_2 a = N' - m_2 g \\ \frac{1}{2}Ma = N - N' \end{cases} \Rightarrow \text{dodajemy} \\ \text{stronami} \Rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$



Rysunek 3.9.: Ilustracja do Przykładu 1 (po lewej) i Przykładu 2 (po prawej).

2. Mamy linę nawiniętą na bleczek o masie M i promieniu R zamocowany na wysokości h nad ziemią. Do liny przymocowane jest ciało o masie m . Zwalniamy bleczek tak, że lina zaczyna się rozwijać, a ciało m spada w dół. Chcemy znaleźć prędkość końcową, z jaką ciało m uderzy o ziemię.

Sytuację obrazuje Rysunek 3.9. po prawej. Po pierwsze, znajdziemy przyspieszenie układu, a potem ułożymy równania ruchu dla masy m . Pozwoli nam to znaleźć prędkość końcową.

$$\begin{cases} ma = mg - N \\ I\varepsilon = RN \\ \varepsilon = \frac{a}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = mg - N \\ \frac{1}{2}Ma = N \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{dodajemy} \\ \text{stronami} \end{array} \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$

Masa m porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z policzonym przed chwilą przyspieszeniem a bez prędkości początkowej. Zatem jej równania ruchu są następujące:

$$v(t) = at$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Po czasie $t = t_r$ masa m pokona drogę h , stąd $s(t_r) = h \Rightarrow t_r = \sqrt{\frac{2h}{a}}$. Zatem prędkość końcowa v_k :

$$v_k = v(t_r) = at_r = a = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{1}{2}M}}$$

Możemy także zapytać ile obrotów wykona bleczek do chwili osiągnięcia przez ciało m ziemi. Ilość obrotów możemy znaleźć jako stosunek całkowitego kąta zatoczonego przez bleczek i miary kąta pełnego (2π), czyli $N = \frac{\theta_c}{2\pi}$. Aby znaleźć całkowity kąt, napiszemy równanie na położenie katowe w czasie i podstawimy $t = t_r$:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \Rightarrow \theta_c = \theta(t_r) = \frac{1}{2} \frac{a}{R} \left(\sqrt{\frac{2h}{a}} \right)^2 = \frac{h}{R}$$

Zatem ilość obrotów:

$$N = \frac{h}{2\pi R}$$

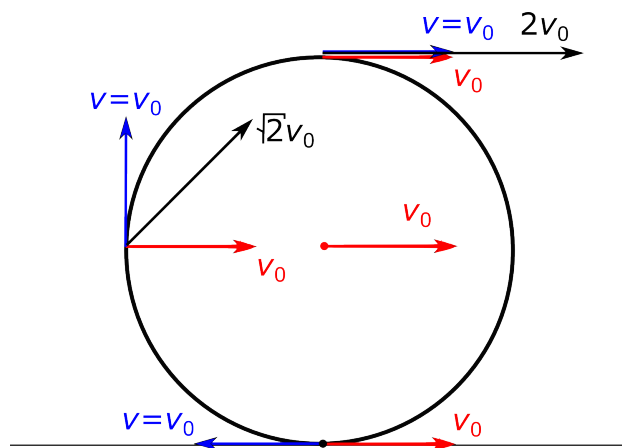
Zauważcie, że wzór $h/2\pi R$ wyraża stosunek długości rozwiniętej linki (masa m pokonała drogę $s = h$, a więc rozwinęła linkę na długość h) i obwodu blecza (bleczek jest walcem o promieniu R). To jest przecież logiczne, bo cała linka o długości h była pierwotnie nawinięta na walec o obwodzie $2\pi R$. Stąd stosunek długości linki do obwodu blecza wyraża ile razy linka nawinięta była na walec, czyli ile obrotów musiał wykonać walec podczas rozwijania linki.

3.6.4. Toczenie

Wyobraźmy sobie, że patrzymy na koło rowerowe w ruchu. Zauważamy, że zarówno całe koło przemieszcza się po prostej, jak i punkty na obwodzie koła obracają się wokół środka

koła. To właśnie nazywamy toczeniem - złożenie ruchu postępowego środka masy oraz ruchu obrotowego wokół środka masy.

Każdy punkt należący do toczącego się ciała ma prędkość v_0 , z jaką ruchem postępowym przemieszcza się środek masy ciała. Ponadto każdy punkt na obwodzie ma prędkość liniową ωr - patrz: wzór (2.39.). Jeśli mówimy o toczeniu bez poślizgu (Rysunek 3.10.), to punkt styczności ciała z podłożem ma zerową prędkość. Z tego natychmiast wynika, że prędkość liniowa na obwodzie ωr musi być równa v_0 . To jest istotą toczenia bez poślizgu.



Rysunek 3.10.: Toczenie koła. W przypadku bez poślizgu: $v = v_0$.

Skoro traktujemy toczenie jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego, aby opisać dynamikę toczenia musimy jednocześnie skorzystać z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego (3.2.) i obrotowego (3.18.). W Przykładach rozwiązujemy problem toczącego się na równi walca. Wcześniej jednak musimy przedyskutować kwestię tarcia w przypadku toczenia.

Tarcie podczas toczenia

W przypadku toczenia z poślizgiem, kiedy punkt styku toczącego się ciała ślizga się po podłożu, mamy do czynienia ze zwykłym tarcie kinetycznym (o współczynniku tarcia f). Szukając siły wypadkowej działającej na środek masy ciała, uwzględniamy siłę tarcia w formie $T = T_k = f_k \cdot F_n$, gdzie F_n jest siłą nacisku.

Jeśli rozważamy toczenie bez poślizgu, sytuacja jest inna. Żadne powierzchnie o siebie nie trą, więc nie ma tarcia kinetycznego. Punkt styku ciała nie przemieszcza się wzdłuż podłoża, więc tarcie jest statyczne. Przy czym nie potrafimy określić jego wartości, bo niekoniecznie ma ono wartość maksymalną, dla której określony jest współczynnik f_s . Tarcie T jest jedną z niewiadomych w problemie toczenia się ciał bez poślizgu.

Moglibyśmy zapytać, czy tarcie w ogóle występuje w układzie? Owszem, siła tarcia musi występować, bo inaczej nie byłoby mowy o obrocie ciała względem środka masy z przyspieszeniem kątowym (patrz: Rysunek 3.11.). Siła tarcia jest jedyną siłą dającą niezerowy moment w środku masy. Moment siły grawitacji liczony względem osi obrotu jest zero, bo siła ta zaczepiona jest w osi obrotu. Pamiętamy, że aby wprowadzić ciało w ruch obrotowy z przyspieszeniem trzeba przyłożyć niezerowy moment siły, zatem tarcie jest niezbędne do wprowadzenia w obrót toczącego się ciała, o ile ruch ten ma być zmienny. Tak jest np. w przypadku ciał toczących się na równi. Jeżeli jednak toczenie występuje po płaskim podłożu, to,

aby było ono możliwe, nie jest potrzebny moment siły (ciało może poruszać się ruchem jednostajnym obrotowym). Wówczas, zgodnie z I zasadą dynamiki w ruchu obrotowym bryły sztywnej (więcej o tym powiemy w Podrozdziale 3.6.5.), na ciało nie może działać wypadkowy moment siły, więc tarcie statyczne nie występuje.

Przykłady

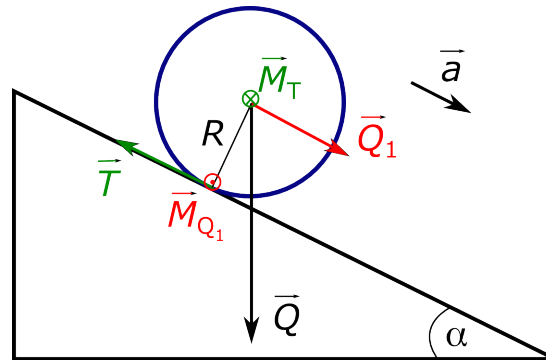
1. Rozwiążemy problem walca toczącego się na równi - Rysunek 3.11..

Zapisujemy układ równań wiążący II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego:

$$\begin{cases} Ma = Q_1 - T \\ I\varepsilon = RT \end{cases}$$

Pamiętamy, że moment bezwładności walca wynosi $I = \frac{1}{2}MR^2$ oraz przypominamy sobie związek $a = \varepsilon R$ (2.39.) dla przyspieszeń, obowiązujący przy toczeniu bez poślizgu. Podstawiając te związki do układu, dostajemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} Ma = Mg \sin \alpha - T \\ \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} = RT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = Mg \sin \alpha - T \\ T = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}g \sin \alpha \\ T = \frac{1}{3}Mg \sin \alpha \end{cases}$$



Rysunek 3.11.: Toczenie walca na równi.

3.6.5. Statyka bryły sztywnej

Statyka zajmuje się ciałami lub układami ciał pozostającymi w spoczynku. Wiemy, że pojedyncze ciało, traktowane jak punkt materialny, nie będzie się poruszać (lub będzie się poruszać ruchem jednostajnym, ale tylko jeśli uprzednio miało prędkość), jeśli spełniona jest I zasada dynamiki. Bryła sztywna z kolei, oprócz ruchu postępowego, może wykonywać ruch obrotowy. Dla warunku statyki potrzebna jest więc także I zasada dynamiki w ruchu obrotowym. Możemy więc podać 2 warunki statyki bryły sztywnej:

Warunki statyki bryły sztywnej:

$$\begin{aligned} \text{I zasada dynamiki ruchu postępowego: } \sum_i \vec{F}_i &= 0 \\ \text{I zasada dynamiki ruchu obrotowego: } \sum_i \vec{M}_{F,i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19.)$$

Zatem żeby bryła, lub cały układ (np. flaga zawieszona na drzewcu zamocowanym do ściany budynku, podtrzymywana linką) pozostawał w spoczynku, nie tylko wszystkie siły działające na niego muszą się równoważyć, ale także nie może występować żaden niezrównoważony moment siły. Aby poprawnie określić warunki statyki, musimy zidentyfikować wszystkie siły działające na układ, w tym także siły reakcji (np. ze strony ściany, lub punktów podparcia itd.). Pamiętajmy, że siła reakcji jest zawsze skierowana prostopadle do kierunku siły nacisku. Czasem wygodne może się okazać rozłożenie siły reakcji na składowe wzdłuż „wygodnych” kierunków. W szczególności nie interesują nas siły nacisku, a tylko te siły, które są przyłożone do naszego ciała lub układu ciał.

Druga wskazówka dotyczy wyboru potencjalnej osi obrotu. Układ ma się nie obracać w ogóle, względem dowolnego punktu, zatem zupełnie dowolnie możemy wybrać punkt obrotu, względem którego definiujemy momenty sił. Skoro zupełnie dowolnie - to możemy wybrać najbardziej „wygodny” punkt, a więc pewnie taki, do którego przyłożonych jest najwięcej sił. Ich momenty się wtedy zerują i mamy mniej składników w równaniach. Zupełnie na wycucie możemy też określić znaki wartości momentów sił w równaniach algebraicznych: siły, które „usiłują” obracać w lewo mogą dawać ujemne momenty, a siły „usiłujące” obracać w prawo - dodatnie.

Warunki statyki możemy wykorzystać we wszelkich zagadnieniach dot. dźwigni (podparty jednostronnie, dwustronnie), drabiny opartej o ścianę, obiektów zawieszonych na masztach itd. Przedyskutujemy niektóre z nich w Przykładach.

Przykłady

1. W którym punkcie należy podeprzeć metalową sztangę (pręt o długości 150 cm i jednorodnej masie 10 kg), ułożoną poziomo, na której dwóch końcach zamocowano ciężarki (punktowe masy 25 i 50 kg), aby układ pozostawał w spoczynku?

„Sprytny” (a na pewno „szybki”) Czytelnik zgadłby może wynik bez liczenia i odpowiedziałby, że punkt podparcia musi znajdować się w odległości od jednego końca sztangi danej ułamkiem długości sztangi takim jak stosunek masy ciężarka na jednym końcu do masy obu ciężarków. Tak byłoby rzeczywiście, gdyby pominąć masę samej sztangi. Dokonajmy poprawnych obliczeń, aby poznać prawdziwą odpowiedź na nasze pytanie. Zastosujemy warunki statyki dane wzorem 3.19.. Najpierw ustalmy wszystkie siły i momenty sił działające na układ (Rysunek 3.12.a). Masę sztangi zaczepiamy dokładnie w połowie jej długości. Ciężarki traktujemy jak punkty materialne.

Warunek równowagi sił: $\vec{Q}_M + \vec{Q}_p + \vec{Q}_m + \vec{R} = 0$ (wektorowo zawsze suma!).

Algebraicznie: $Q_M + Q_m + Q_p = R$.

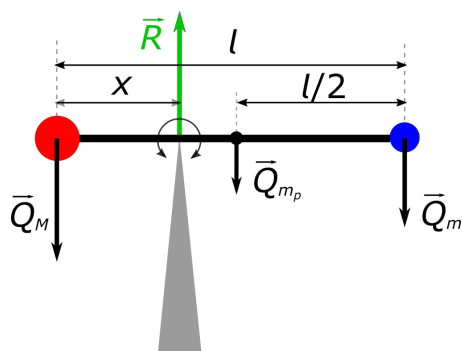
Powyższe równanie w o-zasadzie nic nam nie daje - znamy wszystkie masy, a więc i ciężary, więc możemy co najwyżej policzyć siłę reakcji. W tym przypadku nie jest nam ona potrzebna, bo nie będzie nic wnosić do równania dla momentów sił. Wektor $\vec{R}$ jest zaczepiony w punkcie podparcia (oczywiście), a w tym punkcie przyjmujemy też punkt obrotu. Moglibyśmy go przyjąć gdzie indziej - wtedy oczywiście potrzebowalibyśmy znać wartość siły reakcji.

Warunek równowagi momentów: $\vec{M}_M + \vec{M}_m + \vec{M}_p + \vec{R} = 0$.

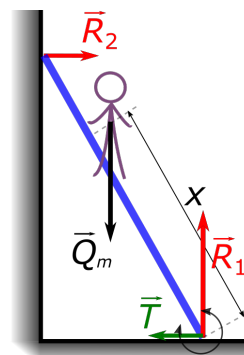
Algebraicznie: $M_M = M_p + M_m \Leftrightarrow Mgx = m_p g \left(\frac{l}{2} - x\right) + mg(l - x)$.

Po przekształceniu obliczamy niewiadomą: $x = \frac{m + \frac{1}{2}m_p}{M + m - \frac{1}{2}m_p}l$, a po podstawieniu danych otrzymujemy: $x = 0,43l = 64,5 \text{ cm}$.

Gdyby pominąć wpływ masy sztangy (czyli kładąc $m_p = 0$), otrzymalibyśmy spodziewany wynik: $x = \frac{m}{M+m}l = \frac{1}{3}l = 50 \text{ cm}$.



(a) Ilustracja do zadania ze sztangą z Przykładu 1. Realizacja zasady działania dźwigni obustronnej.



(b) Ilustracja do zadania z drabiną z Przykładu 2. Realizacja zasady działania dźwigni jednostronnej.

Rysunek 3.12.

2. Drabinę o długości $L = 300 \text{ cm}$, ustawioną na podłożu o współczynniku tarcia $f = 0,4$, oparto o ścianę pod kątem $\theta = 65^\circ$ do poziomu. Masę drabiny i tarcie o ścianę pomijamy. Na jaką wysokość względem drabiny może wejść człowiek o masie $m = 70 \text{ kg}$, aby drabina nie przewróciła się?

Zacznijmy od rysunku, na którym zaznaczymy wszystkie siły działające na układ (Rysunek 3.12.b). Ponieważ w punkcie podparcia drabiny o podłoże przyłożonych jest najwięcej sił, tam przyjmujemy punkt (potencjalnego) obrotu drabiny - wyzerujemy wtedy aż dwa momenty sił, przez co układ równań będzie prostszy do rozwiązania. Nasz problem jest teraz dwuwymiarowy - mamy do czynienia z siłami skierowanymi w różnych kierunkach płaszczyzny pionowej. Dlatego zapiszemy 2 równania na równowagę sił: w kierunku poziomym i pionowym. Zauważmy, że drabina naciska na podłoże i ścianę w dwóch punktach, ze strony podłoża i ściany działają więc na drabinę 2 siły reakcji. Zapiszmy od razu algebraicznie:

$$\begin{cases} R_2 = T \\ (T = fR_1) \\ R_1 = Q_m \\ (Q_m = mg) \\ M_{Q_m} = M_{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_2 = fmg \\ R_1 = mg \\ mgx \sin(90^\circ + \theta) = fmg l \sin(180^\circ - \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f \tan \theta l \\ x = 257 \text{ cm} \end{cases}$$

Na tak ustawioną drabinę człowiek może wejść niemal do samego jej końca. Jest to możliwe dzięki stosunkowo dużemu kątowi ustawienia drabiny oraz współczynnikowi tarcia drabiny o podłoże. Gdyby ustawić drabinę na lodzie przy zerowym tarcu, to nawet przy kącie 89° ustawienia drabiny nie byłoby możliwe wejście na nią.

Zadania

1. Na bryłę sztywną zamocowaną w punkcie $[0,0]$ układu współrzędnych działają dwie siły o wektorach $\vec{F}_1 = [-3, -2] \text{ N}$, $\vec{F}_2 = [4, 0] \text{ N}$, których ramiona wynoszą $\vec{r}_1 = [-2, 0] \text{ cm}$ i

- $\vec{r}_2 = [3, 0]$ cm, odpowiednio. (a) Oblicz momenty obu sił względem punktu zaczepienia. (b) Jaki jest wektor wypadkowego momentu sił? (c) Jeśli moment bezwładności bryły wynosi $0,05 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, to z jakim przyspieszeniem kątowym obraca się bryła?
2. Znajdź przyspieszenie kuli toczącej się na równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$.
 3. Jaką minimalną prędkość należy nadać toczącej kuli, aby ta zdołała dotrzeć do szczytu równi o wysokości $h = 1 \text{ m}$ i kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ (wystarczy, że na szczycie równi się zatrzyma)?
 4. Szpula o promieniu zewnętrznym R jest ciągnięta po płaskim podłożu siłą F przyłożoną do nici nawiniętej na jej wewnętrzny korpus o promieniu $r < R$. Oblicz przyspieszenie liniowe szpuli, jeśli siła jest przyłożona pod kątem α do poziomu. Kiedy (dla jakiego kąta) ruch szpuli będzie w lewo, kiedy w prawo, a kiedy szpula będzie spoczywać? Zakładamy ruch bez poślizgu.
 5. Na jaką wysokość może wyjść na drabinę z Przykładu 2 w Podrozdziale 3.6.5. człowiek, jeśli dodatkowo uwzględniamy masę drabiny $M = 10 \text{ kg}$, tarcie o ścianę o współczynniku $f_s = 0,1$, (*) oraz siłę pomocnika dopychającego drabinę do ściany siłą 100 N skierowaną poziomo?

3.7. Zasada zachowania pędu

Pęd jest wielkością wektorową zdefiniowaną przez iloczyn masy ciała i wektora prędkości:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.20.)$$

Wektor pędu ma więc kierunek i zwrot prędkości ciała. Masa jest stałą proporcjonalności. Wypowiemy teraz zasadę zachowania pędu, obok zasady zachowania energii najważniejszą zasadę w mechanice.

W układach izolowanych od otoczenia (bez wpływu sił zewnętrznych) całkowity pęd układu jest zachowany:

$$\vec{p}_c = \text{const} \Rightarrow \vec{p}_{u(p)} = \vec{p}_{u(k)} \quad (3.21.)$$

gdzie $\vec{p}_{u(p)}$, $\vec{p}_{u(k)}$ oznaczają odpowiednio pęd układu na początku i na końcu (rozpatrywanego procesu, np. zderzenia).

Zauważmy, że zachowany jest pęd jako wektor. Zatem zarówno wartość całkowitego pędu, jak i jego kierunek i zwrot się nie zmieniają. W przypadku procesów w jednym wymiarze (np. zderzeń wzdłuż jednej prostej) zapiszemy zasadę zachowania w postaci algebraicznej (nie wektorowej), analogicznie do wyrażenia (3.21.). Wybieramy wówczas pewną oś, względem której będziemy określać znak pędu. Pędy w kierunku dodatnim osi będą miały znak dodatni, pędy zwrócone przeciwnie - ujemny. Zazwyczaj wybieramy oś x zwróconą w prawo. Dla przypadku ruchu w dwóch wymiarach musimy zadbać o zachowanie pędu jako 2-wymiarowego wektora, a więc zapiszemy zasadę zachowania obu składowych wektora pędu układu. Wyjaśni się to w Przykładach.

Należy sobie jasno powiedzieć, że zasada zachowania pędu jest spełniona zawsze w układach izolowanych. Co to znaczy izolowanych? Takich, które nie oddziałują z jakimś układem zewnętrznym, a składniki układu oddziałują jedynie ze sobą. Np. w przypadku zderzeń pomijamy oddziaływanie grawitacyjne, także wpływ tarcia między powierzchniami obu ciał; natomiast w przypadku zderzeń niesprężystych uwzględniamy stratę energii na zmianę kształtu ciała, czy zmianę jego temperatury. W przypadku zasady zachowania energii, o której będziemy mówić w Rozdziale 4.2., obszar jej stosowalności jest bardziej ograniczony. Należy więc zapamiętać - pęd układu izolowanego jest zawsze zachowany.

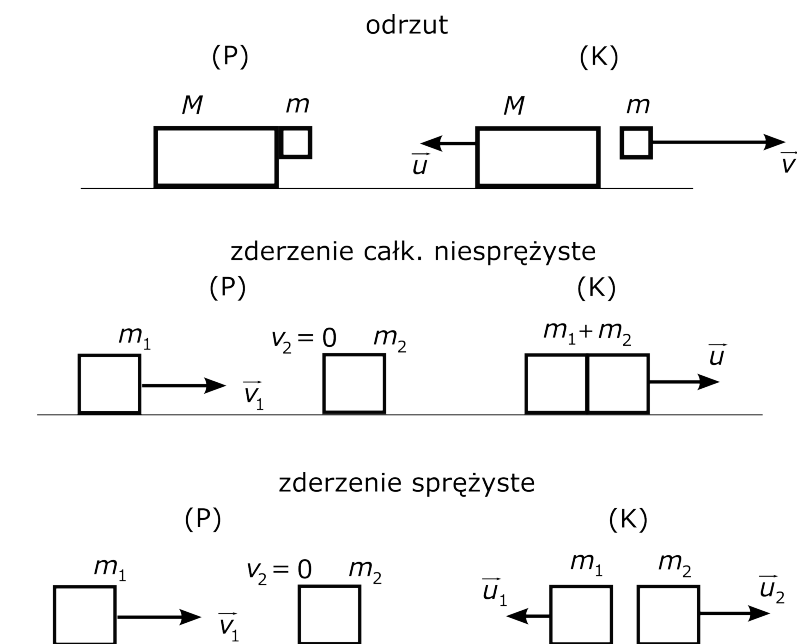
W następnych kilku podrozdziałach omówimy kilka podstawowych procesów fizycznych, typowych na zastosowanie zasady zachowania pędu (z.z.p.). Przy jej pomocy najczęściej będziemy chcieli znaleźć prędkości i ich kierunki w danych procesach.

3.7.1. Odrzut

Z odrzutem mamy do czynienia, gdy początkowo spoczywający układ wysyła jakieś ciało obdarzone prędkością (np. armata wystrzeliwuje pocisk lub jądro atomowe emituje neutron podczas rozpadu promieniotwórczego). Sytuacja jest zobrazowana na Rysunku 3.13. u góry. Zapisujemy zasadę zachowania pędu:

$$\begin{cases} p_{u(p)} = 0 \\ p_{u(k)} = mv - Mu \end{cases} \quad p_{u(p)} = p_{u(k)} \Rightarrow 0 = mv - Mu \Rightarrow u = \frac{mv}{M} \quad (3.22.)$$

Wyliczyliśmy prędkość odrzutu ciała o masie M , oczywiście możemy obliczyć dowolną inną wielkość, znając pozostałe. Jeśli armata o masie 2 t wystrzeliwuje 1-kilogramową kulę z prędkością 100 m/s, to jej prędkość odrzutu wynosi tylko 5 cm/s.



Rysunek 3.13.: Przykłady zastosowań zasady zachowania pędu.

3.7.2. Zderzenie niesprężyste

Ze zderzeniem niesprężystym mamy do czynienia, gdy po zderzeniu niecała energia układu została wymieniona między ciałami. Ma to miejsce wtedy, gdy ciała w wyniku zderzenia zmieniają swój kształt (wtedy część energii zderzenia idzie na odkształcenie ciała, łatwo to sobie wyobrazić w przypadku zderzenia np. samochodów), lub zmienia się ich energia wewnętrzna (np. rośnie temperatura, choćby w przypadku uderzenia kulą śniegową o ścianę, gdy ta w wyniku zderzenia może się stopić). Istotą jest tutaj to, że pęd jest owszem zachowany, ale całkowita energia nie. Mówimy o zderzeniach całkowicie niesprężystych, gdy ciała w wyniku zderzenia szczepiają się i dalej poruszają razem. Rozpatrzmy taki właśnie przypadek, zobrazowany na Rysunku 3.13. w środku.

Ciało m_1 uderza z prędkością v_1 w spoczywające ciało m_2 i dalej poruszają się razem z prędkością u , którą chcemy wyliczyć.

$$\begin{cases} p_{u(p)} = m_1 v_1 \\ p_{u(k)} = (m_1 + m_2) u \end{cases} \quad p_{u(p)} = p_{u(k)} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (3.23.)$$

Często w zadaniach dot. zderzeń niesprężystych pytamy o stratę energii kinetycznej (albo ogólnie: ubytek energii). Aby ją znaleźć, wystarczy, mając prędkości ciał układu przed i po zderzeniu, znaleźć różnicę całkowitej energii kinetycznej układu przed (E_{kc1}) i po zderzeniu (E_{kc2}). Tzn. strata energii kinetycznej w zderzeniu niesprężystym wynosi

$$\Delta E = E_{kc1} - E_{kc2} \quad (3.24.)$$

Pęd jest zawsze zachowany, także w zderzeniach niesprężystych, gdzie występuje strata energii (mówimy: dyssypacja energii), bo w układzie działają tylko siły wewnętrzne, które się wzajemnie znoszą (zgodnie z III zasadą dynamiki). Siła akcji ciała uderzającego jest równoważona siłą reakcji ciała uderzanego. To rozumowanie jest prawdziwe także w przypadku wszelkich rozpadów ciał, wybuchów pocisków itd., o ile nie występuje żadna siła zewnętrzna (układ jest izolowany).

3.7.3. Zderzenie sprężyste

W zderzeniu sprężystym zachodzi przekaz całej energii, obowiązuje zasada zachowania energii, a pędy zderzających się wymieniają. Obie zasady zachowania pozwalają nam znaleźć dwie nieznane wielkości. Niech ciało m_1 zderzy się sprężysto ze spoczywającym ciałem m_2 - Rysunek 3.13.. Chcemy znaleźć z jaką prędkością poruszają się oba ciała po zderzeniu. Ale! Musimy najpierw założyć kierunek prędkości ciała m_1 po zderzeniu. Może się ono odbić lub poruszać dalej w prawą stronę. Załóżmy, że się odbija i odwraca kierunek prędkości, czyli po zderzeniu porusza się w lewo. Ten wybór nie ma wpływu na poprawność wyniku. O tym, czy ciało m_1 się odbije czy nie, decyduje relacja mas obu ciał, podobnie jak w przypadku ciał połączonych linami lub na bloczku, gdy większa masa wymuszała wybór kierunku przyspieszenia całego układu. Jeśli nasze założenie o kierunku okaże się złe, to prędkość u_1 wyjdzie ujemna, a wtedy powiemy, że ciało m_1 po zderzeniu jednak dalej porusza się w prawo.

Zapisujemy zarówno zasadę zachowania pędu, jak i energii (kinetycznej w tym przypadku). Szczegóły dot. zasady zachowania energii omawiamy w Podrozdziale 4.2. Rozdziału 4.

$$\begin{cases} p_{u(p)} = m_1 v_1 \\ p_{u(k)} = m_2 u_2 - m_1 u_1 \end{cases} \quad p_{u(p)} = p_{u(k)} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 u_2 - m_1 u_1$$

$$\begin{cases} E_{kc1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \\ E_{kc2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases} \quad E_{kc1} = E_{kc2} \Rightarrow m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \quad (3.25.)$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 u_2 - m_1 u_1 \\ m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{m_2}{m_1} u_2 - v_1 \\ \cancel{m_1 v_1^2} = \frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 - 2m_2 v_1 u_2 + \cancel{m_1 v_1^2} + m_2 u_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m_2}{m_1} u_2 - v_1 \\ u_2 \left[\left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) u_2 - 2v_1 \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \\ u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (3.26.)$$

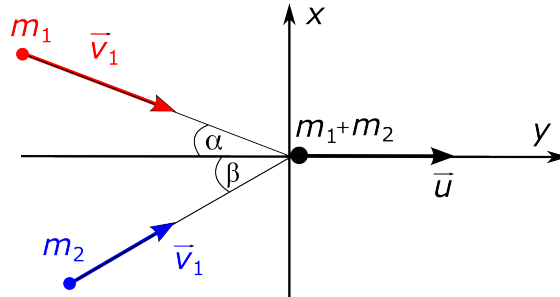
Skomentujmy wyniki. Szybkość u_2 ciała o masie m_2 wyszła bezwzględnie dodatnia, tak musiało być, bo ciało m_2 nie miało innej możliwości, jak zacząć poruszać się w prawo. Natomiast ciało m_1 ma dwie możliwości - jeśli $m_2 > m_1$, to $u_1 > 0$, czyli będzie się poruszało w lewo, tak jak przyjęliśmy. W przeciwnym wypadku, gdy $m_2 < m_1$, ciało m_2 po zderzeniu będzie się dalej poruszać w prawo. Cięższy obiekt niechętnie zmienia kierunek ruchu.

3.7.4. Zderzenie w dwóch wymiarach

Rozważmy zderzenie całkowicie niesprężyste dwóch ciał tak jak na Rysunku 3.14., przy czym znamy kąt padania jednego ciała (np. α) i prędkości początkowe obu ciał i chcemy znaleźć kąt padania drugiego ciała oraz wspólną prędkość obu ciał po zderzeniu.

$$X : \begin{cases} p_{u(p)x} = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta \\ p_{u(k)x} = (m_1 + m_2) u \end{cases} \quad Y : \begin{cases} p_{u(p)y} = -m_1 v_1 \sin \alpha + m_2 v_2 \sin \beta \\ p_{u(k)y} = 0 \end{cases} \quad (3.27.)$$

$$\begin{cases} p_{u(p)x} = p_{u(k)x} \\ p_{u(p)y} = p_{u(k)y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \sin \alpha \\ u = \frac{m_1 v_1 \cos \alpha + \sqrt{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (3.28.)$$



Rysunek 3.14.: Zderzenie dwóch ciał na płaszczyźnie.

3.7.5. Wahadło balistyczne

Wahadło balistyczne jest to masa M zawieszona na dwóch linach. Masa m (pocisk) uderza w masę M z prędkością v całkowicie niesprężysto. Układ taki może służyć do pomiaru prędkości pocisku (np. w wojskowości). Przykładową realizacją takiej sytuacji jest przypadek pocisku trafiającego w klocek, który grzeźnie we wnętrzu klocka i odchyła go od pionu o pewien kąt. Rozważmy taki przypadek, zilustrowany na Rysunku 3.15..

Problem ma dwa etapy. W pierwszym etapie rozważamy zderzenie całkowicie niesprężyste pocisku m z wahadłem M . Stosując zasadę zachowania pędu obliczymy prędkość u układu pocisk+wahadło po zderzeniu. Będzie to prędkość początkowa w ruchu wahadła w drugim etapie, gdzie stosując zasadę zachowania energii całkowitej znajdziemy kąt o jaki odchyli się wahadło. Znając ten kąt obliczymy prędkość uderzenia pocisku.

$$\text{Moment zderzenia:} \quad \begin{cases} p_{u(1)} = mv \\ p_{u(2)} = (m + M)u \end{cases} \quad p_{u(2)} = p_{u(2)} \Rightarrow u = \frac{mv}{m+M} \quad (3.29.)$$

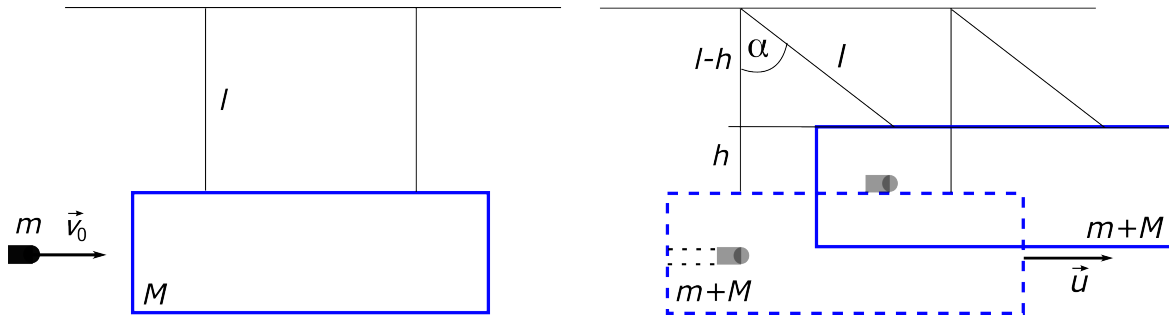
$$\text{Po zderzeniu:} \quad \begin{cases} E_{c2} = \frac{(m+M)u^2}{2} \\ E_{c3} = (m + M)gh \end{cases} \quad E_{c2} = E_{c3} \Rightarrow h = \frac{u^2}{2g}$$

Na Rysunku 3.15. widzimy, że wysokość h na jaką wzniesie się środek ciężkości wahadła możemy związać z kątem α i długością lin następująco:

$$\frac{h-l}{l} = \cos \alpha \Rightarrow h = l(1 - \cos \alpha) \quad (3.30.)$$

Łącząc powyższe wyniki dostajemy:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{m^2 v^2}{2g(m+M)^2} = l(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \quad (3.31.)$$

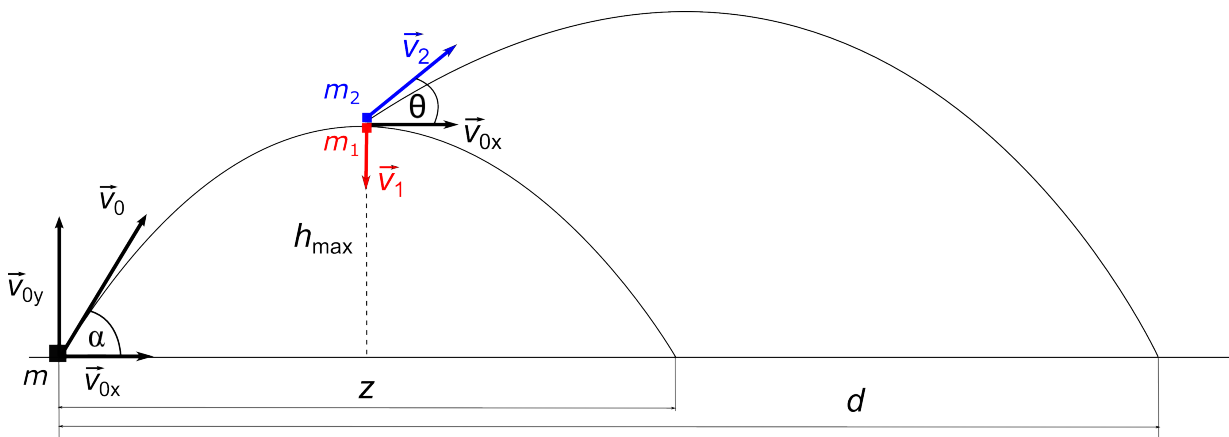


Rysunek 3.15.: Wahadło balistyczne. W pierwszym etapie (1)→(2): z.z.p. w zderzeniu niesprężystym. W drugim etapie (2)→(3): z.z.E. przy odchyłaniu wahadła.

3.7.6. Rozpad pocisku

Wyobraźmy sobie sytuację, w której pocisk wystrzelony pod kątem α po poziomie z prędkością v_0 w najwyższym punkcie swojego lotu rozrywa się na 2 części o równych masach, z których pierwsza upada pionowo w dół ze znaną prędkością. Należy znaleźć wartość i kierunek prędkości drugiej części pocisku. Sytuację obrazuje Rysunek 3.16.. Oczywiście w przypadku rozpadu pocisku na części nie będzie obowiązywać zasada zachowania energii, ponieważ do rozerwania potrzebna była dodatkowa energia wytworzona np. wskutek wybuchu. Pod koniec obliczeń przyjmijmy: $m_1 = m_2 = 0,5 m$.

$$\begin{aligned}
 X : \begin{cases} p_{u(p)x} = mv_0 \cos \alpha \\ p_{u(k)x} = m_2 v_2 \cos \theta \end{cases} & \quad Y : \begin{cases} p_{u(p)y} = 0 \\ p_{u(k)y} = m_2 v_2 \sin \theta - m_1 v_1 \end{cases} \\
 \begin{cases} p_{u(p)x} = p_{u(k)x} \\ p_{u(p)y} = p_{u(k)y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2 \sin \theta} \\ mv_0 \cos \alpha = m_1 v_1 \operatorname{ctg} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} \theta = \frac{2v_0 \cos \alpha}{v_1} \\ v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2 \sin \theta} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (3.32.)$$



Rysunek 3.16.: Ilustracja rozpadu pocisku.

Aby wyrazić końcowy wzór na prędkość v_2 musielibyśmy wyrazić $\sin \theta$ przez funkcję $\operatorname{ctg} \theta$. Nie będziemy tego robić.

Zadajmy sobie teraz pytanie - w jakiej odległości od punktu wystrzelenia pocisku upadnie część m_2 po rozerwaniu? Ciało m_2 wykonuje rzut ukośny pod kątem θ , jednak zaczyna swój

lot na wysokości h_{max} i w odległości $\frac{1}{2}z$ wg oznaczeń z rysunku. Spróbujmy najpierw znaleźć wzór na zasięg takiego rzutu. Skorzystamy w równań położenia (2.9.), przypominamy sobie wzory na h_{max} i z .

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}z + v_{2x}t \\ y(t) = h_{max} + v_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (3.33.)$$

Czas do upadku na ziemię t_u znajdujemy z warunku $y(t_u) = 0$. Stąd

$$y(t_u) = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + 2gh_{max}}}{g} \quad (3.34.)$$

Odrzucamy rozwiązanie z minusem jako ujemne. Odległość upadku ciała m_2 od punktu wyrzelenia pocisku m , czyli odległość d , obliczymy jako $x(t_u)$.

$$\begin{aligned} d = x(t_u) &= \frac{1}{2}z + \frac{v_{2x}}{g} \left(v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + 2gh_{max}} \right) = \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{v_{2x}}{g} \left(v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + v_0^2 \sin^2 \alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.35.)$$

Wiemy już, że potrzebujemy znać jedynie składowe prędkości v_2 części pocisku m_2 . Przepiszemy więc równania (3.32.) tak, aby obliczyć v_{2x} oraz v_{2y} .

$$\begin{cases} mv_0 \cos \alpha = m_2 v_{2x} \\ m_2 v_{2y} - m_1 v_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{2x} = \frac{1}{2}v_0 \cos \alpha \\ v_{2y} = v_1 \end{cases} \quad (3.36.)$$

Podstawiając składowe prędkości v_2 do wzoru (3.35.) znajdujemy końcowy wzór na odległość d , zależny tylko od v_0, v_1 i α .

Zadania

1. Dwa ciała o masach $m_1 = 10$ kg i $m_2 = 5$ kg zderzają się czołowo całkowicie niesprężysto. Z jaką szybkością i w jakim kierunku poruszają się po zderzeniu, jeśli przed zderzeniem miały prędkości $v_1 = 2$ m/s i $v_2 = 3$ m/s. Jaka jest strata energii kinetycznej w tym zderzeniu?
2. Kula bilardowa uderza w inną, spoczywającą kulę o takiej samej masie tak, że po rozbiciu obie kule odlatują pod kątem prostym w kierunkach x i y z tymi samymi prędkościami u . Pod jakim kątem względem osi x i z jaką prędkością padała uderzająca bila? Załóżmy zderzenie sprężyste.
3. Odchylone wahadło balistyczne o masie M puszczamy tak, że w najniższym położeniu zderza się z pociskiem o masie m i prędkości v . O jaki kąt musiało być odchylone wahadło, jeśli po zderzeniu cały układ się zatrzymał? Długość lin, na których zawieszono wahadło, wynosi l . Jaki warunek na stosunki mas musi być spełniony, aby problem był fizycznie możliwy?

3.8. Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu jest wielkością wektorową zdefiniowaną jako:

$$L = I\omega, \quad \vec{L} = I\vec{\omega} \quad (3.37.)$$

gdzie I jest momentem bezwładności ciała, a ω - prędkością kątową w ruchu obrotowym. Postać ta jest więc zupełnie analogiczna do wzoru na pęd $p = mv$.

Zasada zachowania momentu pędu mówi, że wektor całkowitego momentu pędu układu izolowanego jest stały i niezmienny w trakcie ruchu

$$\vec{L}_c = \text{const} \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 \quad (3.38.)$$

Najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, że układ zmienia swój rozkład masy, a przez to moment bezwładności, wobec czego i prędkość kątowa się zmienia. Interesuje nas tylko zmiana wartości prędkości kątowej, przez co stosujemy zasadę zachowania momentu pędu postaci $L_1 = L_2$, tak jak w przypadku jednowymiarowym dla zasady zachowania pędu. Spójrzmy na prosty Przykład.

Przykłady

1. Na brzegu obracającej się tarczy o promieniu R i masie M stoi mrówka o masie m (traktujemy ją jak punkt materialny). Układ obraca się wokół osi tarczy w częstotliwością ω_1 . Co zmieni się, jeśli mrówka przemaszeruje do środka tarczy?
Odpowiedź jest prosta i daje ją zasada zachowania momentu pędu. Oczywiście zmieni się częstość obrotu układu, bo zmienił się jego moment bezwładności (przemieszczenie mrówki zmieniło rozkład masy). Całkowity moment bezwładności układu tarcza+mrówka na początku wynosi $I_1 = I_t + I_m$, jest po prostu sumą momentów bezwładności tarczy i mrówki. Mrówka jest punktem materialnym o masie m , oddalonym od osi obrotu o R , więc jej moment bezwładności wynosi $I_m = mR^2$. Dla tarczy (cienkiego walca) $I_t = \frac{1}{2}MR^2$. Zatem:

$$I_1 = I_m + I_t = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \left(m + \frac{1}{2}M\right) R^2$$

Po przejściu mrówki do środka tarczy, jej moment bezwładności wynosi zero, bo znajduje się ona dokładnie w osi obrotu. Pozostaje tylko moment bezwładności tarczy $I_2 = I_t$. Zapisujemy zasadę zachowania momentu pędu:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}M\right) R^2\omega_1 = \frac{1}{2}MR^2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{M + 2m}{M}\omega_1$$

2. Do wirującej w częstotliwością $f_1 = 10$ Hz kuli o promieniu $R_1 = 10$ cm i masie $M_1 = 0,5$ kg dołączamy w pewnym momencie drugą kulę o masie $M_2 = 0,2$ kg i nieznanym promieniu R_2 , szczepiając je wzdłuż osi obrotu pierwszej kuli (w związku z tym kierunek prędkości kątowej się nie zmienia). Trzeba znaleźć R_2 , jeśli wiemy, że połączone kule wykonują 5 obrotów na sekundę ($f_2 = 5$ Hz).

Moment bezwładności układu po połączeniu: $I_2 = \frac{2}{5} (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2)$. Zapisujemy zasadę zachowania momentu pędu:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \frac{2}{5} M_1 R_1^2 \cdot 2\pi f_1 = \frac{2}{5} (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2) \cdot 2\pi f_2 \\ &\Rightarrow R_2^2 = \frac{M_1}{M_2} R_1^2 \left(\frac{f_1}{f_2} - 1 \right) \Rightarrow R_2 = 15,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Zadania

1. W naczyniu o kształcie powłoki sferycznej wypełnionym wodą zrobiono u dołu otwór, przez który po pewnym czasie cała woda wylała się. Puste sferyczne naczynie wiruje z częstotliwością $f_2 = 10$ Hz. Z jaką częstotliwością musiało wirować naczynie wypełnione wodą? Masa naczynia $M = 100$ g, promień sfery $R = 10$ cm, gęstość wody $\rho = 1$ g/cm³.
2. W wyniku kolapsu grawitacyjnego pewna planeta kurczy się tak, że doba na tej planecie skraca się n -razy. Proszę obliczyć ile razy i jak zmienił się promień tej planety, jeśli założymy jej kulisty kształt. Jak zmienia się gęstość masy tej planety?
3. Baletnica w piruecie z rękami ściągniętymi do siebie wykonuje $f_1 = 6$ obr./s. Ile obrotów będzie wykonywać, jeśli wyciągnie jedną rękę, a ile gdy obie? Potraktujmy rękę jak punkt materialny o masie $m = 2$ kg umieszczony w odległości $d = 75$ cm od osi obrotu. Moment bezwładności baletnicy z rękami ściągniętymi do tułowia to $I = 0,45$ kg·m².
4. Proszę rozwiązać to samo zadanie z baletnicą zakładając, że wyciągniętą rękę traktujemy jako pręt o masie m i długości d obracający się wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców.

3.9. Ruch układu o zmiennej masie*

W tym dodatkowym podrozdziale zastanowimy się nad problemem ruchu ciał o zmiennej masie. Chodzi tu np. o ruch rakiety, która wydala gazy wylotowe, albo ruch barki, na którą z podajnika sypie się piasek itp. Zagadnienie to zasadniczo nie jest łatwe i z pewnością wykracza poza podstawowy kurs fizyki, dlatego omówione zostało w podrozdziale z gwiazdką.

W rozdziale 3.1. podaliśmy II zasadę dynamiki w postaci uogólnionego wzoru (3.3.). Należy tutaj wyjaśnić, że siła $\vec{F}_w$ w tym wzorze to siła wypadkowa, a więc całkowita siła działająca na ciało lub układ ciał. Zatem jest to suma wszelkich sił zewnętrznych (np. siła ciągu silnika, oporu powietrza, grawitacji). Siły wewnętrzne (np. siła odrzutu gazów wylotowych rakiety) nie wnoszą wkładu do siły wypadkowej, zgodnie z III zasadą dynamiki. Wzór ten jest słuszny także dla ruchu ciał o zmiennej masie, jednak należy pamiętać, że w równaniu dynamiki musimy uwzględnić wszystkie masy (także wielkość ubytku lub przyrostu masy) oraz wszystkie siły zewnętrzne. W konkretnych problemach fizycznych zapiszemy II zasadę dynamiki następująco:

$$d\vec{p}_c = \vec{p}' - \vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \vec{F}_z dt \quad (3.39.)$$

Zmiana pędu dotyczy w tym przypadku całego układu (np. nie tylko samej rakiety, ale też i gazów wylotowych). Chodzi więc nie o pęd samego ciała o zmiennej masie, ale całego układu.

Wyjaśni się to w Przykładach. Skomentujmy, że jeśli w układzie nie występowałyby żadne siły zewnętrzne, $\vec{F}_z = 0$, to zmiana pędu $\frac{d\vec{p}_c}{dt} = 0$. Z tego zaś wynika zasada zachowania pędu: $\vec{p}_c = \text{const.}$ Tak rzeczywiście musi być - w układzie izolowanym (bez udziału sił zewnętrznych) pęd całego układu jest zachowany.

W tym sensie można powiedzieć, że wzór (3.3.), lub równoważnie wzór (3.39.), dotyczy ruchu ciała o stałej masie, przez co zachowana jest konsystencja ze wzorem podstawowym (3.2.), czyli $\vec{F}_w = m\vec{a}$. Chodzi tutaj o to, że w powyższym wzorze (3.39.) uwzględniamy wszystkie masy w układzie - np. masę rakiety (która się zmienia) i masę gazów wylotowych, a więc całkowitą masę układu, która jest stała. Nie jest to więc wzór na II zasadę dynamiki dla ciała, ale układu ciał. Taką interpretację preferują autorzy niektórych podręczników. Jednocześnie za „dobry” wzór na II zasadę dynamiki dla ciała o zmiennej masie podaje się wówczas:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_z + \mu \vec{u} \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_z + \mu \vec{w} \quad (3.40.)$$

gdzie:

- m jest zmienną w czasie masą ciała, a tempo zmian wyraża wielkość $\mu = \frac{dm}{dt}$ w jednostkach kg/s (jeśli masa przyrasta, to $\mu = +\frac{dm}{dt}$, a jeśli maleje, to $\mu = -\frac{dm}{dt}$),
- $\vec{v}$ jest wektorem prędkości ciała w układzie inercyjnym (względem spoczywającego obserwatora - np. na brzegu, z którego obserwowany jest ruch barki, albo na powierzchni Ziemi, skąd obserwuje się start rakiety),
- $\vec{w}$ jest wektorem prędkości ubytku/przyrostu masy (np. ziarenek piasku wylatującego/spadającego z/na barkę lub cząsteczek gazów wylotowych) względem nieruchomego obserwatora (w układzie inercyjnym),
- $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ jest wektorem prędkości ubytku/przyrostu masy względem poruszającego się ciała (barki lub rakiety),
- $\vec{F}_z$ jest wektorem sił zewnętrznych (np. sił oporu powietrza, ciągu silnika barki itp.)

Na pierwszy rzut oka wzory (3.39.) oraz (3.40.) wydają się ze sobą sprzeczne. Jednak w pierwszym z nich mamy na myśli zmianę całkowitego pędu układu (a więc przykładowo układu rakiet-gazy wylotowe), natomiast w drugim tylko zmianę pędu ciała o zmiennej masie (a więc np. samej rakiety). W tym drugim przypadku $\vec{p} = m\vec{v}$ oraz $d\vec{p} = m d\vec{v} + dm \vec{v}$.

Jeszcze inaczej, na podstawie zasady zachowania pędu całkowitego, można powiedzieć, że przyrost pędu ciała o zmiennej masie $d\vec{p}$ jest równy sumie: (i) popędu siły zewnętrznej $\vec{F}_z$ w przedziale czasu $(t, t + dt)$, $\vec{F}_z dt$, oraz (ii) pędu unoszonego przez masę dm (np. masę gazów wylotowych lub piasku), $dm \vec{w}$, co prowadzi do wzoru:

$$d\vec{p} = \vec{F}_z dt + dm \vec{w} \quad (3.41.)$$

zgodnego ze wzorem (3.40.).

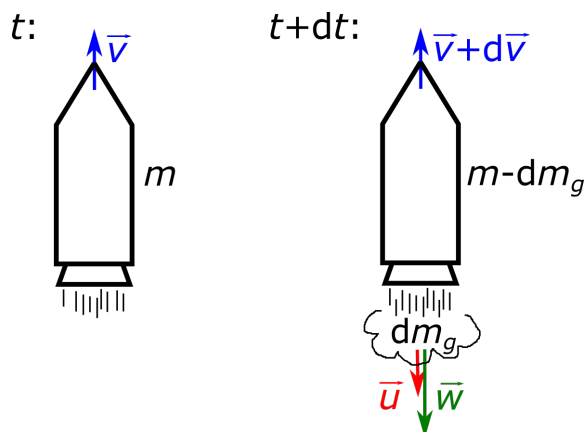
Wyrażenie $\vec{F}_c = \mu \vec{u} = \pm \frac{dm}{dt} \vec{u}$ pełni rolę siły ciągu (np. rakiety - nabytej na skutek odrzutu gazów wylotowych, lub barki - uzyskanej pod wpływem poziomej składowej prędkości piasku). $\vec{F}_c$ jest po prostu siłą odrzutu (np. gazów wylotowych). Gdyby piasek padał na barkę prostopadle do jej kierunku prędkości, to siła $\vec{F}_c$ miałaby składową pionową, która działałaby prostopadle do barki, a więc zapewne byłaby równoważona przez reakcję podłoża (wody). Wypadkowo w równaniu dynamiki składowa ta znikłaby. II zasadę dynamiki dla

ciała o zmiennej masie możemy więc zapisać następująco:

$$m\vec{a} = \vec{F}_z + \vec{F}_c, \quad \text{gdzie} \quad \vec{F}_c = \pm \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad (3.42.)$$

Jeżeli mamy do czynienia z ubytkiem masy w czasie (np. podczas ruchu rakiety), to $\frac{dm}{dt} < 0$, a siła ciągu jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości $\vec{u}$ (gazów wylotowych), czyli zgodnie ze zwrotem wektora prędkości $\vec{v}$ (rakiety) - w efekcie raketa przyspiesza. Jeśli natomiast ciało nabiera masy (np. ładujemy piasek na barkę), to $\frac{dm}{dt} > 0$ i siła ciągu ma zwrot wektora $\vec{u}$. Ogólnie: $F_c \sim \frac{dm}{dt}$ oraz $\vec{F}_c \sim \pm \vec{u}$.

Oznaczenia wielkości fizycznych Czytelnik może porównać z Rysunkiem 3.17. ilustrującym treść zadania w Przykładzie. W Przykładach też szczegółowo pokazujemy stosowanie wyłożonego powyżej formalizmu. W szczególności, najczęściej rozważamy przypadek jednowymiarowy, przez co powyższe wzory redukują się do postaci algebraicznej (bez strzałek wektorów). W przypadku ruchu rakiety szybkości gazów wylotowych względem rakiety są dużo większe niż szybkość samej rakiety, dlatego długość wektora $\vec{u}$ jest znacznie większa niż długość wektora $\vec{v}$, a wówczas wektor $\vec{w}$ jest skierowany przeciwnie do kierunku ruchu rakiety (czyli w dół).



Rysunek 3.17.: Ilustracja ruchu rakiety, idea odrzutu gazów wylotowych. Wektor $\vec{w}$ to prędkość gazów wylotowych w układzie inercyjnym (względem Ziemi), a wektor $\vec{u}$ to prędkość gazów względem układu nieinercyjnego (związanej z poruszającą się rakieta).

Przykłady

1. Na podstawie ogólnych rozważań o zmianie pędu w układzie rakiet-gazy wylotowe wyprowadź równanie Ciołkowskiego (3.40.) dla startującej pionowo rakiety. Przyjmujemy, że raketa startuje w chwili $t = 0$, kiedy jej masa wynosi m_0 . W dowolnej chwili t prędkość rakiety względem układu nieruchomego wynosi v , natomiast w krótkim przedziale czasu dt raketa emituje masę $dm_g = -dm$ gazów wylotowych o prędkości u względem rakiety. Znak minus w wyrażeniu na masę gazu wynika w fakcie, że jest ona równoważna ubytkowi masy rakiety. W dalszych rachunkach będziemy dodawać pędy, co możemy zrobić tylko, jeśli są zdefiniowane w tym samym układzie odniesienia. Dlatego musimy określić szybkość gazów wylotowych względem

ziemi, w , jako: $u = w - v$ (zakładamy, że $u > v$, dlatego kierunek w jest w tę samą stronę, co kierunek u). Stosujemy zapis skalarny, bo ruch rakiety w naszym zadaniu jest jednowymiarowy. Chociaż w tym zadaniu nie będzie nam to potrzebne, to od razu możemy zapisać, że zależność masy rakiety od czasu wynosi: $m(t) = m_0 - \mu t$, gdzie $\mu = \frac{dm_g}{dt} = -\frac{dm}{dt}$ jest szybkością emisji gazów wylotowych (czyli szybkością ubytku masy). Możemy teraz zapisać ile wynosi pęd układu rakiet-gazy wylotowe w chwili t (przed emisją masy gazu $-dm$) oraz po czasie dt , gdy rakiet wyemitowała gaz, a jej prędkość zmieniła się o dv :

$$\begin{aligned} p &= p(t) = mv \\ p' &= p(t + dt) = (m - dm)(v + dv) - dm_g w = \\ &= (m - dm)(v + dv) + dm w = \\ &= mv + m dv + dm(w - v) = \\ &= mv + m dv + dm u \end{aligned}$$

Kierunki wektorów prędkości ustaliliśmy tutaj, zgodnie z Rysunkiem 3.17., w konwencji: wektory w górę z plusem, wektory w dół z minusem. Zatem przyrost pędu:

$$dp = p' - p = p(t + dt) - p(t) = m dv + dm u$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki w postaci wzoru (3.39.):

$$dp = F_z dt \quad \Rightarrow \quad m dv + dm u = F_z dt \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = F_z - \frac{dm}{dt} u$$

Jeżeli teraz przypomnimy sobie, że $\frac{dm}{dt} = -\mu$, to otrzymamy końcowy wzór identyczny z równaniem (3.40.).

Zauważmy, że w pierwszym równaniu zapisaliśmy przyczynki do pędu całkowitego układu od wszystkich mas: rakiety oraz cząsteczki gazu wylotowego. W ostatnim wzorze z kolei występuje już tylko zmiana prędkości (pędu) rakiety, a wpływ gazów wylotowych zaznaczony jest w dodatkowym składniku sumy (sile ciągu).

2. Wyprowadź wzór Ciołkowskiego na zależność prędkości rakiety swobodnej od czasu. Rakiet swobodna nie jest poddana działaniu żadnych sił zewnętrznych (w szczególności pomijamy tu wpływ siły grawitacji czy sił oporu), zatem $F_z = 0$. Równanie dynamiki rakiety swobodnej jest więc postaci (wzór (3.40.)):

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} u$$

Zauważmy, że łatwo rozwiążemy to równanie różniczkowe eliminując z niego czas i całkując tylko po prędkości i masie. Mnożąc obustronnie przez dt , otrzymamy:

$$m dv = -u dm \quad \Rightarrow \quad dv = -u \frac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad v = -u \ln m + C$$

Stałą całkowania C znajdujemy z warunku początkowego: $v(0) = 0$ oraz $m(0) = m_0$. Zatem $C = \ln m_0$. Ostatecznie otrzymujemy wzór Ciołkowskiego:

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} \quad \text{lub} \quad v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right)$$

albo w postaci wektorowej (wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ są przeciwnie skierowane):

$$\vec{v}(t) = -\vec{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right)$$

Ciekawym wydaje się pytanie o końcową prędkość, jaką osiągnie rakieta po wypaleniu całego paliwa. Niech masa początkowa rakiety z paliwem wynosi $m_0 = m_p + m_k$, gdzie m_p jest masą początkową paliwa, a m_k masą korpusu rakiety (niezmienną w trakcie lotu), przy czym masa paliwa jest zasadniczo wielokrotnie większa od masy korpusu rakiety, $m_p \gg m_k$. Masa rakiety po wypaleniu całego paliwa pozostaje tylko $m = m_k$. W takim razie prędkość końcowa:

$$v_k = u \ln \left(\frac{m_p + m_k}{m_k} \right) = u \ln \left(1 + \frac{m_p}{m_k} \right) \approx u \ln \frac{m_p}{m_k}$$

Ostatni (przybliżony) wzór często bywa nazywany również wzorem Ciołkowskiego, a stosunek m_p/m_k jest ważnym parametrem w technologii rakietowej. Wydajność rakiety zależy od dwóch wielkości: szybkości gazów wylotowych względem rakiety oraz stosunku mas paliwa i korpusu rakiety. Jest to jednocześnie poważne ograniczenie w zastosowaniu paliw ciekłych (chemicznych).

3. Barka o początkowej masie $m_0 = 1000$ kg porusza się po rzece pod wpływem stałej, poziomej siły $F = 1$ kN (Rysunek 3.18.). W pewnej chwili barka podpływa pod podajnik piasku, z którego prostopadłe na barkę sypie się piasek w tempie $\mu = 50$ kg/s. Znajdź zależność prędkości barki od czasu. Jaka prędkość ustali się po długim czasie, jeżeli piasek ciągle sypie się na barkę z szybkością μ ?

Zadanie możemy rozwiązać wykorzystując oba dyskutowane w tym podrozdziale sposoby. Tak więc zrobimy. W pierwszej kolejności możemy zastosować wzór (3.40.) dla samej barki. Ruch barki i oznaczenia zilustrowano na Rysunku 3.18..

Sposób I

Prędkość pozioma (ta nas interesuje) piasku względem brzegu wynosi zero, czyli $w = 0$. Ponadto, masa barki przyrasta wskutek dostarczania piasku, więc $\mu = +\frac{dm}{dt}$. Na podstawie wzoru (3.40.) możemy zapisać:

$$m \frac{dv}{dt} = F + \mu(-v)$$

gdzie $m = m(t) = m_0 + \mu t$. Dostaliśmy dość trudne równanie różniczkowe, które jednak rozwiążemy „sprytnie”. Spróbujmy tak:

$$m \frac{dv}{dt} = F - \mu v \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = F \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mv) = F$$

Teraz całkowanie jest już proste, jeśli potraktujemy wyrażenie ' mv ' jako jedną zmienną. Rozwiązanie jest następujące:

$$mv = Ft + C \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{Ft}{m(t)} + C = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} + C$$

Stałą całkowania znajdujemy z tzw. warunków początkowych. Załóżmy, że na początku naszej obserwacji (albo ruchu barki) prędkość barki wynosiła $v_0 = v(t = 0) = 0$.

Wówczas nasze rozwiązanie: $v(0) = \frac{0}{m_0+0} + C = 0 \Rightarrow C = 0$. Ostatecznie, zależność prędkości barki od czasu jest następująca:

$$v(t) = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$$

Jest to rosnąca funkcja czasu, co łatwo można sprawdzić szkicując jej przebieg. Prędkość barki przyrasta, ale coraz wolniej (ciągle działa na barkę stała siła, ale jej masa „efektywnie” rośnie, przez co wielkość przyspieszenia spada). Sprawdźmy jak wygląda zależność przyspieszenia barki od czasu (spodziewamy się malejącej funkcji czasu):

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}$$

Rzeczywiście, zależność przyspieszenia od czasu jest dana hiperbolą. Przyspieszenie maleje w czasie, więc prędkość rośnie coraz wolniej. Maksymalną prędkość, jaką osiągnie barka, znajdziemy, obliczając granicę wyrażenie na $v(t)$ w nieskończoności (na podstawie wykresu $v(t)$ możemy przekonać się, że funkcja ta ma poziomą asymptotę). Liczmy:

$$v_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{Ft}{m_0 + \mu t} \right) = \frac{F}{\mu}$$

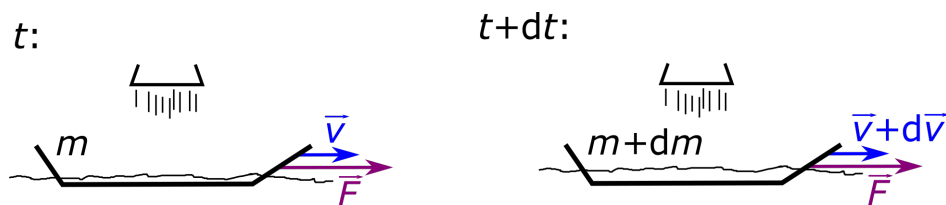
co, po podstawieniu danych, daje wynik 20 m/s.

Sposób II

Teraz spróbujemy zastosować pierwsze podejście omówione w tym podrozdziale, mianowicie, zapiszmy zmianę pędu całego układu barka-piasek w przedziale czasu $(t, t + dt)$:

$$\begin{aligned} p &= p(t) = mv \\ p' &= p(t + dt) = (m + dm)(v + dv) \\ dp &= p' - p = (m + dm)(v + dv) - mv = m dv + v dm = d(mv) \end{aligned}$$

Stosując wzór (3.39.) dostajemy równanie $d(mv) = F dt$. Dalsze rozwiązanie równania różniczkowego jest analogiczne do przedstawionego w Sposobie I. Ostatecznie dostajemy dokładnie takie samo rozwiązanie.



Rysunek 3.18.: Ilustracja ruchu barki, na którą z podajnika sypie się piasek.

Zadania

1. Rakieta startuje pionowo w górę wskutek siły odrzutu gazów wylotowych, doznając jednocześnie siły oporu powietrza proporcjonalnej do prędkości ($F_{op} = -bv$, gdzie b jest stałym parametrem). Prędkość gazów wylotowych względem rakiety to u , a tempo

- spalania μ . (a) Zapisz równanie dynamiki dla takiej rakiety. (b) Z jakim początkowym przyspieszeniem porusza się rakietę (w chwili $t = 0$)? (c) Jaką hipotetyczną maksymalną prędkość może uzyskać rakietę (zakładamy, że końcowa masa rakiety to m_k). Rakietę startuje z $v_0 = 0$. Jak wyglądałaby sytuacja, gdybyśmy uwzględnili dodatkowo ciężar rakiety?
2. Wagon cysternę przewożący 40 ton wody delikatnie pchnięto wzdłuż torów, nadając mu stałą prędkość o wartości 1 m/s. Lokomotywa ciągnie wagon ze stałą siłą równą 10 kN. Pomijamy opory ruchu. Przez nieszczelność w dnie wagonu wylewa się woda z szybkością 100 litrów na minutę. Jaką prędkość uzyska wagon w momencie, gdy cała woda wyleje się z wagonu? Znajdź zależność prędkości od czasu.
3. Sprytny Jasiu robi swoją własną „rakieta”. Na pokład wózka o masie własnej 20 kg zabiera 50 kamieni, każdy o masie 0,2 kg, następnie rozpędza wózek do prędkości 10 m/s na płaskim podłożu i wskakuje do niego. Waga Jasia to 30 kg. Wózek toczy się z pomijalnie małymi oporami ruchu. Jasiu włącza teraz „napęd raketowy”, tzn. w stałym tempie wyrzuca do tyłu po jednym kamieniu, nadając mu prędkość względem wózka 5,5 m/s. (i) Jaką końcową prędkość (tzn. po wyrzuceniu wszystkich kamieni) uzyska „rakietę” Jasia? (ii) Ile kamieni powinien Jasiu zabrać na pokład, aby osiągnąć prędkość 15 m/s? (iii) Zamiast zabierania na pokład większej liczby kamieni, Jasiu postanawia wyrzucać kamienie z większą szybkością do tyłu. Ile musiałaby wynosić nowa szybkość wyrzutu, aby z użyciem 50 kamieni rozpędzić „rakieta” do 15 m/s?

Rozdział 4.

Praca, moc, energia

4.1. Podstawowe definicje

Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ na przemieszczenie $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ jest skalarną wielkością fizyczną zdefiniowaną wzorem:

$$W = \vec{F} \circ \Delta\vec{r} \quad \left(W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \circ d\vec{r} \right) \quad (4.1.)$$

Podajemy także pełne definicje całkowe, ale nie będziemy z nich korzystać w zadaniach. W szczególności, siła działająca prostopadle do kierunku przemieszczenia nie wykonuje pracy. Siły, których praca po torze zamkniętym wynosi zero, nazywamy siłami zachowawczymi. Jeśli w układzie występują tylko takie siły, to spełniona będzie zasada zachowania energii, którą dyskutujemy w kolejnym podrozdziale. Są to np. siła grawitacji, sprężystości, elektrostatyczna. Siła tarcia i oporu powietrza nie są siłami zachowawczymi, tzn. nie zachowują całkowitej energii mechanicznej. Praca siły tarcia jest zawsze ujemna, bo tarcie jest przeciwnie skierowane do kierunku ruchu, czyli także do wektora przemieszczenia. Oznacza to tylko tyle, że aby pokonać działanie tarcia musimy dostarczyć do układu energii.

Podobną definicję pracy podajemy dla ruchu obrotowego. Wówczas to moment siły $\vec{M}_F$ wykonuje pracę na obrocie ciała o kąt $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ równą:

$$W = M_F \Delta\varphi \quad \left(W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_F d\varphi \right) \quad (4.2.)$$

Jednostką pracy w układzie SI jest *dżul* [J].

Moc jest to praca wykonana w jednostce czasu:

$$P = \frac{W}{t} \quad \left(P = \frac{dW}{dt} \right) \quad (4.3.)$$

Przydatny jest również związek mocy (chwilowej) ze stałą siłą działającą na ciało oraz prędkością chwilową, z jaką się porusza:

$$P = F \cdot v \quad \left(P = \vec{F} \circ \vec{v} \right) \quad (4.4.)$$

Wzór ten prosto wynika z definicji (4.3.). Ponadto, jeżeli wiemy, że przez jakiś czas ciało poruszało się ze średnią szybkością v_{sr} , to średnia siła F_{sr} wytworzyła moc $P_{\text{sr}} = F_{\text{sr}} v_{\text{sr}}$.

Analogicznie podajemy wzór na moc chwilową dostarczoną przez moment siły $\vec{M}_F$ w trakcie ruchu obrotowego z chwilową prędkością kątową $\vec{\omega}$:

$$P = M_F \cdot \omega \quad \left(P = \vec{M}_F \circ \vec{\omega} \right) \quad (4.5.)$$

Jednostką mocy w układzie SI jest *wat* [W].

Energia to miara zdolności wykonywania przez ciało pracy. Jednostką energii w układzie SI jest więc także *dżul* [J].

Energia kinetyczna jest związana z ruchem - ciało posiadające prędkość $\vec{v}$ ma energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (4.6.)$$

Energia kinetyczna ciała w ruchu obrotowym wynosi:

$$E_{k(obr)} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (4.7.)$$

Energia potencjalna (grawitacji) jest związana z odległością ciała od źródła oddziaływania grawitacyjnego, co wyraża prawo powszechnego ciążenia Newtona. W uproszczeniu możemy podać związek energii potencjalnej z wysokością h ciała nad powierzchnią Ziemi:

$$E_p = mgh \quad (4.8.)$$

gdzie $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym w pobliżu powierzchni Ziemi. Wzór (4.8.) jest poprawny przy założeniu, że $g = \text{const.}$

Praca siły wypadkowej na odcinku $1 \rightarrow 2$ odpowiada zmianie energii kinetycznej ciała: $W_{F_w} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$.

To samo dotyczy przypadku ruchu obrotowego - praca wypadkowego momentu siły powoduje zmianę energii kinetycznej w ruchu obrotowym: $W_{M_{F(w)}} = E_{k(obr)2} - E_{k(obr)1} = \Delta E_{k(obr)}$.

Praca siły grawitacji związana jest ze zmianą energii potencjalnej: $W_{F_g} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$.

Przykłady

1. Znajdź całkowitą energię kinetyczną toczącej się z prędkością $\vec{v}$ po poziomej płaszczyźnie kuli o promieniu R i masie m .

Pamiętamy, że toczenie jest złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy. Wobec tego całkowita energia kinetyczna toczącego się ciała jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego.

$$E_{k(catk)} = E_{k(post)} + E_{k(obr)} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment bezwładności kuli to $I = \frac{2}{5}mR^2$. Przypomnijmy sobie też związek prędkości liniowej i kątowej w przypadku toczenia bez poślizgu (2.39.): $v = \omega R$. Wobec tego:

$$E_{k(catk)} = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \omega^2 = \frac{7}{10}m\omega^2 R^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

2. Chłopiec pcha szafę o masie 50 kg po płaskim podłożu. Współczynnik tarcia między szafą, a podłogą wynosi 0,3. Jaką pracę wykonuje siła tarcia na odcinku 2 m? Jaką pracę wykonuje chłopiec?

Żeby obliczyć pracę tarcia, skorzystamy z definicji pracy (4.1.) i siły tarcia (3.8.). Siła tarcia jest równa oczywiście sile nacisku (u nas cały ciężar szafy mg) razy współczynnik tarcia, czyli $T = fmg$. Mamy do czynienia z tarciem kinetycznym, które jest zwrócone przeciwnie do kierunku przesuwania szafy. Jak zawsze, praca siły tarcia jest więc ujemna, bo kąt w iloczynie skalarnym jest -180° . Tak więc praca tarcia wynosi

$$W_T = -fmg s = -300 \text{ J}$$

Treść zadania tego jasno nie precyzuje, ale możemy założyć, że ruch szafy jest jednostajny. W takim razie, zgodnie z I zasadą dynamiki, siła zewnętrzna (chłopca) musi równoważyć siłę tarcia, $\vec{F}_{\text{chłopca}} = -\vec{T}$. Chłopiec więc wykonuje pracę przeciwną do siły tarcia, o tej samej na moduł wartości: $W_{\text{chłopca}} = -W_T = +300 \text{ J}$.

3. Jaką pracę wykona siła ciężkości podczas zsuwania się ciała o masie m z równi pochyłej o kącie nachylenia α i wysokości h ?

Korzystamy ze wzoru (4.1.), przy czym kąt między przemieszczeniem a ciężarem wynosi $90^\circ - \alpha$. Długość przemieszczenia do długość równi $s = \frac{h}{\sin \alpha}$. W takim razie praca:

$$W_Q = Q \cdot s \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = mg \frac{h}{\sin \alpha} \sin \alpha = mgh$$

Zauważmy, że otrzymany wynik to po prostu energia potencjalna, a ściślej mówiąc różnica energii potencjalnych ciała na szczycie równi ($E_{p1} = mgh$) i na dole równi ($E_{p2} = 0$), zatem dokładnie tak jak dyskutowaliśmy to przy okazji definicji energii potencjalnej: $W_Q = E_{p1} - E_{p2}$.

Jaką pracę wykona siła tarcia, jeśli współczynnik tarcia wynosi f ?

$$W_T = \vec{T} \circ \vec{r} = T \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -fmg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = -fmg h \operatorname{ctg} \alpha$$

4. Jaką pracę wykonał wypadkowy moment siły na rozpędzenie stalowej obręczy o momencie bezwładności $I = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ od spoczynku do prędkości kątowej $\omega_k = 15 \text{ rad/s}$? Jeśli rozpędzanie trwało $t = 10 \text{ s}$, to ile wynosił stały moment siły?

Aby obliczyć pracę momentu siły moglibyśmy skorzystać ze wzoru (4.2.), ale nie znamy ani całkowitego kąta, ani wielkości momentu siły. Wiemy natomiast, że wypadkowy moment siły powoduje przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego. Zatem:

$$W_{M_{F(w)}} = W = \Delta E_{k(obr)} = E_{k(obr)2} - E_{k(obr)1} = \frac{1}{2} I \omega_k^2 - 0 = \frac{1}{2} I \omega_k^2 = 56,25 \text{ J}$$

Skoro rozpędzanie (ze stałym przyspieszeniem kątowym, bo moment wypadkowy jest stały) trwało $t = 10 \text{ s}$, to całkowity kąt zatoczony w tym czasie wynosi

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = |M_{F(w)} = I \varepsilon| = \frac{1}{2} \frac{M_{F(w)}}{I} t^2$$

Moment siły obliczymy teraz ze wzoru na pracę (4.2.):

$$W = M_{F(w)} \Delta \varphi = \frac{1}{2} \frac{M_{F(w)}^2}{I} t^2 \quad \Rightarrow \quad M_{F(w)} = \sqrt{\frac{2IW}{t^2}} = \frac{I \omega_k}{t} = 0,75 \text{ Nm}$$

4.2. Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii jest ważną zasadą w fizyce, którą wielokrotnie będziemy stosować do rozwiązywania problemów fizycznych. W tym rozdziale wypowiemy jej treść i pokażemy przykłady zastosowań.

W układzie izolowanym, w którym występują tylko siły zachowawcze, całkowita energia mechaniczna jest zachowana:

$$E_c = \text{const} \Leftrightarrow E_{c1} = E_{c2} \Leftrightarrow E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad (4.9.)$$

Stosowanie zasady zachowania energii jest proste. Trzeba określić całkowitą energię układu na początku i na końcu naszej obserwacji (np. w momencie puszczenia ciała ze szczytu równi i w chwili dotarcia ciała do końca równi) i porównać je ze sobą. Stosując tę zasadę znajdujemy najczęściej prędkości bądź wysokości ciał na jakimś etapie ruchu. Pokazujemy to w Przykładach.

Jeżeli w układzie występuje tarcie (lub inna siła niezachowawcza - np. siła oporu powietrza, lepkości itd.) zasada zachowania energii nie jest spełniona. Stosujemy wówczas bilans energetyczny, tzn. zastanawiamy się na co została zamieniona całkowita energia mechaniczna ciała, jaką posiadało ono na początku ruchu. Oczywiście zamieniona jest w energię mechaniczną na końcu, ale część tej energii została utracona na wykonanie pracy przeciwko sile tarcia. Praca przeciwko sile tarcia jest co do wartości równa pracy, jaką wykona siła tarcia, ale ma przeciwny znak. Zasadę bilansu możemy więc zapisać następująco:

$$\begin{aligned} E_{c1} = E_{c2} + W_{\overline{T}} &\Leftrightarrow E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} + W_{\overline{T}} \\ E_{c1} + W_T = E_{c2} &\Leftrightarrow E_{k1} + E_{p1} + W_T = E_{k2} + E_{p2} \end{aligned} \quad (4.10.)$$

gdzie $W_{\overline{T}}$ jest pracą przeciwko sile tarcia, a W_T jest pracą siły tarcia. Oczywiście $W_{\overline{T}} = -W_T$. Pamiętajmy, że $W_T < 0$. Jakbyśmy nie zapisali bilansu energii, pamiętajmy o tym, że w obecności tarcia „tracimy” energię. Czyli zawsze musi być $E_{c2} < E_{c1}$.

Przykłady

1. Korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej wyprowadzimy wzory na prędkość końcową w spadku swobodnym i rzucie poziomym, a także wysokość maksymalną w rzucie pionowym oraz ukośnym.

Spadek swobodny:

$$\begin{cases} E_{c1} = mgh \\ E_{c2} = \frac{mv_k^2}{2} \end{cases} \quad E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow mgh = \frac{mv_k^2}{2} \Rightarrow v_k = \sqrt{2gh}$$

Rzut poziomy:

$$\begin{cases} E_{c1} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} \\ E_{c2} = \frac{mv_k^2}{2} \end{cases} \quad E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_k^2}{2} \Rightarrow v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Rzut pionowy w górę:

$$\begin{cases} E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2} \\ E_{c2} = mgh_{max} \end{cases} \quad E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Rzut ukośny:

$$\begin{cases} E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2} \\ E_{c2} = mgh_{max} + \frac{mv_{0x}^2}{2} \end{cases}$$

$$E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

2. Ciało o masie m porusza się z prędkością v_1 bez tarcia. W pewnym momencie przykładamy do niego siłę F . Po pokonaniu jakiego dystansu prędkość ciała wzrośnie dwukrotnie?

Jeśli siła F jest jedyną siłą działającą na ciało, to przyspieszenie ciała wynosi $a = \frac{F}{m}$. Możemy ułożyć równania ruchu dla tego ciała i znaleźć nieznaną drogę s . $v_2(t) = 2v_1$.

$$\begin{cases} v_2(t) = v_1 + \frac{F}{m}t \\ s(t) = v_1t + \frac{F}{2m}t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{v_1m}{F} \\ s = \frac{3mv_1^2}{2F} \end{cases}$$

Pamiętamy słowa, które padły przy okazji definicji energii kinetycznej, że zmiana energii kinetycznej jest zawsze równa pracy siły wypadkowej. Praca ta wynosi w naszym przypadku po prostu $W_F = F \cdot s$. Możemy zapisać zasadę zachowania energii i w ten sposób znaleźć s .

$$W_F = E_{k2} - E_{k1} \Rightarrow F \cdot s = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{3mv_1^2}{2} \Rightarrow s = \frac{3mv_1^2}{2F}$$

Widzimy, że zastosowanie zasady zachowania energii jest komplementarne z użyciem wzorów kinematycznych. W tym akurat przypadku zysk z jej użycia nie jest bardzo duży, jednak często bywa tak, że jej zastosowanie jest nieocenione, bo znacznie ułatwia rachunki. Należy jednak pamiętać, że w zasadzie zachowania energii nie występuje czas. Zatem, chcąc dyskutować o czasie trwania ruchu, musimy użyć równań ruchu.

3. Ciału nadajemy szybkość początkową $v_0 = 10$ m/s. Po przebyciu drogi $s = 5$ m w kierunku poziomym ciało zaczyna ruch w górę równi o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$. Jak wysoka musi być równia, aby ciało nie spadło z równi (nie przeleciało poza nią)?

Rozważmy najpierw przypadek bez tarcia. Zadanie to można rozwiązać używając kinematyki (pisząc równania ruchu i je rozwiązując), co polecamy jako dodatkowe ćwiczenie. My zastosujemy zasadę zachowania energii, porównując dwa położenia ciała - na początku ruchu i na szczycie równi o nieznannej wysokości, gdzie chcemy, by ciało się zatrzymało ($v_k = 0$).

$$\begin{cases} E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2} \\ E_{c2} = mgh_1 \end{cases}$$

$$E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2g} = 5 \text{ m}$$

Zauważmy, że gdy pomijamy tarcie nie ma znaczenia jaki dystans ciało przebyło do osiągnięcia szczytu równi, ani co „działo się” z nim podczas ruchu. Ważne jest, że możemy stosować zasadę zachowania energii, bo nie ma sił niezachowawczych. Ciało po

przebyciu drogi s nadal ma prędkość $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

Wprowadźmy teraz do układu tarcie scharakteryzowane współczynnikiem $f = 0,5$. Zapisując bilans energetyczny (już nie zasadę zachowania energii) uwzględniamy pracę siły tarcia na drodze: s + długość równi, która wynosi $s' = \frac{h_2}{\sin \alpha}$, gdzie h_2 jest wysokością równi w tym drugim przypadku. Na obu odcinkach siła tarcia ma inną wartość, odpowiednio: $T = fmg$ oraz $T' = fmg \cos \alpha$. Zatem praca przeciwko sile tarcia na całym dystansie:

$$W_{\overline{Tc}} = T \cdot s + T' \cdot s' = fmg s + fmg \cos \alpha s' = fmg(s + \cos \alpha \frac{h_2}{\sin \alpha}) = fmg(s + h_2 \text{ctg} \alpha)$$

$$\begin{cases} E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2} \\ E_{c2} = mgh_2 \\ W_{\overline{Tc}} = fmg(s + h_2 \text{ctg} \alpha) \end{cases}$$

$$E_{c1} = E_{c2} + W_{\overline{Tc}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_2 + fmg(s + h_2 \text{ctg} \alpha) \Rightarrow h_2 = \frac{v_0^2 - 2fgs}{2g(1 + \text{ctg} \alpha)} = 1,25 \text{ m}$$

Widzimy, że różnica jest spora. Oczywiście z uwzględnieniem siły tarcia ciało będzie w stanie pokonać o wiele mniejszy dystans. Nie jest to zaskoczenie, bo taka jest natura siły tarcia.

4. Z jakiej wysokości H musi ześlizgnąć się punkt materialny z równi, aby pokonać „diabelską pętlę”, ustawioną u dołu równi (Rysunek 4.1.)? Promień pętli wynosi $R = 20 \text{ cm}$. Piszemy zasadę zachowania energii dla dwóch położenia ciała - na szczycie równi o wysokości H bez prędkości początkowej i na szczycie pętli o wysokości $2R$, gdzie ciało ma prędkość v .

$$mgH = mg \cdot 2R + \frac{mv^2}{2}$$

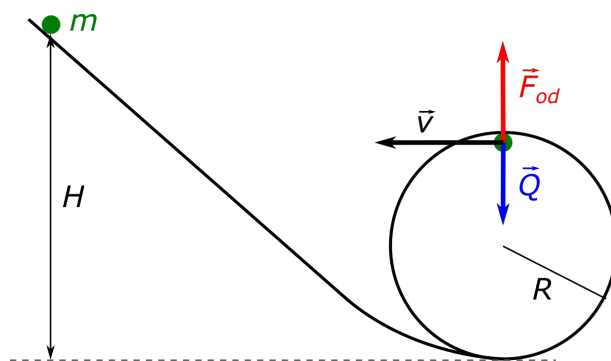
Widzimy, że mamy 2 niewiadome - H oraz v . Musimy wykorzystać jeszcze jedną informację - na szczycie pętli ciało nie może od niej odpaść. Ciało wykonując pętlę porusza się po okręgu, zatem działa na niego siła odśrodkowa, u szczytu pętli skierowana do góry, która musi co najmniej równoważyć siłę grawitacji zwróconą w dół. Stąd mamy:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \Rightarrow v^2 = gR$$

Wracamy teraz do zasady zachowania energii.

$$mgH = mg \cdot 2R + \frac{m}{2} \cdot gR = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow H = \frac{5}{2}R$$

Zadajmy sobie teraz pytanie: jaką pracę wykonała siła grawitacji przy przemieszczeniu ciała od startu do najwyższego miejsca na pętli? Załóżmy masę $m = 1 \text{ kg}$. Ciało przemieszcza się ruchem krzywoliniowym wzdłuż toru, dlatego trudno byłoby nam obliczyć pracę siły grawitacji z tym ruchu ze wzoru definicyjnego (4.1.). Bez w pełni poprawnego wzoru całkowitego jest to nawet niemożliwe. Jednak pamiętamy, że praca siły ciężkości może być obliczona jako różnica energii potencjalnych mierzonych w dwóch skrajnych punktach toru (od startu do mety). Zatem w naszym przypadku: $W_Q = E_{p1} - E_{p2} = mgH - mg \cdot 2R = mg \cdot \frac{5}{2}R - mg \cdot 2R = \frac{1}{2}mgR$.



Rysunek 4.1.: Ilustracja do zadania z „diabelską pętlą”.

5. Jaką prędkość końcową osiągnie cienka obręcz tocząca się z równi pochyłej o wysokości h u dołu równi?

Mamy teraz przykład zastosowania zasady zachowania energii w ruchu bryły sztywnej. Działa ona tak samo, a różnica polega tylko na tym, że tocząca się bryła sztywna ma zarówno energię kinetyczną w ruchu postępowym, jak i obrotowym. Moment bezwładności cienkiej obręczy wynosi $I = mR^2$. Zapisujemy więc zasadę:

$$\begin{cases} E_{c1} = mgh \\ E_{c2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mv^2 \end{cases}$$

$$E_{c1} = E_{c2} \Rightarrow mgh = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Można by zapytać, czy wolno nam w przypadku toczenia stosować zasadę zachowania energii, skoro występuje siła tarcia? Jednak jest to „inne” tarcie - nie kinetyczne związane z pocieraniem jednej powierzchni o drugą. To tarcie statyczne, które nie wykonuje pracy. Powoduje ono, że pojawia się moment siły wprawiający ciało w ruch obrotowy. Właśnie przez to, że ciało wykonuje ruch obrotowy, obok postępowego, energia potencjalna na szczycie równi nie zostaje zamieniona w całości w kinetyczną ruchu postępowego. Działanie tarcia jest niejako „ukryte” w wyrażeniu na energię kinetyczną ruchu obrotowego. Zasada zachowania jak najbardziej obowiązuje w przypadku toczenia bryły sztywnej.

Zadania

1. Jaką prędkość osiągnie ciało o masie $m = 1$ kg, które pod działaniem stałej siły $F = 20$ N jest podnoszone na wysokość $h = 2$ m? Prędkość początkowa jest równa 0.
2. Ciało o masie $m = 5$ kg zsuwa się z wysokości $h = 1$ m po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$. Ile wynosi energia kinetyczna ciała u podstawy równi w dwóch przypadkach - bez tarcia i z tarcie (współczynnik tarcia $f = 0,2$)? Jak wygląda bilans energetyczny układu?
3. Jaką prędkość początkową należy nadać ciału na szczycie równi, aby mogło ono pokonać „diabelską pętlę” o promieniu równym wysokości równi?
4. Jaką pracę wykona siła ciągu silnika wjeżdżającego na szczyt równi o wysokości $h = 10$ m i kącie nachylenia $\alpha = 10^\circ$ ze stałą szybkością $v = 15$ m/s? Współczynnik tarcia

wynosi $f = 0,3$. Jaką pracę wykona silnik, jeśli zjeżdża on w dół równi również ze stałą szybkością. Jaka to szybkość (przypominamy związek (4.4.))?

5. Proszę rozwiązać zadanie dot. rozwijania linki nawiniętej na bloczek, do której przy-mocowano masę m , stosując zasadę zachowania energii. Chodzi o Przykład 2 z Pod-rozdziału 3.6.3. w Rozdziale 3.
6. Cienkościenną obręcz o masie $m = 10$ kg i promieniu $R = 50$ cm ($I = mR^2$) pchnięto w górę równi z prędkością początkową $v_0 = 2$ m/s. Zauważono, że po $t = 3$ s toczenia bez poślizgu obręcz się zatrzymała. Oblicz pracę momentu siły tarcia wykonaną w czasie ruchu w górę równi oraz wielkość tej siły. Jaki jest kąt nachylenia równi do poziomemu?
Odp. $W_T = -\frac{1}{2}mv_0^2$, $T = \frac{mv_0}{t}$, $\sin \alpha = \frac{2T}{mg}$.

Rozdział 5.

Grawitacja

5.1. Prawo powszechnego ciążenia

Podstawowym prawem teorii grawitacji jest podane przez Newtona prawo powszechnego ciążenia, które definiuje siłę wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego dwóch mas M i m oddległych od siebie o r :

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} \qquad \vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \qquad (5.1.)$$

Stała grawitacji G ma wartość $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Siła grawitacji ma charakter przyciągający (znak „ $-$ ”) i jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. Wzór (5.1.) obowiązuje dla mas punktowych oraz kulistych (także sferycznych). Należy przy tym pamiętać, że r we wzorze mierzymy od środków obu mas. Np. na ciało leżące na powierzchni Ziemi działa ze strony Ziemi siła zdefiniowana wzorem (5.1.) z promieniem Ziemi R_Z w mianowniku, bo taka jest odległość od naszej masy do środka Ziemi. Po drugie, siła grawitacji jest siłą wzajemnego oddziaływania, co oznacza, że z jaką siłą masa M przyciąga drugą masę m , z taką też siłą masa m przyciąga masę M . Siły te mają te same wartości, tylko przeciwne znaki i są przyłożone do różnych ciał: $\vec{F}_{M,m} = -\vec{F}_{m,M}$.

W codziennym życiu i w prostych zadaniach stosujemy wzór na siłę grawitacji (ciężar) w postaci: $Q = mg$, gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Jest to również poprawny wzór na siłę ciężkości, w przybliżeniu małych wysokości nad powierzchnią (Ziemi, innej planety itd.). Jeśli porównamy go z prawem powszechnego ciążenia otrzymamy związek między przyspieszeniem grawitacyjnym g z parametrami masy źródłowej, wytwarzającej pole grawitacyjne, czyli promieniem R i masą M np. Ziemi czy Księżyca:

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{GM}{R^2} \qquad (5.2.)$$

Podstawiając dane Ziemi: $M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_Z = 6370 \text{ km}$ otrzymujemy wartość $g = 9,86 \text{ m/s}^2$, co jest wynikiem niemal idealnie zgodnym z prawdziwą wartością ($9,81 \text{ m/s}^2$). Związek (5.2.) jest prawdziwy dla wszystkich ciał niebieskich, np. planet i gwiazd.

Jak już wiemy, siła grawitacji jest siłą zachowawczą. Można więc zdefiniować dla niej energię potencjalną:

$$E_p = -G \frac{Mm}{r} \qquad (5.3.)$$

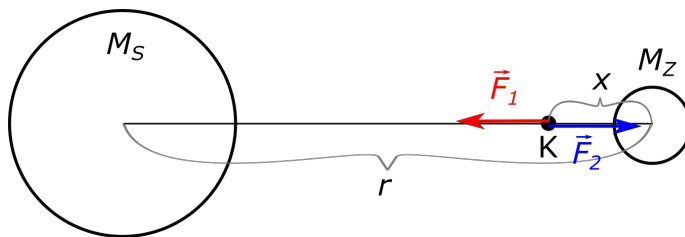
Znowu, znak „−” (ujemna energia grawitacji) świadczy o przyciągającym charakterze pola grawitacyjnego. Zauważmy, że w szczególności ciało na powierzchni Ziemi ma niezerową energię potencjalną $E_p = -G \frac{M_Z m}{R_Z^2}$. Dotychczas poznaliśmy wzór na energię potencjalną grawitacji postaci $E_p = mgh$, gdzie h jest wysokością nad pewnym umownym zerowym poziomem energii potencjalnej, często przyjmowanym na powierzchni Ziemi. Wzór mgh jest uproszczeniem dokładnego wzoru (5.3.), przy czym zakładamy, że na powierzchni Ziemi jest pewien referencyjny poziom odniesienia (przyjmujemy tam $E_p = 0$), a przyspieszenie grawitacyjne jest stałe.

Przykłady

1. Jaki jest promień Księżyca, na którego powierzchni człowiek „waży” 6 razy mniej niż na Ziemi? Wiemy, że $M_Z = 81M_K$. Wykorzystamy oczywiście wzór (5.2.), bo znamy przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu. Z treści zadania wiemy, że człowiek „waży” na Księżycu 6 razy mniej niż na Ziemi, tzn. jego ciężar jest tam 6 razy mniejszy. Doświadczył tego np. Neil Armstrong spacerujący po Księżycu 21 lipca 1969 roku, co możemy oglądać na archiwalnych nagraniach. Ale masa jest oczywiście taka sama (masa jest miarą ilości materii, a przecież człowieka „nie ubyło” na Księżycu). Zatem $g_K = \frac{1}{6}g_Z$, czyli uwzględniając (5.2.) dla Księżyca i dla Ziemi oraz kładąc $M_Z = 81M_K$:

$$\begin{cases} g_K = \frac{1}{6} \frac{GM_Z}{R_Z^2} \\ g_K = \frac{GM_K}{R_K^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6} \frac{G \cdot 81M_K}{R_Z^2} = \frac{GM_K}{R_K^2} \Rightarrow \left(\frac{R_K}{R_Z} \right)^2 = \frac{6}{81} \Rightarrow R_K \approx 0,27R_Z \approx 1720\text{km}$$

2. Znajdź punkt na linii Ziemia–Słońce, w którym na masę m nie działa siła wypadkowa (tzw. punkt równowagi grawitacyjnej).



Rysunek 5.1.: Ilustracja do przykładu o punkcie równowagi grawitacyjnej.

Przyjmijmy oznaczenia jak na Rysunku (5.1.). Na masę m umieszczoną w punkcie K działają dwie siły - pochodząca od Słońca $\vec{F}_1$ i Ziemi $\vec{F}_2$. Chcemy, aby miały one te same wartości i przeciwne zwroty. Wykorzystując definicję (5.1.) napiszemy równość:

$$G \frac{M_Z m}{x^2} = G \frac{M_S m}{(r-x)^2} \Rightarrow \left(\frac{r-x}{x} \right)^2 = \frac{M_S}{M_Z} \Rightarrow \frac{r-x}{x} = \sqrt{\frac{M_S}{M_Z}} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{\frac{M_S}{M_Z}} + 1}$$

Przyjmując masę Słońca $M_S = 333M_Z$ oraz odległość Ziemia–Słońce $r = 150\,000$ km mamy $x = 0,05r \approx 7800$ km, a więc „tylko” ok. 1500 km nad powierzchnią Ziemi. Wynik może być zaskakujący, ale przecież jest bardzo logiczny. Punkt równowagi grawitacyjnej

między masą ogromną i małą musi być bardzo blisko tej małej masy, która „słabo” oddziałuje na naszą masę m , umieszczoną w tym punkcie. Oczywiście wynik nie zależy od tej próbnej masy m .

3. Sprawdź, że wzór szkolny na energię potencjalną grawitacji $E'_p = mgh$ jest rzeczywiście tylko przybliżeniem wzoru dokładnego na E_p (5.3.) dla niewielkich odległości od powierzchni Ziemi.

Zadanie jest bardzo ogólnie sformułowane, ale chodzi w nim o to, żeby obliczyć energię potencjalną przy pomocy obu wzorów dla dwóch przypadków odległości nad powierzchnią Ziemi i porównać wyniki. Można bezpośrednim rachunkiem obliczyć te energie, ale można też trochę bardziej „profesjonalnie”. Na początek wybierzmy dwie wysokości $h_1 = 10$ km (na takiej wysokości latają samoloty) i $h_2 = \frac{1}{2}R_Z$ (czyli już w przestrzeni kosmicznej). Żeby uniezależnić wynik od masy, na którą ma oddziaływać Ziemia, ale też żeby móc lepiej go zinterpretować, obliczmy stosunki: $\frac{E_p - E'_p}{E_p}$, gdzie E'_p jest energią potencjalną liczoną za pomocą szkolnego wzoru, a E_p - za pomocą wzoru dokładnego. Masa m się wtedy „skróci”. We wzorze dokładnym pominiemy też znak „-”, bo interesuje nas tylko wartość bezwzględna energii. Stosunki te oznaczmy sobie dla wygody przez e . Jaką interpretację będzie miało e ? Będzie to nic innego, jak błąd względny popełniany przy korzystaniu z uproszczonego, szkolnego wzoru. Błąd względny jest procentową (ułamkową) miarą tego, jak wartość E'_p odbiega od wartości prawdziwej E_p . Im bliższe jedności (100%) jest e , tym obie wartości E'_p i E_p są bardziej zgodne ze sobą. Liczmy. Dla dowolnego h mamy:

$$e = \frac{E_p - E'_p}{E_p} = 1 - \frac{E'_p}{E_p} = 1 - \frac{mgh}{\frac{GM_Z m}{R_Z + h}} = \left| g = \frac{GM_Z}{R_Z^2} \right| = 1 - \frac{(R_Z + h)h}{R_Z^2}$$

Kładąc teraz $h_1 = 10$ km oraz $h_2 = \frac{1}{2}R_Z$ w miejsce dowolnego h mamy: $e_1 = 0,9984 = 99,84\%$ oraz $e = 0,25 = 25\%$. Rozbieżność jest, jak widać, ogromna. Jak zinterpretować te dwa wyniki? Dużo mniejszy błąd, prawie żaden, w stosowaniu uproszczonego wzoru mgh popełniamy dla bardzo niewielkich odległości od powierzchni Ziemi ($h = 10$ km $\approx 0,15\% R_Z$). Dla dużych odległości błąd staje się bardzo duży i nie możemy już stosować wzoru mgh .

4. Na pewnym etapie swojego życia gwiazda może zapaść się grawitacyjnie pod wpływem własnej masy. Jak zmieni się okres obrotu wokół własnej osi gwiazdy, która zapadając się grawitacyjnie zmniejszyła swój promień 3 razy?

Bardzo podobne zadanie zaproponowaliśmy do samodzielnego rozwiązania w Zadaniach do Rozdziału 3.8.. Gwiazdy, jak niemal wszystkie ciała niebieskie, wirują wokół własnej osi. Np. „doba słoneczna” trwa ok. 25 dni ziemskich. Wskutek kolapsu grawitacyjnego zmniejsza się promień gwiazdy, a więc i moment bezwładności gwiazdy, którą możemy traktować (w przybliżeniu) jako jednorodną kulę o masie M (moment bezwładności kuli $I = \frac{2}{5}MR^2$). Skoro maleje moment bezwładności, to, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu dla bryły sztywnej, musi wzrosnąć częstość ω - patrz wzór (3.38.). Częstość możemy powiązać z okresem: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Z treści zadania wiemy też, że $R_2 = \frac{1}{3}R_1$.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \frac{2}{5}MR_1^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2}{5}MR_2^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{9}T_1$$

Zatem okres gwiazdy zmaleje 9-krotnie. W podobny sposób powstają pulsary - gwiazdy neutronowe o bardzo dużym okresie obrotu wokół własnej osi, emitujące światło w postaci pulsów o tym samym okresie. Gwiazdy neutronowe powstają wskutek zapadnięcia się gwiazd o masie rzędu kilku mas Słońca do rozmiarów rzędu kilkunastu kilometrów w średnicy. Ich okres obrotu musi być więc bardzo mały - i rzeczywiście jest, może wynosić rzędu milisekund.

5.2. Prędkości kosmiczne, satelity

Satelitą nazywamy obiekt, który porusza się wokół masy źródłowej po orbicie kołowej, tzn. ani nie oddala się od ani nie spada na źródło. Np. Księżyc jest naturalnym satelitą Ziemi, a Hot Bird jest satelitą telekomunikacyjnym Ziemi. Skoro satelita ma poruszać się po orbicie, czyli po okręgu, musi działać na niego siła dośrodkowa skierowana do środka jego orbity i powodująca zakrzywienie toru ruchu. Ale jedyną siłą działającą na satelitę jest siła grawitacji. Zatem to siła grawitacji musi pełnić rolę siły dośrodkowej, co zapiszemy:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_d \Rightarrow G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (5.4.)$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję sił dośrodkowej (3.10.). Z powyższej równości możemy np. obliczyć prędkość v satelity poruszającego się po orbicie o promieniu r (oczywiście r liczymy od środka masy źródłowej - np. Ziemi - do środka satelity - np. Księżyca lub Hot Bird). Prędkość v jest prędkością liniową na obwodzie orbity (jest ona styczna do orbity).

5.2.1. I prędkość kosmiczna

Jest to taka prędkość pozioma, jaką należy nadać ciału na powierzchni Ziemi, aby stało się ono satelitą Ziemi (Rysunek 5.2.a). Skoro tak, to wystarczy, że we wzorze (5.4.) podstawimy M_Z i R_Z w miejsce masy źródła i promienia orbity. Otrzymamy:

$$G \frac{M_Z m}{R_Z^2} = \frac{mv_1^2}{R_Z} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} \approx 7,9 \text{ km/s} \quad (5.5.)$$

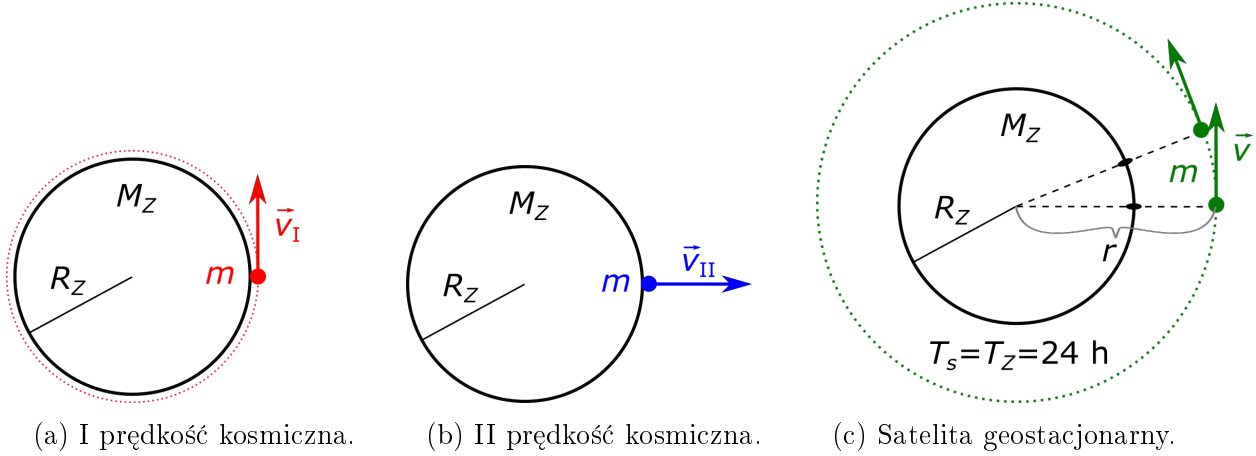
Pamiętając związek (5.2.) między przyspieszeniem grawitacyjnym Ziemi, a jej promieniem i masą, możemy zapisać wzór na v_1 jeszcze tak:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} \quad (5.6.)$$

Wartość pierwszej prędkości kosmicznej jest bardzo duża - aż 7900 m/s, czyli ok. 23 razy większa od prędkości dźwięku w powietrzu. Zauważmy, że satelita poruszający się na orbicie na wysokości h nad powierzchnią Ziemi, czyli orbicie o promieniu $r = R_Z + h$, ma prędkość równą $v = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z+h}} < v_1$.

5.2.2. II prędkość kosmiczna

II prędkość kosmiczna to taka prędkość pionowa, jaką należy nadać rakiecie, aby opuściła ona ziemskie pole grawitacyjne (Rysunek 5.2.b). Jest ona czasem nazywana także prędkością



Rysunek 5.2.: Ilustracja prędkości kosmicznych i satelity.

ucieczki (z pola grawitacyjnego Ziemi). Żeby znaleźć wzór na II prędkość kosmiczną v_{II} , należy zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej i założyć, że w punkcie docelowym nasza rakietę się zatrzymała (nie ma już energii kinetycznej) i jej energia potencjalna wynosi zero (nie oddziałuje już z Ziemią, uciekła z pola ziemskiego). Oczywiście na starcie rakietę ma i energię kinetyczną, i energię potencjalną, znajduje się w odległości R_Z od środka Ziemi. Wyprowadzenie jest więc proste:

$$E_{c,Z} = E_{c,\infty} \Rightarrow \frac{mv_{II}^2}{2} - G\frac{M_Z m}{R_Z} = 0 \Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}v_I \approx 11,2 \text{ km/s} \quad (5.7.)$$

Jest ona więc, co oczywiste, większa wartość niż v_I . Zauważmy, że tak v_I jak i v_{II} nie zależą od masy wynoszonego na orbitę satelity lub wystrzeliwanej w kosmos rakietę. W obu wyprowadzeniach masa m „skraca się”.

W analogiczny do (5.7.) sposób można znaleźć tzw. trzecią prędkość v_{III} , która umożliwia ciało (rakiecie) opuszczenie pola grawitacyjne Układu Słonecznego. Ponieważ praktycznie cała masa Układu Słonecznego skupiona jest w Słońcu o masie $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, do wzoru na v_{III} wstawimy właśnie M_S . Zakładając, że nasza rakietę startuje z Ziemi, jako odległość we wzorze wstawimy promień orbity Ziemi w ruchu dookoła Słońca r_{ZS} , czyli ok. 150 000 000 km (odległość ta jest tzw. jednostką astronomiczną, j.a. lub a.u.). Otrzymamy $v_{III} = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_{ZS}}} \approx 42,1 \text{ km/s}$. W rzeczywistości nie potrzeba aż tak dużej szybkości, aby wystrzelić rakietę poza Układ Słoneczny. Jeśli uwzględnimy szybkość Ziemi na jej orbicie okołosłonecznej (ok. 30 km/s), to prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego Słońca staje się dużo mniejsza. Czasem definiuje się także czwartą prędkość kosmiczną v_{IV} . Jest to prędkość potrzebna do opuszczenia przez rakietę naszej Galaktyki i ma wartość ok. 350 km/s.

5.2.3. Satelita geostacyjny

Ten satelita nie dość, że jest satelitą Ziemi (czyli w jego ruchu po okręgu wokół Ziemi siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej), to jeszcze ma okres obiegu wokół Ziemi równy dobie ziemskiej (dlatego mówimy, że jest geostacyjny) - Rysunek 5.2.c. Innymi słowy, satelita ten wisi nad określonym punktem nad powierzchnią Ziemi i razem z tym punktem wykonuje pełen obrót w ciągu 24 h. Należy od razu skomentować, że taki ruch satelity jest możliwy

tylko jeśli jego orbita leży w płaszczyźnie równika Ziemi. A więc satelita geostacjonarny wisi nad równikiem. Dlatego też, żeby odbierać sygnał telewizji satelitarnej, np. Hot Bird, który jest satelitą geostacjonarnym, musimy skierować czaszę anteny satelitarnej na południe.

Interesującym zagadnieniem jest znalezienie promienia orbity takiego satelity (lub jego wysokości nad powierzchnią Ziemi). Obie potrzebne informacje, które musimy wykorzystać, już podaliśmy - satelita geostacjonarny jest satelitą i ma okres obrotu wokół Ziemi równy $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$. Możemy więc zapisać

$$\begin{cases} F_g = F_d \\ T = 86400 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{GM_Z m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \\ v = \frac{2\pi r}{T} \end{cases} \Rightarrow \frac{GM_Z m}{r^2} = \frac{m}{r} \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow r^3 = \frac{GM_Z T^2}{4\pi^2} \quad (5.8.)$$

Po podstawieniu danych otrzymamy wynik $r \approx 42\,300 \text{ km}$. Wobec tego wysokość satelity geostacjonarnego nad powierzchnią Ziemi wynosi $h = r - R_Z \approx 36\,000 \text{ km}$. Jest to już daleko poza ziemską atmosferą.

Przykłady

1. Na jaką wysokość nad powierzchnię Ziemi wzniesie się rakietę wystrzeloną z powierzchni z prędkością $v_0 = 1000 \text{ m/s}$?

To jest świetne zadanie na wykorzystanie zasady zachowania energii. Na powierzchni Ziemi rakietę ma oczywiście energię kinetyczną, związaną z prędkością v_0 , ale i energię potencjalną - pamiętamy dyskusję tuż przed Przykładami. Gdzieś na wysokości h nad Ziemią, której szukamy, rakietę ma tylko energię potencjalną, bo się zatrzymuje. Zapiszemy więc zasadę zachowania energii:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G \frac{M_Z m}{R_Z} = -G \frac{M_Z m}{R_Z + h} \Rightarrow h = \frac{2GM_Z R_Z}{2GM_Z - v_0^2 R_Z} - R_Z = 51,1 \text{ km}$$

Ciekawym przypadkiem jest, gdy prędkość początkowa rakiety jest jakimś ułamkiem I lub II prędkości kosmicznej. Oczywiście gdy $v_0 = v_{II}$ odpowiedź jest prosta i nieciekawa - rakietę ucieknie do nieskończoności. Tego się spodziewamy, bo wiemy, że v_{II} jest prędkością potrzebną do opuszczenia pola ziemskiego, a energia potencjalna oddziaływania grawitacyjnego jest zero dopiero w nieskończoności. Czy ten sam wniosek wynika ze wzoru powyżej? Sprawdźmy. Wykazaliśmy w (5.7.), że $v_{II}^2 = \frac{2GM_Z}{R_Z}$. Wtedy w liczniku powyższego wzoru mamy: $2GM_Z R_Z m - mR \cdot \frac{2GM_Z}{R_Z} = 0$. Zero w mianowniku oznacza, że $h = \infty$.

Obliczmy h , które osiąga rakietę o prędkości początkowej równej np. $\frac{1}{2}v_{II}$. Na podstawie (5.5.) wiemy w takim razie, że $v_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2GM_Z}{R_Z}$, a po podstawieniu do naszego ogólnego wzoru otrzymujemy: $h = \frac{8}{7}R_Z - R_Z = \frac{1}{7}R_Z = 910 \text{ km}$.

2. O ile trzeba zwiększyć prędkość satelity krążącego po orbicie geostacjonarnej, aby mógł on poruszać się na orbicie o 2-razy większym promieniu?

To zadanie nawiązuje do manewru przeniesienia satelity na inną orbitę. W tym celu należy na chwilę odpalić silniki naszego satelity i zwiększyć jego prędkość na orbicie. Pomijamy w tym rozwiązaniu kwestię orbity transferowej (elipsy), a jedynie pytamy, o ile większa prędkość jest potrzebna, aby ciało było satelitą na 2-krotnie dalszej orbicie.

Wiemy, że promień orbity i prędkość orbitalna są ze sobą powiązane wzorem (5.4.).

$$\begin{cases} \frac{GMm}{r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1} \\ \frac{GMm}{r_2^2} = \frac{mv_2^2}{r_2} \\ r_2 = 2r_1 \end{cases} \Rightarrow v_2^2 = \frac{GM}{r_2} = \frac{GM}{2r_1} = \frac{1}{2}v_1^2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$$

Zatem zmiana prędkości musi wynosić $\Delta v = v_2 - v_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_1 \approx 0,29v_1$ - o tyle należy zwiększyć prędkość satelity, przy czym v_1 jest pierwotną prędkością na orbicie geostacjonarnej. Oczywiście $v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}$, gdzie $T = 24$ h i $r_1 = 42\,300$ km, jak obliczyliśmy w (5.8.). W takim razie $\Delta v \approx 0,9$ km/s.

Zaszalejmy jeszcze dalej. Załóżmy, że wiemy, że w trakcie krótkotrwałego odpalenia silników satelity, potrzebnego do nadania dodatkowej prędkości Δv , dysponujemy znaną siłą ciągu silników, np. $F_c = 10$ kN.

Na marginesie: siła ciągu silników bierze się z odrzutu gazów wylotowych spalanych przez silnik (silnik odrzutowy, jak w samolocie pasażerskim). Zależy ona od prędkości gazów wylotowych względem silnika $\vec{v}_g$ i szybkości ubytku masy paliwa w trakcie spalania μ [kg/s] poprzez prostą relację: $\vec{F}_c = -\mu\vec{v}_g$.

Powiedzmy, że znając siłę ciągu F_c , masę satelity (np. $m = 1$ t) i potrzebną zmianę prędkości Δv , chcemy obliczyć na jak długo należy włączyć silnik, aby uzyskać pożądaną zmianę prędkości. Przypomnijmy sobie wzór (3.3.), który wiąże siłę wypadkową ze zmianą pędu w czasie (uogólniona II zasada dynamiki). U nas siłą wypadkową jest F_c , a zmiana pędu $\Delta p = m\Delta v$. Ponieważ zmiana pędu zachodzi w stosunkowo długim czasie, II zasadę dynamiki zapiszemy bez pochodnych, a tylko przez „deltę”. Czas Δt możemy więc łatwo wyliczyć jako:

$$\Delta t = \frac{m\Delta v}{F_c} = 90 \text{ s}$$

Okazuje się, że wystarczy nam odpalenie silników na stosunkowo krótki czas, aby uzyskać potrzebną do zmiany orbity prędkość. Taki impuls jest bardzo ekonomiczny, bo w krótkim czasie spalimy niewiele paliwa. Warunkiem jest jednak to, aby silnik pozwalał na uzyskanie odpowiednio dużej siły ciągu, co wymaga użycia mocnych silników odrzutowych.

Na koniec tego dość długiego przykładu musimy jeszcze skomentować jedną sprawę. *Ciekawostka.* Przedstawiony w przykładzie manewr zmiany orbity przez satelitę jest zbliżony do tzw. manewru transferowego Hohmanna (od nazwiska niemieckiego naukowca). Jest to najbardziej ekonomiczny sposób zmiany orbity kołowej statków kosmicznych poprzez tylko dwukrotne użycie silników (dwóch impulsów prędkości). Na czas manewru statki poruszają się po tzw. orbicie transferowej Hohmanna, która jest elipsą (Ziemia znajduje się w jednym z ognisk elipsy). Dlaczego dwukrotne użycie silników? Po osiągnięciu docelowej orbity należy przyłożyć jeszcze jeden impuls prędkości, aby utrzymać statek na nowej (np. większej) orbicie kołowej i żeby statek nie powrócił na starą orbitę po eliptycznej trajektorii Hohmanna. Oczywiście manewr ten można wykonać nie tylko wykorzystując ruch po orbicie okołoziemskiej. Po więcej szczegółów odsyłamy do innych źródeł.

5.3. Prawa Keplera

Na początku XVII w. Johannes Kepler podał 3 prawa ruchu planet wokół Słońca, wnioskując na podstawie obserwacji astronomicznych Galileusza i Tycho de Brahe. W tym podrozdziale tylko krótko je dyskutujemy.

I prawo Keplera

Planety krążą wokół Słońca po orbitach o kształcie elipsy, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy. Elipsa jest krzywą zamkniętą charakteryzującą się tym, że ma dwa ogniska - punkty takie, że suma odległości dowolnego punktu elipsy od tych punktów jest stała. Elipsa ma dwie prostopadłe osie o różnych długościach. Dla porównania okrąg ma tylko jedną oś - średnicę. Inną charakterystyczną dla elipsy wielkością jest mimośród, który wyraża stosunek odległości między ogniskami do długiej osi elipsy. Mimośród określa jak bardzo „spłaszczona” jest elipsa. Mimośród równy zero oznacza okrąg. Okazuje się, że planety Układu Słonecznego mają bardzo małe mimośrody, w większości rzędu 0,008-0,01. Oznacza to, że ogniska orbit „zbiegają się” niemal do jednego punktu w środku elipsy, a więc orbita jest prawie kołowa. Wyjątkiem jest tutaj Merkury i Pluton, których mimośrody wynoszą ok. 0,2. Orbity Merkurego i Plutona są więc bardziej rozciągnięte („mniej okrągłe”).

II prawo Keplera

Promienie wodzący planet w ruchu po orbicie zakreślają w równym czasie równe pola powierzchni. Inne wyrażenie II prawa Keplera brzmi: prędkość polowa planety (czyli zmiana wektora powierzchni w czasie) jest stała. Dla niewielkich czasów Δt można przyjąć, że promień wodzący planety $\vec{r}$ zakreśla pole trójkąta $S = \frac{1}{2}v\Delta t \cdot r$, gdzie v jest prędkością planety w danym punkcie orbity. Ponieważ orbity są eliptyczne i planety zmieniają nieco swoją odległość od Słońca, II prawo Keplera oznacza, że w różnych punktach orbity prędkości planet na orbicie są różne. I tak w peryhelium (punkt na orbicie najbliższej Słońca) prędkość planety jest największa, natomiast w aphelium (najdalej od Słońca) - najmniejsza. Można łatwo pokazać, że II prawo Keplera jest konsekwencją zasady zachowania momentu pędu planety w ruchu po orbicie okołosłonecznej. Otóż, moment pędu $\vec{L} = 2m \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$, gdzie m jest masą planety, a $\frac{d\vec{S}}{dt}$ jest prędkością polową. Zachowanie momentu pędu oznacza zachowanie prędkości polowej, co jest treścią II prawa Keplera.

III prawo Keplera

Stosunki sześciątów promieni orbity do kwadratów okresów obiegu wokół Słońca są równe dla wszystkich planet.

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{const} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (5.9.)$$

Przez M rozumiemy tu masę Słońca, czyli centrum pola grawitacyjnego w ruchu planet. Zauważmy, że podobny stosunek (r^3/T^2) otrzymaliśmy przy okazji dyskusji o satelicie geostacjonarnym - wzór (5.8.). Na tej podstawie możemy zidentyfikować czym jest stała (po prawej stronie) w III prawie Keplera.

Tak sformułowane III prawo dotyczy przybliżenia orbit kołowych (o stałym promieniu R).

Postać III prawa Keplera dla orbit eliptycznych jest identyczna, przy czym promienie R musimy zastąpić przez półos wielką a elipsy (jest to połowa długiej osi elipsy). W każdym przypadku (orbita kołowa czy eliptyczna) zakładamy, że wpływ masy planety na jej ruch orbitalny jest pomijalny wobec dużo większej masy Słońca, co oznacza, że środek obrotu układu Słońce–planeta jest dokładnie w środku Słońca.

Przykłady

1. Stosunek okresów obiegu Jowisza i Ziemi wokół Słońca wynosi 12. Zakładając, że orbity planet są okręgami, chcemy obliczyć stosunek odległości Jowisza i Ziemi od Słońca. Skorzystamy tu oczywiście z III prawa Keplera. Co wiemy? Znamy stosunek $T_J/T_Z = 12$. Zgodnie z (5.9.):

$$\frac{R_J^3}{T_J^2} = \frac{R_Z^3}{T_Z^2} \Rightarrow \left(\frac{R_J}{R_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_J}{T_Z}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_J}{R_Z} = \sqrt[3]{12^2} \approx 5,24$$

2. Korzystając z III prawa Keplera wykaż, że siła działająca na planety (ogólnie: na masę w polu grawitacyjnym masy źródłowej) jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między planetą a Słońcem. Innymi słowy: wyprowadź prawo powszechnego ciążenia.

Chcemy w tym przykładzie jakby odtworzyć rozumowanie Newtona, które doprowadziło go do zależności $F_g \sim \frac{1}{R^2}$. Wyjdźmy zatem z III prawa Keplera:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{v^2 R} = \frac{4\pi^2}{F \cdot \frac{R}{m} \cdot R} = \frac{4\pi^2 m}{F R^2} = \text{const} \Rightarrow F = \frac{4\pi^2 m}{\text{const} \cdot R^2} \Rightarrow F \sim \frac{1}{R^2}$$

co dokładnie chcieliśmy wykazać. Skorzystaliśmy po drodze z zależności okresu T od prędkości na orbicie v oraz zauważyliśmy, że siła grawitacji, której szukamy, jest siłą dośrodkową w ruchu po orbicie (planety są satelitami Słońca), stąd:

$$F = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = F \cdot \frac{R}{m}.$$

Zadania

1. W pewnej odległości między identycznymi masami m , siła ich wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego ma wartość 1 N. Ile razy wzrośnie (czy zmaleje?) ta siła, jeśli zbliżymy te masy do siebie dwukrotnie?
2. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi wartość przyspieszenia grawitacyjnego g spada do 95% wartości na powierzchni Ziemi ($9,81 \text{ m/s}^2$)?
3. Z jaką prędkością należy wystrzelić raketę, aby dotarła ona do satelity geostacjonarnego, np. Hot Bird (i tam się zatrzymała)?
4. Oblicz całkowitą energię mechaniczną (sumę energii kinetycznej i potencjalnej) satelity o masie m krążącego po orbicie kołowej o promieniu r wokół planety o masie M . *Uwaga.* Znamy tylko G, M, m, r . Jaka jest wartość liczbową tej energii dla satelity geostacjonarnego o masie 1 t?

5. Ile razy zmniejszył się promień gwiazdy w wyniku kolapsu grawitacyjnego, jeżeli częstotliwość jej wirowania wokół własnej osi wzrosła N -krotnie?
6. Znając długość trwania miesiąca synodycznego (okres Księżyca w ruchu po orbicie okołozemskiej), która wynosi 29 dni ziemskich, oblicz odległość Ziemia–Księżyc r_{ZK} .
7. Orbita Merkurego jest bardziej eliptyczna niż w przypadku innych planet. Peryhelium i aphelium tej orbity są odpowiednio równe 46 mln km i 69,82 mln km. Oblicz stosunek prędkości orbitalnych Merkurego w peryhelium i aphelium.

Rozdział 6.

Ruch harmoniczny

Ruchem drgającym nazwiemy każdy ruch, w którym ciało wielokrotnie wraca do pewnego punktu w przestrzeni, niekoniecznie za każdym razem po tym samym czasie. Mówiąc bardziej ogólnie - w opisie ruchu drgającego pewne wielkości fizyczne (np. położenie, prędkość itp.) naprzemiennie (cyklicznie) rosną i maleją w czasie. Ruch drgający o stałym cyklu zmian nazwiemy **ruchem okresowym** (periodycznym). Charakterystyczne dla ruchu okresowego jest to, że możemy zdefiniować okres - czas, po którym ciało wraca do pewnego ustalonego położenia (zazwyczaj mówimy tu o położeniu równowagi). Położenie w funkcji czasu w ruchu okresowym może być opisane dowolną funkcją okresową - np. piłokształtną, trójkątną czy sinusoidą. Ruch okresowy, dla którego ta funkcja jest sinusoidą (albo kosinusoidą) nazwiemy **ruchem harmonicznym prostym**. Ciało wykonuje ruch harmoniczny prosty, jeśli zachodzi on pod wpływem siły harmonicznej (inaczej: siły sprężystości). Ruch harmoniczny możemy więc zdefiniować na dwa sposoby: jako ruch pod wpływem siły harmonicznej (piszemy o niej w następnym podrozdziale) lub jako ruch, w którym położenie jest sinusoidalną (mówimy „harmoniczną”) funkcją czasu.

6.1. Siła i energia sprężystości

Siła sprężystości ma dwie cechy: jest proporcjonalna do wychylenia ciała z położenia równowagi i przeciwnie do niego zwrócona. Zgodnie z tym, definicja siły sprężystości (siły harmonicznej) jest następująca:

$$F_s = -kx \qquad \vec{F}_s = -k\vec{x} \qquad (6.1.)$$

gdzie x jest wychyleniem ciała mierzonym od położenia równowagi, a k pewną stałą proporcjonalności [N/m]. Gdy mamy do czynienia ze sprężyną, stała k jest stałą siłową sprężyny. Znak „-” we wzorze wyraża stwierdzenie, że siła sprężystości jest skierowana przeciwnie do wychylenia. Ważne jest, aby pamiętać, że x mierzymy od położenia równowagi. Czym jest położenie równowagi? To takie położenie ciała, w którym nie porusza się ono. Np. dla masy na sprężynie jest to położenie, w którym sprężyna nie jest ani ściśnięta ani rozciągnięta; natomiast w przypadku wahadła umieszczonego w polu grawitacyjnym - kierunek pionowy.

Siłę sprężystości wiąże się często z prawem Hooke’a, które jest fundamentalnym prawem teorii sprężystości. Prawo Hooke’a mówi, że przykładając do ciała o długości początkowej l siłę F rozciągającą to ciało, wydłuża się ono o Δl proporcjonalnie do tej siły liczonej na

jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego S . Prawo to można zapisać wzorem:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (6.2.)$$

gdzie E jest stałą materiałową charakterystyczną dla danego typu materiału. Nosi ona nazwę modułu Younga albo modułu sprężystości podłużnej, wyrażona jest w paskalach [Pa], tak jak ciśnienie. Stosunek $F/S = \sigma$ nazywa się czasem naprężeniem, a stosunek $\Delta l/l = \varepsilon$ - odkształceniem. W rozciągniętym pod wpływem zewnętrznej siły F materiale pojawia się siła sprężystości, która „chce” przywrócić początkową długość materiału. Przeciwdziała więc ona sile zewnętrznej. Siła sprężystości jest zatem przeciwnie zwrócona do wydłużenia, a zgodnie z prawem Hooke’a możemy ją zapisać jako $F_s = -\frac{ES}{l} \Delta l = -kx$, gdzie wydłużenie (wychylenie z położenia równowagi) $\Delta l = x$, natomiast stała proporcjonalności $\frac{ES}{l} = k$.

Ściśnięta (lub rozciągnięta) sprężyna gromadzi energię, którą może wykorzystać na wykonanie pracy. Jest to energia potencjalna, bo jest związana z oddziaływaniem przekazywanym przez siłę sprężystości. Chcemy teraz znaleźć wzór, który definiuje **energię potencjalną sprężystości** E_p (często używa się też oznaczenia W) zgromadzoną w sprężynie o stałej k i ściśniętej (lub rozciągniętej) o x względem położenia równowagi. Żeby ścisnąć (lub rozciągnąć) sprężynę należy przyłożyć siłę zewnętrzną, która przeciwdziała sile sprężystości. Nasza siła zewnętrzna F_z ma więc tę samą wartość, co siła sprężystości F_s , ale przeciwny zwrot, zatem $F_z = +kx$. Energię potencjalną sprężyny W możemy rozumieć jako równą pracy, którą siła zewnętrzna F_z musi wykonać, aby ścisnąć (lub rozciągnąć) sprężynę o x . Z definicji pracy (4.1.) mamy:

$$W = W_{F_z} = \int_0^x F_z dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^x = \frac{kx^2}{2} \quad (6.3.)$$

Zatem energia potencjalna sprężystości zgromadzona w sprężynie ściśniętej (lub rozciągniętej) o x wynosi $W = \frac{1}{2}kx^2$. Przypominamy: x mierzymy tutaj od położenia równowagi. Jeżeli więc ktoś nas zapyta „Ile wynosi energia już naciągniętej sprężyny, jeśli rozciągniemy ją dodatkowo o Δx ?”, to należy pamiętać, że ta „dodatkowa energia” będzie różnicą: $\Delta W = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

Przykłady

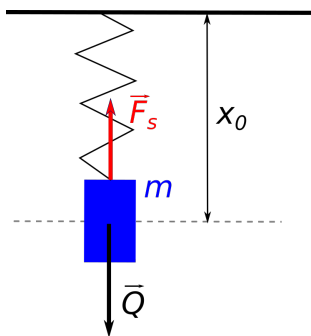
1. Sprężynę o długości swobodnej 0 i stałej k zaczepiono pod sufitem, a do jej końca zaczepiono masę m . Następnie delikatnie puszcza się masę, ale nie wprowadza się jej w drgania. Znajdź położenie równowagi masy na sprężynie.

Jakie znaczenie ma tutaj stwierdzenie, że długość swobodna sprężyny wynosi 0 (co to znaczy)? Jeśli do takiej sprężyny nie podwiesimy masy, to zwinie się ona do zeroowej długości. Taka nierozciągnięta sprężyna nie ma swojej długości. Nie jest to więc sprężyna taka jak sprężynka w długopisie. Oczywiście, gdy do sprężyny zawieszono pionowo dołączymy masę, sprężyna się wydłuży. Jeśli puścimy masę delikatnie, sprężyna się rozciągnie do momentu, aż masa osiągnie położenie równowagi, czyli takie, w którym masa będzie spoczywać. Jeśli puścimy masę gwałtownie, spadnie ona nisko, rozciągając sprężynę bardziej niż tylko do położenia równowagi i masa będzie wykonywać drgania. W położeniu równowagi w naszym przykładzie sprężyna jest rozciągnięta, więc występuje siła sprężystości (patrz: Rysunek 6.1.). Skoro jednak masa pozostaje w

spoczynku (położenie równowagi), to siła sprężystości jest równoważona przez ciężar masy. Pomijamy tutaj masę samej sprężyny - tak zazwyczaj będziemy robić. Z warunku równowagi obliczamy wydłużenie sprężyny z zawieszoną na niej masą, czyli nowe położenie równowagi x_0 :

$$F_s = Q \quad \Rightarrow \quad kx_0 = mg \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

Pominęliśmy tutaj znak „-”, bo interesuje nas tylko wartość siły sprężystości. Jeżeli teraz rozciągniemy sprężynę dodatkowo o A [cm] w dół, to masa zacznie wykonywać drgania harmoniczne względem naszego położenia równowagi x_0 . To dodatkowe rozciągnięcie A nazwiemy amplitudą tych drgań.



Rysunek 6.1.: Położenie równowagi masy na sprężynie zawieszanej pod sufitem.

- Pręt metalowy o przekroju kołowym i średnicy 2 mm oraz początkowej długości 1 m zawieszono pionowo, mocując go jednym końcem u sufitu. Na drugim końcu zawieszono odważnik o masie 10 kg. Jeśli zmierzone przy pomocy czujnika mikrometrycznego wydłużenie pręta wyniosło $160 \mu\text{m}$, to jaki jest moduł Younga pręta? Z jakiego materiału go wykonano?

Zgodnie z prawem Hooke’a pod wpływem naprężenia (siła na jednostkę przekroju poprzecznego) pręt wydłuża się. Siła obciążająca pręt w tym przypadku to siła ciężkości działająca na ciężarek: $F = mg$ (pomijamy ciężar samego pręta). Wielkość odkształcenia zależy od materiału, z jakiego wykonano pręt, poprzez moduł Younga, którego szukamy. Przekształcając wzór (6.2.) otrzymujemy:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S} \cdot \frac{l}{\Delta l} = \frac{mg}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \frac{l}{\Delta l} = 1,95 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 195 \text{ GPa}$$

Uzyskany wynik to typowa wartość modułu Younga dla stali.

6.2. Oscylator harmoniczny

Oscylatorem harmonicznym nazywamy bardzo prosty model fizyczny złożony z dwóch elementów: masy m zaczepionej na sprężynie o stałej k . Dyskutowaliśmy ten model w Przykładzie z poprzedniego podrozdziału. Dla uproszczenia założmy teraz, że sprężyna i masa leżą na stole (pomijamy tarcie) i sprężyna jest zaczepiona drugim końcem do nieruchomej ściany. Taki układ (oscylator) wykonuje drgania poziome. Chcemy opisać te drgania, tzn.

znaleźć zależność od czasu położenia, prędkości i przyspieszenia masy m . Wiemy, że drgania zachodzą pod wpływem siły harmoniczej. Jeśli pominiemy tarcie oraz zauważymy, że ciężar masy jest równoważony przez siłę reakcji podłoża (stołu), to stwierdzimy, że siła sprężystości jest siłą wypadkową. Możemy więc zapisać II zasadę dynamiki:

$$ma = -kx \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (6.4.)$$

Skorzystaliśmy tutaj z definicji przyspieszenia (2.3.). Otrzymane równanie ze względu na niewiadomą $x(t)$ jest trudne do rozwiązania. Jest to tzw. równanie różniczkowe, do rozwiązania którego trzeba mieć pewną wiedzę z analizy matematycznej. Bez wnikania w szczegóły matematyczne, możemy zgadnąć postać rozwiązania tego równania. Wystarczy, że zapytamy, jaka funkcja dwa razy zróżniczkowana da nią samą? Jest to oczywiście funkcja sinus lub kosinus (a także funkcja eksponencjalna, o której nie będziemy mówić). Możemy więc łatwo sprawdzić, że funkcja

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (6.5.)$$

jest dobrym rozwiązaniem równania (6.4.). Takie rozwiązanie zakłada, że przyjmujemy położenie równowagi w $x = 0$. Wprowadziliśmy 2 nowe stałe: ω - częstość i A - amplituda. Amplituda jest największą możliwą wartością położenia w ruchu drgającym. Np. jeśli sprężynę ściśniemy o 1 cm, to zaczepiona do niej masa będzie drgać z amplitudą właśnie 1 cm. W tym ruchu masa może przyjąć położenie od $-A$ do $+A$ względem położenia równowagi. Zauważmy, że funkcja sinus ma największą wartość 1, więc A jest rzeczywiście największym możliwym wychyleniem. Rozwiązanie (6.5.) czasem uzupełnia się o tzw. fazę początkową drgań φ , która mówi nam o „fazie” (etapie) drgań w chwili początkowej $t = 0$. Równanie ruchu oscylatora wygląda wtedy tak: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, a cały argument sinusa nazywamy często fazą. Przykładowo jeśli faza początkowa wynosi $\varphi = 90^\circ$, to drgania mają równanie: $x(t) = A \cos(\omega t)$. Początkowe wychylenie masy na sprężynie jest wówczas równe $x(0) = A$.

Ważną wielkością jest częstość ω . Jeśli wstawimy rozwiązanie (6.5.) do równania (6.4.), to okaże się, że:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.6.)$$

Częstość ma jednostkę 1/s (proszę sprawdzić samemu!) i jest bezpośrednio związana z okresem drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.7.)$$

Okres drgań oscylatora zależy od masy m (im większa, tym drgania wolniejsze - z większym okresem) oraz stałej sprężyny k (im większa - sprężyna twardsza, tym drgania szybsze - z mniejszym okresem). Jak obliczyć okres dowolnego ruchu harmonicznego? Należy po pierwsze ustalić czy i jak siła zależy od położenia (wychylenia). Jeśli zależność jest typu $F \sim -x$, to stałą stojącą przy x interpretujemy jako k , a wtedy okres obliczamy ze wzoru (6.7.).

Prędkość oscylatora w funkcji czasu znajdziemy korzystając z definicji:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t) \quad (6.8.)$$

Wielkość $v_{max} = A\omega$ o wymiarze [m/s] nazywamy amplitudą prędkości - jest to największa możliwa prędkość oscylatora. Zauważmy, że $v = v_{max}$ wtedy, gdy kosinus ma wartość jeden,

tj. dla argumentu 0 ($\cos(\omega t) = 1 \Leftrightarrow \omega t = 0^\circ$). Z kolei położenie dla tego argumentu wynosi: $x(\omega t = 0^\circ) = 0$, bo sinus zeruje się dla argumentu 0. Wniosek jest więc prosty i logiczny: masa drgająca na sprężynie ma największą prędkość, gdy przechodzi przez położenie równowagi. Łatwo się z tym zgodzimy, obserwując ruch wahadła.

Zależność przyspieszenia od czasu znajdziemy podobnie:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (6.9.)$$

Amplituda przyspieszenia wynosi $a_{max} = A\omega^2$ [m/s²]. Zauważmy, że jeśli pomnożymy powyższy wzór przez masę otrzymamy siłę wypadkową: $ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t) = -kx$, czyli wróciliśmy do równania dynamiki, z którego wyszliśmy. Potwierdziliśmy w ten sposób słuszność rozwiązania równania oscylatora. Równanie postaci (6.4.) jest bardzo ważnym równaniem fizycznym. Jest ono na tyle ważne, że w matematyce określa się je nazwą „równanie różniczkowe typu oscylatora”.

Przykłady

1. Wiadomo, że amplituda prędkości oscylatora o masie 100 g, wykonującego 3 drgania na sekundę, wynosi 6 cm/s. Oblicz okres, amplitudę położenia tego oscylatora i stałą siłową sprężyny.

To zadanie to właściwie taka żonglerka wzorami, które przed chwilą wyprowadziliśmy i przedyskutowaliśmy. Znając częstotliwość oscylatora - 3 drgania na sekundę, czyli 3 Hz, obliczamy okres i częstość:

$$T = 1/f = 1/3 \text{ s} \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 6\pi \frac{1}{\text{s}}$$

Znając okres i amplitudę prędkości, znajdujemy amplitudę położenia:

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow A = v_{max}/\omega = 1/\pi \text{ cm} \approx 0,32 \text{ cm}.$$

Stałą siłową sprężyny znajdziemy, mając ω i masę oscylatora m i przekształcając wzór (6.6.):

$$k = m\omega^2 \approx 36 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

2. Wykaż, że na ciało o masie m umieszczone w hipotetycznym tunelu wydrążonym przez środek kuli ziemskiej działa siła, która jest harmoniczna. Oblicz okres ruchu tej masy w tunelu. Jaką maksymalną prędkość osiąga ciało?

Na ciało umieszczone wewnątrz kuli w odległości r od jej środka działa siła grawitacji pochodząca tylko od tej masy M' , która jest zamknięta sferą o promieniu r (Rysunek 6.2.). Pokażemy, że siła ta jest proporcjonalna do r . Jest oczywiście skierowana przeciwnie do wychylenia (r mierzymy od środka kuli do punktu, w którym jest masa, natomiast siła grawitacji działa do środka kuli). Wykorzystamy gęstość $\rho = M_Z/V_Z$, gdzie objętość kuli ziemskiej $V_Z = \frac{4}{3}\pi R_Z^3$.

$$F_g = -G \frac{M'm}{r^2} = \left| M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M_Z \frac{r^3}{R_Z^3} \right| = -G \frac{M_Z m}{R_Z^3} r$$

Tak, jak się spodziewaliśmy, siła jest proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie do niego skierowana. Jest więc siłą harmoniczną. Powiemy, że siła grawitacji pełni w ruchu masy przez tunel wydrążony w Ziemi rolę siły sprężystości. W takim razie,

łatwo zlokalizujemy stałą k i w konsekwencji okres (porównamy powyższy wzór na siłę z definicją siły sprężystości $F = -kx$):

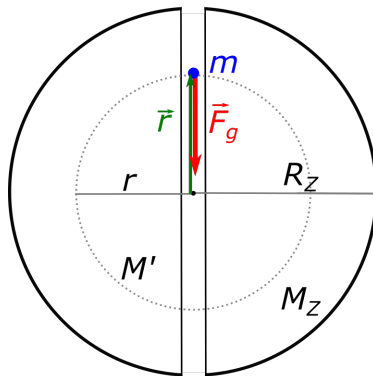
$$k = G \frac{M_Z m}{R_Z^3} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z^3}{GM_Z}} = \left| g = \frac{GM_Z}{R_Z^2} \right| = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}} = 84 \text{ min}$$

Wykorzystaliśmy tu definicję okresu (6.7.) i zależność przyspieszenia grawitacyjnego od masy i promienia Ziemi (5.2.). Okres nie zależy od masy m naszego ciała, a tylko od promienia Ziemi i przyspieszenia grawitacyjnego. Oczywiście, analogiczny wzór możemy podać dla każdej planety, gwiazdy itd. Co ciekawe, gdyby rzeczywiście możliwe byłoby wydrążenie tunelu przez środek Ziemi, podróż na antypody trwałaby tylko 42 min (połowę okresu).

Największa prędkość ciało ma oczywiście w środku Ziemi, które jest położeniem równowagi w ruchu harmonicznym przez nasz hipotetyczny tunel. Amplitudą położenia jest oczywiście promień Ziemi R_Z (ciało będzie drgało od jednej powierzchni Ziemi do drugiej). v_{max} wynosi więc:

$$v_{max} = A\omega = R_Z \cdot \sqrt{\frac{g}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} = v_1 = 7,9 \text{ km/s}$$

Podróż przez środek Ziemi odbywałaby się więc z pierwszą prędkością kosmiczną.



Rysunek 6.2.: Ciało w tunelu wydrążonym przez środek Ziemi.

6.2.1. Energia oscylatora

Zastanówmy się teraz ile wynosi całkowita energia mechaniczna drgającej (poruszającej się) masy na sprężynie, czyli oscylatora. Wcześniej poznaliśmy wzór na energię sprężystości $W = \frac{1}{2}kx^2$. Całkowita energia mechaniczna jest oczywiście sumą energii potencjalnej i kinetycznej: $E_c = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$. Ogólnie: oscylator się porusza z prędkością v , więc ma energię kinetyczną, oraz jest wychylony z położenia równowagi, więc ma energię potencjalną sprężystości. Ale i prędkość i położenie oscylatora zależą od czasu. Wiemy jak (patrz: (6.5.)

i (6.8.)). Podstawmy więc:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}k(x(t))^2 + \frac{1}{2}m(v(t))^2 = \frac{1}{2}k(A\sin(\omega t))^2 + \frac{1}{2}m(A\omega\cos(\omega t))^2 = \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t) = |m\omega^2 = k| = \\ &= \frac{1}{2}kA^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \quad (6.10.)$$

Okazuje się, że całkowita energia mechaniczna oscylatora nie zależy od czasu (jest stała w czasie), a tylko od amplitudy drgań. Zauważmy, że energia kinetyczna zmienia się w czasie jak $\cos^2(\omega t)$, a energia potencjalna jak $\sin^2(\omega t)$. Gdy jedna jest maksymalna - druga spada do zera i odwrotnie. W oscylatorze mamy więc do czynienia z ciągłą zamianą energii kinetycznej w potencjalną i odwrotnie. Ale w dowolnej chwili czasu, suma energii kinetycznej i potencjalnej jest zawsze taka sama i równa $E_c = \frac{1}{2}kA^2$.

Przykłady

1. Poruszający się po poziomym stole klocek o masie 2,5 kg uderza w leżącą poziomo sprężynę o stałej siłowej 320 N/m, która jest przytwierdzona drugim końcem do ściany. Klocek zatrzymuje się, gdy sprężyna jest ściśnięta o 7,5 cm. Współczynnik tarcia między klockiem a podłożem wynosi 0,25. Jaka była prędkość klocka tuż przed uderzeniem? O ile dzubi większa byłaby maksymalna energia sprężystości, jeśli by sprężynę ścisnąć o dodatkowe 1,5 cm?

Aby obliczyć prędkość klocka w tym zadaniu wykorzystamy zasadę zachowania energii, a raczej zasadę bilansu energetycznego. Energia kinetyczna uderzającego klocka poszła w części na zwiększenie energii potencjalnej sprężystości sprężyny i na pokonanie tarcia. Zapiszemy więc:

$$\frac{mv^2}{2} - fmgx = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} + 2f gx} = 0,95 \text{ m/s}$$

Siła tarcia wykonała pracę na odcinku o długości x , a jej wartość to $-fmgx$.

Pytanie o wzrost energii przy dodatkowym ściśnięciu sprężyny moglibyśmy sformułować też tak: jaką pracę trzeba wykonać, aby ścisnąć sprężynę o dodatkowe $\Delta x = 1,5 \text{ cm}$? W obu przypadkach chodzi o to, aby pamiętać, że energię potencjalną sprężystości mierzymy od położenia równowagi. Zatem odpowiedź na pytanie nie będzie na pewno: $W = \frac{k}{2}(\Delta x)^2$, bo wielkość Δx nie jest wychyleniem z położenia równowagi. Poprawna odpowiedź brzmi:

$$W = \frac{k}{2}(x + \Delta x)^2 - \frac{k}{2}(\Delta x)^2 = \frac{k}{2}x(x + \Delta x) = 1,08 \text{ J}$$

2. Jak w ruchu harmonicznym prędkość zależy od położenia w dowolnej chwili czasu? Jeżeli porównamy energię potencjalną i kinetyczną w dowolnej chwili czasu z całkowitą energią oscylatora, otrzymamy:

$$\frac{mv^2(t)}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow v(x) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Wykorzystując powyższy wzór kolejny raz możemy wykazać, że oscylator ma największą prędkość podczas przechodzenia przez położenie równowagi $x = 0$ (wynosi $v_{\max} = \omega A$), a najmniejszą, równą $v_{\min} = 0$ w maksymalnym wychyleniu $x = \pm A$.

6.2.2. Składanie drgań

W tym krótkim podrozdziale zajmiemy się zasadą superpozycji w odniesieniu do drgań harmonicznym. Jeśli mamy dwa oscylatory, wykonujące niezależne drgania, to możemy doprowadzić do superpozycji (nakładania się, sumowania) tych drgań. Wynik tego złożenia będzie różny dla różnych drgań, w zależności od ich faz (częstości i faz początkowych) i amplitud, a także kierunku. W kilku podpunktach rozpatrzemy typowe przypadki. Ogólne równanie drgań to: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

(1) Dwa identyczne drgania z przesunięciem fazowym $\Delta\varphi$ Równania drgań są następujące:

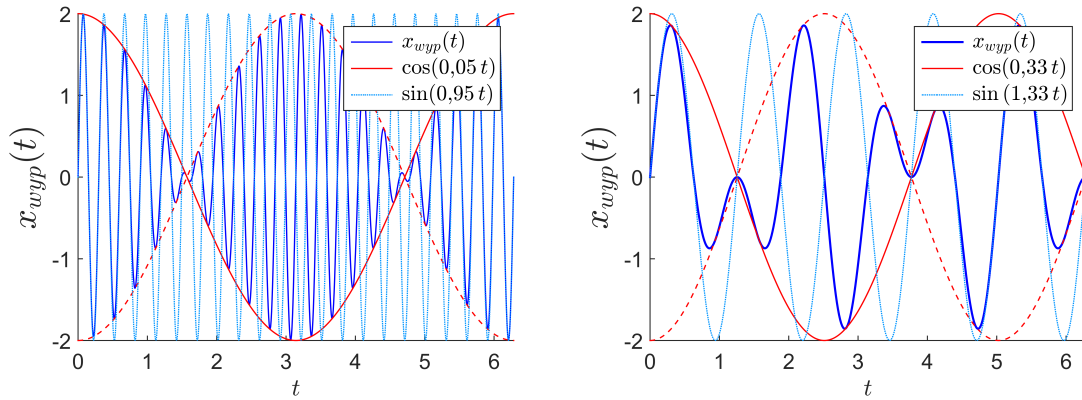
$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(\omega t) \\ x_2(t) &= A \sin(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{wyp} &= x_1 + x_2 = A (\sin(\omega t) + \sin(\omega t + \Delta\varphi)) = \\ &= 2A \sin\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ &= A' \sin\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right), \quad A' = 2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.11.)$$

Częstość drgania wypadkowego jest taka sama, jak drgań składowych, natomiast amplituda zależy od przesunięcia fazowego. Jeśli wynosi ono $\Delta\varphi = 180^\circ$, to $A' = 0$ i drgania są wygaszone. Jeśli przesunięcie nie występuje ($\Delta\varphi = 0^\circ$), to drganie wypadkowe jest $x_{wyp}(t) = 2A \sin(\omega t)$ (drgania są maksymalnie wzmocnione). W pośredniej sytuacji, np. gdy $\Delta\varphi = 120^\circ$, amplituda wynosi $A' = 2A \cdot \cos 60^\circ = 2A \cdot 0,5 = A$, a więc drganie wypadkowe ma amplitudę wyjściową. W zależności od przesunięcia fazowego mówimy o superpozycji konstruktywnej (wzmocnienie) lub destruktywnej (osłabienie lub wygaszenie).

(2) Dwa drgania w tym samym kierunku i o tych samych amplitudach, ale różnych częstościach. Mamy więc:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(\omega_1 t) \\ x_2(t) &= A \sin(\omega_2 t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{wyp} &= x_1 + x_2 = A (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = \\ &= 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \quad (6.12.)$$

Zauważmy, że amplituda takiego drgania jest 2 razy większa. Jeżeli $\omega_2 = \omega_1$, to argument kosinusa zeruje się, a kosinus przyjmuje wartość 1. Wtedy drganie wypadkowe opisane jest prostym równaniem: $x_{wyp}(t) = 2A \sin(\omega_1 t)$ - jest to więc drganie niemal identyczne, jak drganie składowe, ale ma 2 razy większą amplitudę. Ciekawym przypadkiem jest przypadek $\omega_2 \approx \omega_1$ (częstości drgań są zbliżone). Jest to przypadek występowania tzw. **dudnień**. Amplituda drgań jest sinusoidalnych modulowana jest funkcją kosinus (patrz: Rysunek 6.3.). Przykładowo, jeśli $\omega_2 = 0,9\omega_1$, to wypadkowe drganie ma postać: $x_{wyp}(t) = 2A \sin(0,95\omega_1 t) \cos(0,05\omega_1 t)$. Wykres takiej funkcji $x_{wyp}(t)$ składa się z wielu „bardzo wąskich sinusów” (pochodzących od czynnika $\sin(0,95\omega_1 t)$ o dużej częstości), opisanych z zewnątrz „obwiednią” o dużej szerokości (pochodzącej od czynnika $\cos(0,05\omega_1 t)$, a więc o małej częstości). Jeśli takie drganie rozchodzi się w postaci fali dźwiękowej, to obserwujemy wyraźne modulacje amplitudy (np. w postaci zmieniającej się głośności docierającego do nas dźwięku). Częstotliwością dudnień nazywamy wyrażenie $\omega_{dud} = \omega_2 - \omega_1$ (dudnienie występuje 2 razy częściej niż częstość obwiedni).



Rysunek 6.3.: Superpozycja dwóch drgań o tych samych amplitudach ($A = 1$), lecz różnych częstościach. Gdy częstości obu drgań są zbliżone (np. $\omega_2 = 0,9\omega_1$, jak na rys. po lewej stronie), występują dudnienia. Gdy $\omega_2 = \frac{4}{3}\omega_1$ (ry. po prawej), dudnień nie obserwujemy. W obu przypadkach przyjęliśmy $\omega_1 = 1$ rad/s.

(3) Dwa drgania w kierunkach prostopadłych, o tych samych częstościach, ale różnych amplitudach, z przesunięciem fazowym $\Delta\varphi$. Tym razem mamy:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t) \\ y(t) &= B \sin(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2(\omega t) + \sin^2(\omega t + \Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi = 90^\circ : \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1 \quad (\text{elipsa}) \quad (6.13.)$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 90^\circ \\ A = B \end{cases} : \quad x^2 + y^2 = A^2 \quad (\text{okrąg})$$

W tym przypadku nie dostaliśmy równania oscylatora wypadkowego w postaci zależności od czasu. Superpozycja drgań jest opisana zależnością od czasu w postaci parametrycznej $\{x(t), y(t)\}$. Dostaliśmy za to równanie toru w postaci elipsy lub okręgu. Superpozycję dwóch drgań w kierunkach prostopadłych łatwo można zwizualizować na ekranie oscyloskopu (drgania sygnału elektrycznego) lub na ścianie, gdy nasze oscylatory tworzą drgające prostopadłe lusterka, na które świecimy laserem (być może Czytelnik widział podobne doświadczenie w ramach wykładu z fizyki, lub podczas pokazów popularyzatorskich).

(4) Dwa drgania w kierunkach prostopadłych, o tych samych amplitudach, z przesunięciem fazowym $\Delta\varphi$, ale różnych częstościach, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Drganie wypadkowe jest następujące:

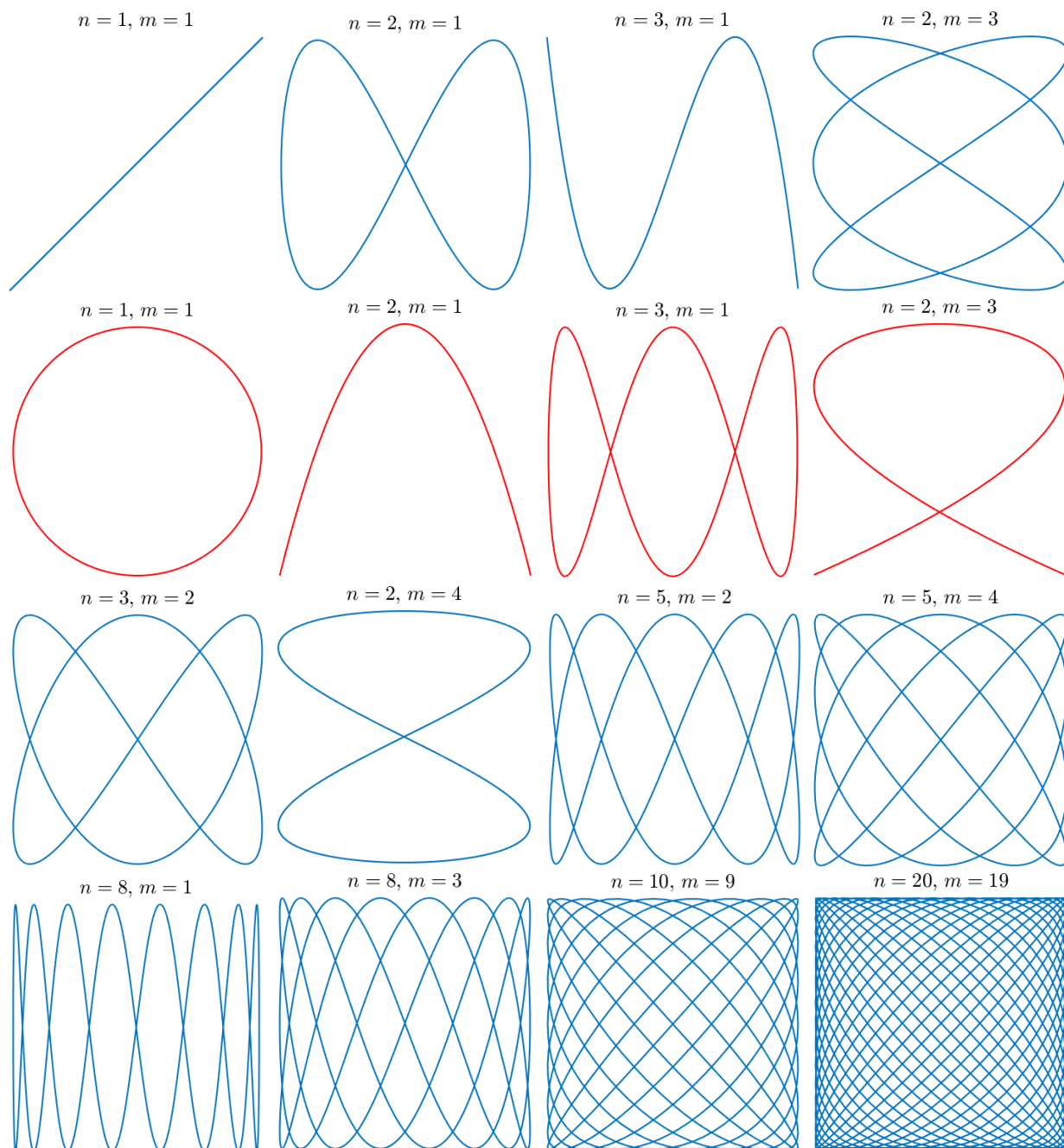
$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_1 t) \\ y(t) &= B \sin(\omega_2 t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\Delta\varphi=0^\circ} \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2(\omega_1 t) + \sin^2(\omega_2 t + \Delta\varphi) =$$

$$= (1 - \cos[(\omega_2 + \omega_1)t]) \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] = \quad (6.14.)$$

$$= \left(1 - \cos\left[\left(\frac{n}{m} + 1\right)\omega_1 t\right] \cos\left[\left(\frac{n}{m} - 1\right)\omega_1 t\right]\right)$$

Wynik jest może dość skomplikowany, ale okazuje się, że jeśli stosunek n/m jest dany prostym ułamkiem niewielkich liczb naturalnych (np. $1/2$, $3/2$, $5/3$, $1/8$ itp.), to krzywe opisane powyższym równaniem mają bardzo ciekawe kształty. Są to tzw. **krzywe Lissajous** i mają

postać ósemek i innych symetrycznych, zamkniętych łuków o wielu punktach przecięcia. Przykładowe krzywe pokazano na Rysunku 6.4..



Rysunek 6.4.: Krzywe Lissajous wygenerowane przy pomocy równania (6.14.) dla parametrów $A = B = 1$, $\omega_1 = 1$ (krzywe niebieskie: $\Delta\varphi = 0^\circ$, krzywe czerwone: $\Delta\varphi = 90^\circ$). Zwróćmy uwagę, że stosunek n/m możemy łatwo odczytać z wykresów jako stosunek maksymalnej liczby wzajemnych przecięć krzywych wzdłuż osi x i y .

6.2.3. Oscylator tłumiony

Oscylator, którego ruch do tej pory omawialiśmy, wykonuje tzw. **drżania swobodne**, bo zachodzą one tylko pod wpływem siły sprężystości (mówimy też czasem: drżania własne), a oscylator taki - swobodnym. Częstość zdefiniowaną wzorem (6.6.) nazywamy częstością drgań własnych (często oznaczamy ją przez ω_0). Pomijaliśmy wszelkie inne siły, np. siły oporu. Teraz jednak rozważymy ruch takiego oscylatora, który zachodzi pod wpływem także siły oporu - pochodzącej np. od powietrza lub cieczy (możemy zanurzyć masę i sprężynę przykładowo w wodzie). Taki układ nazywamy **oscylatorem tłumionym** i jak się spodziewamy, ruch takiego układu będzie zanikał w czasie (masa na sprężynie zanurzona w wodzie dość szybko się zatrzyma). O sile oporu (np. powietrza) zależnej od prędkości ciała dyskutowaliśmy w Rozdziale 3.4.3.. Możemy przyjąć, że na naszą masę, oprócz siły sprężystości, działa siła oporu o wektorze $\vec{F}_{op} = -b\vec{v}$, gdzie $\vec{v}$ jest wektorem prędkości (chwilowej) ciała, a b - stałym współczynnikiem oporu. Siła oporu jest przeciwnie skierowana do kierunku ruchu oscylatora. Napiszmy więc równanie dynamiki oscylatora tłumionego, podobne do (6.4.):

$$ma = -kx - bv \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} \quad (6.15.)$$

Rozwiązanie tego równania wymagałoby pewnych umiejętności z analizy matematycznej. Nie jest naszym celem nauka metod rozwiązywania równań różniczkowych, dlatego podamy od razu samo rozwiązanie. Zależność położenia od czasu dla oscylatora tłumionego jest następującą funkcją:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t) \quad (6.16.)$$

Przez A_0 oznaczyliśmy (stałą) amplitudę drgań nietłumionych (por. wzór (6.5.)), i tak jak w tamtym przypadku pominęliśmy fazę początkową ϕ . Czynniki β (o wymiarze 1/s) w powyższym wzorze to tzw. współczynnik tłumienia oscylatora i od niego zależy jak szybko amplituda drgań maleje w czasie. Cały czynnik $A_0 e^{-\beta t}$ jest zależną od czasu amplitudą drgań tłumionych. Współczynnik tłumienia jest związany z wielkościami m i b występującymi we wzorze (6.15.), natomiast ω oznacza tym razem częstość drgań tłumionych, która jest inna od częstości drgań własnych ω_0 . Podsumowując możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \text{Amplituda drgań tłumionych:} \quad & A(t) = A_0 e^{-\beta t} \\ \text{Częstość drgań tłumionych:} \quad & \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ \text{Współczynnik tłumienia:} \quad & \beta = \frac{b}{2m} \end{aligned} \quad (6.17.)$$

Zauważmy, że częstość drgań tłumionych jest zawsze mniejsza od częstości drgań własnych, a więc okres tych drgań będzie zawsze większy od okresu drgań własnych, przy tych samych masie oscylatora m i stałej siłowej k . Oscylator tłumiony jest więc jakby „wolniejszy”.

Ruch oscylatora tłumionego jest opisany funkcją sinusoidalną zależnościami od czasu (tak jak ruch oscylatora swobodnego), ale nie jest ruchem harmonicznym. Amplituda drgań maleje w czasie. Drżania gasną - tym szybciej, im większy jest współczynnik β . Rozwiązanie (6.16.) przedstawiono na Rysunku 6.5.a. Należy mocno podkreślić, że rozwiązaniem równania (6.15.) jest rzeczywiście funkcja (6.16.) tylko, jeśli $\omega_0 > \beta$, wtedy bowiem ω zdefiniowane wzorem (6.17.) istnieje. Mówimy, że ruch zachodzi ze **słabym tłumieniem**. Jeśli $\omega_0 = \beta$, to mamy do czynienia z tzw. **tłumieniem krytycznym** i oscylator w ogóle nie wykonuje drgań - mówimy, że wykonuje ruch aperiodyczny, albo że w sposób aperiodyczny powraca do położenia równowagi z maksymalnego wychylenia. Zauważmy, że gdy $\omega_0 = \beta$, to $\omega = 0$, a

więc okres drgań byłby nieskończony ($T = 2\pi/0 \rightarrow \infty$). Taki oscylator nieskończenie długo wraca do położenia $x = 0$ (spójrz na Rysunek 6.5.b). Zależność położenia od czasu jest dana funkcją: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}$. Wreszcie, jeśli tłumienie jest silne, czyli $\omega_0 < \beta$, nasz oscylator w bardzo dziwny sposób szybko wraca do położenia równowagi, wykonując tzw. **pełzanie**, które schematycznie naszkicowano na Rysunku 6.5.c. Położenie zmienia się w czasie jak:

$$x(t) = \frac{1}{2} A_0 \left[e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \right].$$

Zaciekawiony Czytelnik może sam sprawdzić, że funkcja (6.16.) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (6.15.), a także obliczyć zależność od czasu prędkości i przyspieszenia, podobnie jak robiliśmy to w Rozdziale 6.2.. Zwróćmy uwagę, że nie możemy w przypadku oscylatora tłumionego używać wzoru (6.3.) na energię potencjalną sprężystości, ani wzoru (6.10.) na energię całkowitą. Nasz układ jest tym razem niezachowawczy (występują z nim siły oporu, które nie są zachowawcze), a więc nie możemy zdefiniować energii potencjalnej, a całkowita energia nie jest zachowana. Układ traci energię - dlatego też ruch oscylatora ustaje po pewnym czasie.

6.2.4. Oscylator wymuszony. Rezonans mechaniczny

Jeślibyśmy chcieli podtrzymać ruch oscylatora w obecności siły oporu, musielibyśmy zapewne „wymusić” jakiś jego ruch - np. przykładając zewnętrzną siłę F . Przykładowo: masę zanurzoną w wodzie musielibyśmy co jakiś czas pobudzać do drgań, albo dziecko bawiące się na huśtawce (taki ruch, traktowany jak ruch wahadła, też może być uznany za harmoniczny) musielibyśmy co chwilę dodatkowo popychać. Aby podtrzymać ruch ściśle harmoniczny (czyli nadal opisany funkcją sinus zależności położenia od czasu) nasza siła zewnętrzna też powinna być sinusoidalnie zależna od czasu. To jest najciekawszy z punktu widzenia fizyki przypadek. Załóżmy więc: $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$, gdzie F_0 jest amplitudą siły (największą wartością), a Ω - częstością siły wymuszającej (mówimy też: częstością wymuszeń). Równanie dynamiki oscylatora poddanego działaniu siły wymuszającej przy jednoczesnej obecności siły oporu w ośrodku wygląda następująco:

$$ma = -kx - bv + F_0 \sin(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad (6.18.)$$

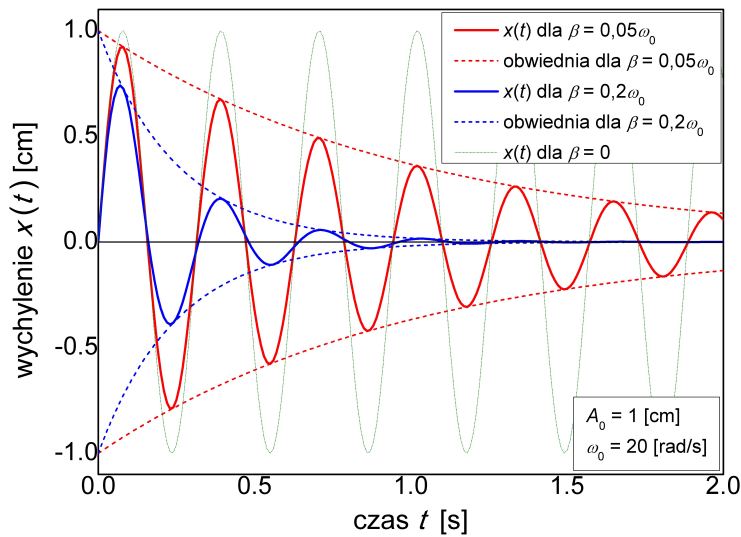
Rozwiązanie tego równania jest (na pozór) bardzo proste (podajemy zależność od czasu położenia oscylatora wymuszonego):

$$x(t) = A_w \sin(\Omega t + \phi) \quad (6.19.)$$

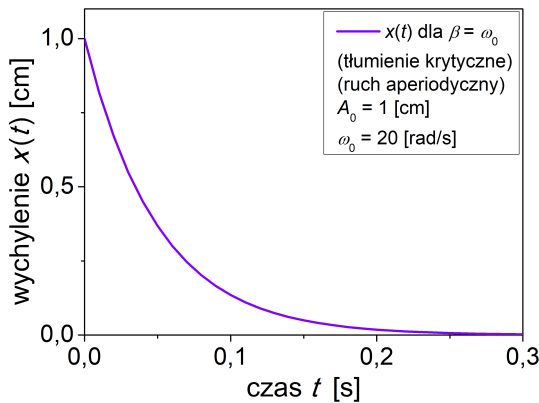
Okazuje się, że drgania oscylatora harmonicznego są nadal sinusoidalne, co więcej z częstością drgań taką, jaka jest częstość wymuszeń Ω . To nie powinno być zadziwiające - przecież huśtane przez nas na huśtawce dziecko porusza się dokładnie tak, jak my chcemy; częstość jego drgań jest zgodna z częstością naszych popchnięć w krzeselko. We wzorze (6.19.) pojawiły się natomiast dwa oznaczenia: A_w - amplituda drgań oraz ϕ - faza początkowa drgań, które zależą od częstości wymuszeń, częstości drgań własnych i współczynnika tłumienia jak:

$$A_w = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (6.20.)$$

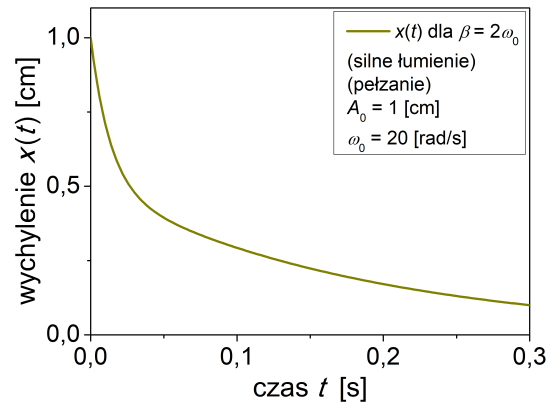
$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (6.21.)$$



(a) Tłumienie słabe: $\beta < \omega_0$; oscylator wykonuje drgania o malejącej w czasie amplitudzie; założono położenie początkowe $x(0) = 0$. Przerywaną linią zaznaczono obwiednie amplitudy (dane zależnością eksponencjalną (6.17.)). Dla porównania zaznaczono też przypadek dla oscylatora nietłumionego ($\beta = 0$).



(b) Tłumienie krytyczne: $\beta = \omega_0$; nie ma drgań - oscylator wykonuje aperiodyczny powrót do położenia równowagi; założono położenie początkowe $x(0) = A_0$.



(c) Tłumienie silne: $\beta > \omega_0$; nie ma drgań - oscylator wykonuje ruch pełzający (jest „przetłumiony”); założono położenie początkowe $x(0) = A_0$.

Rysunek 6.5.: Zależność położenia od czasu $x(t)$ dla oscylatora tłumionego w trzech przypadkach tłumienia: (a) $\beta < \omega_0$ (słabe tłumienie), (b) $\beta = \omega_0$ (tłumienie krytyczne), (c) $\beta > \omega_0$ (tłumienie silne).

Powyższe wzory wyglądają dość „strasznie”. Zagadnieniem fazy początkowej się nie będziemy zajmować, ale przyjrzymy się amplitudzie. Zauważmy, że zależy ona nie tylko od amplitudy siły zewnętrznej (to nie jest zaskakujące), ale także jej częstości oraz częstości własnej i tłumienia, a więc „sposobu” przyłożenia siły i parametrów samego układu drgającego (drgań własnych i tłumienia ośrodka). Zależność $A_w(\Omega)$ pokazuje wykres na Rysunku 6.6.. Mamy do czynienia z krzywą dzwonową, która ma wyraźne maksimum przy pewnej częstości wy-

muszeń. Tę częstość nazywamy **częstością rezonansową** i definiujemy wzorem (można go łatwo znaleźć żądając, aby dla tego argumentu funkcja miała maksimum lokalne):

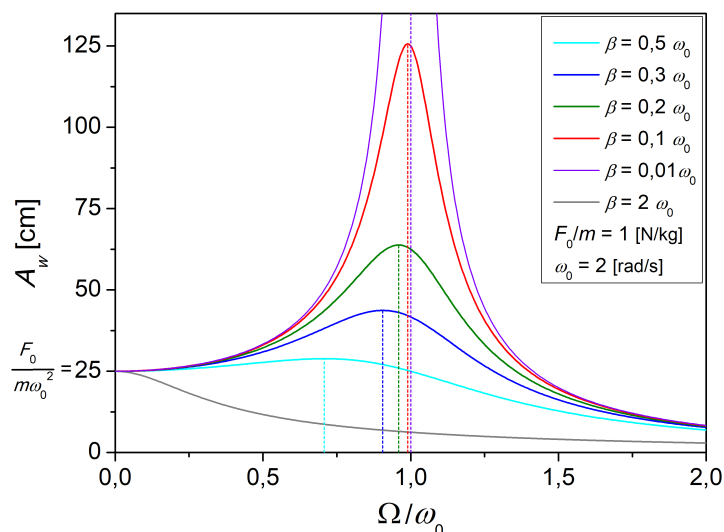
$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6.22.)$$

Sytuację, gdy amplituda drgań oscylatora wymuszonego osiąga wartość maksymalną, nazywamy **rezonansem mechanicznym**. Jest to bardzo ważne zjawisko fizyczne, które ma istotne znaczenie także w innych dziedzinach współczesnej nauki i techniki, a także życia codziennego. Z rezonansem mechanicznym mają lub mogą mieć związek takie zjawiska, jak wzmocnienie dźwięku w instrumentach dzięki zastosowaniu pudła rezonansowego, zawalenie się mostu rozhuśtanego miarowym rytmem np. maszerującej kolumny wojska lub uderzeń podmuchów wiatru, czy możliwość wytoczenia ciężkiego samochodu pod niewielką górkę (rozhuśtanie samochodu pozwala łatwiej pokonać górkę, czy niewielką przeszkodę). Z rezonansem (choć nie mechanicznym, a raczej elektromagnetycznym) mamy do czynienia we wszelkiego rodzaju urządzeniach typu antena-odbiornik, np. do emisji i odbioru sygnałów telewizyjnych w naszych domach. Przytoczmy jeszcze raz definicję rezonansu mechanicznego:

Zjawisko rezonansu mechanicznego polega na osiągnięciu maksymalnej amplitudy drgań przy dopasowaniu częstości wymuszeń do częstości rezonansowej

Osiągnięcie maksymalnej amplitudy drgań jest równoznaczne osiągnięciu maksymalnej mocy. Mówimy, że w rezonansie przekaz mocy jest największy.

Zwróćmy uwagę, że kształt krzywej rezonansowej (położenie i wartość maksimum) zależy od wielkości tłumienia ośrodka. W szczególności, gdy $\beta \rightarrow 0$, to $\Omega_{rez} \rightarrow \omega_0$, a maksimum amplitudy: $A_w(\Omega = \omega_0) \rightarrow \infty$ (patrz: Rysunek 6.6.).



Rysunek 6.6.: Zależność amplitudy drgań oscylatora wymuszonego od częstości wymuszeń dla różnych współczynników tłumienia. Pionowe przerywane linie pokazują częstość rezonansową oraz maksimum krzywych rezonansowych. Już przy $\beta = 1\% \omega_0$: $\Omega_{rez} \approx \omega_0$ oraz $A_w \approx \text{duża}$.

Przykłady

- Po jakim czasie amplituda drgań oscylatora tłumionego spadnie do 10% wartości początkowej, jeśli współczynnik oporu ośrodka wynosi 0,5 kg/s, a masa oscylatora to 1 kg?

Skorzystamy ze wzoru na zależność amplitudy od czasu (6.17.). Potrzebujemy do tego znać współczynnik tłumienia, który też mamy tam zdefiniowany ($m = 1$ kg, $b = 0,5$ kg/s). Żądamy przy tym, aby po czasie t_x amplituda osiągnęła wartość $A(t_x) = 0,1A_0$. Liczmy:

$$\begin{cases} A(t_x) = 0,1A_0 \\ A(t_x) = A_0 e^{-\beta t_x} \\ \beta = \frac{b}{2m} \end{cases} \Rightarrow 0,1A_0 = A_0 e^{-\beta t_x} \Rightarrow 0,1 = e^{-\beta t_x} \Rightarrow$$

$$t_x = -\frac{1}{\beta} \ln(0,1) = \frac{\ln(10)}{\beta} = 2 \ln(10) \frac{m}{b} = 9,21 \text{ s}$$

- Porównaj okresy drgań oscylatora swobodnego i tłumionego. Jaki musi współczynnik tłumienia w stosunku do częstości drgań własnych, aby okres drgań oscylatora tłumionego był 2 razy większy niż nietłumionego?

Skorzystamy ze wzoru na częstość drgań tłumionych (6.17.). Stąd wyprowadzimy wzór na okres i znajdziemy poszukiwany stosunek okresów. Zależność tę odwrócimy, by wyliczyć β/ω_0 .

$$\begin{cases} T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\beta = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2} = \left| \frac{T_0}{T} = \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 \approx 0,87 \omega_0$$

Aby okres oscylatora tłumionego był 2 razy większy niż nietłumionego, współczynnik tłumienia musi wynosić ok. $0,87 \omega_0$. Jest to przypadek słabego tłumienia ($\beta < \omega_0$), a więc układ rzeczywiście wykonuje oscylacje i wzory (6.17.) mogą być stosowane.

- Jakim tempem (ile kroków na minutę) musi przechodzić kładką wiszącą kolumna harcerzy, aby kładka o częstości drgań własnych 5 Hz wpadła w rezonans, przy bardzo małym tłumieniu ośrodka?

Przypomnijmy sobie wzór na częstość rezonansową (6.22.). Przy pomijalnym tłumieniu znika wyraz $\beta \approx 0$. Zatem: $\Omega_{rez} = \omega_0 = 2\pi f_0$. Stąd częstość kroków maszerującej grupy harcerzy powinna być $f = \frac{\Omega_{rez}}{2\pi} = f_0 = 5$ Hz. Na jeden cykl (jedno pełne „drganie”) przypadają dwa kroki, a więc harcerze powinni maszerować w tempie 2,5 kroków na sekundę, czyli 150 kroków na minutę.

Zadania

- Do jakiego ułamka wartości początkowej spadnie amplituda drgań oscylatora tłumionego po czasie równym $1/\beta$?

2. Oscylator o masie 2 kg i stałej siłowej 10 N/m wykonuje w ośrodku z oporem. Zauważono, że po czasie 12 sekund amplituda drgań spada do połowy wartości początkowej. Ten sam oscylator wymuszamy teraz siłą o stałej częstotliwości. Jaka jest częstotliwość rezonansowa układu?
3. Wyprowadź wzór (6.22.) na częstotliwość rezonansową oraz wartość amplitudy w rezonansie (tzn. przy $\Omega = \Omega_{rez}$). Pokaż, że przy $\beta \rightarrow 0$: $A_w \rightarrow \infty$.

6.3. Wahadło matematyczne

Jest to bardzo prosty model teoretyczny składający się z masy punktowej zawieszonej w polu siły ciężkości na cienkiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici („kulka na nitce”, Rysunek 6.7.a). Jediną siłą zewnętrzną działającą na masę m jest jej ciężar. Ale tylko składowa ciężaru Q_1 jest niezerównoważona - składową Q_2 równoważy siła napięcia nici N , która z kolei jest równoważona przez reakcję ze strony punktu zawieszenia wahadła (np. sufitu). Możemy więc zapisać:

$$F_w = Q_1 \quad \Rightarrow \quad ma = mg \sin \alpha \quad (6.23.)$$

Chcemy pokazać, że ruch wahadła jest ruchem harmonicznym. Musimy więc wykazać, że siła, pod wpływem której zachodzi ruch wahadła (czyli siła wypadkowa) ma cechy siły harmonicznej. Zauważmy, że wektor $\vec{Q}_1$ jest przeciwnie skierowany do wychylenia, mierzonego kątem skierowanym α . Musimy jeszcze stwierdzić, że jest do niego proporcjonalna. Ale wzór (6.23.) sugeruje, że $F_w \sim \sin \alpha$. Dokonujemy więc przybliżenia: $\sin \alpha \approx \alpha$, które jest prawdziwe dla małych kątów (mierzonych w radianach). Jest to tzw. przybliżenie małych drgań. Oczywiście z definicji miary łukowej kąta: $\alpha = x/l$. Podsumujmy zatem:

$$a = -g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \alpha \approx \alpha \\ \alpha = \frac{x}{l} \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \quad (6.24.)$$

„Voilà!” dostaliśmy równanie typu oscylatora, którego rozwiązania już znamy. Zależność wychylenia wahadła z położenia równowagi w funkcji czasu jest następująca: $x(t) = A \sin(\omega t)$ albo $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t)$, gdzie oczywiście $\alpha_0 = A/l$ jest amplitudą (kątową) wychylenia liczoną w radianach (A jest amplitudą wychylenia liczoną w metrach). Możemy też natychmiast „odgadnąć” wzór na okres drgań wahadła matematycznego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.25.)$$

bowiem $\omega^2 = \frac{g}{l}$ (pamiętamy wzór (6.7.) na okres oscylatora). Należy powiedzieć, że rozwiązanie i okres podane powyżej obowiązują jedynie, gdy mamy do czynienia z małymi drganiami, gdy spełnione z dobrą dokładnością jest przybliżenie $\sin \alpha \approx \alpha$. Zakłada się, że dobrym przybliżeniem jest, gdy wahadło wykonuje drgania nie większe niż o kilka stopni (rzędu 5-7°). Zauważmy też, że okres wahadła nie zależy od amplitudy (α_0 , A). Tę cechę wahadła nazywa się izochronizmem wahadła i także ona nie występuje, gdy drgania nie są małe. Dla dużych drgań okres zaczyna zależeć od amplitudy.

Przykłady

1. Jaki jest stosunek okresów drgań tego samego wahadła matematycznego na Ziemi i Księżycu?

Zapiszmy definicje okresów na obu ciałach niebieskich:

$$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_Z}} \quad T_K = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_K}}$$

Zatem stosunek:

$$\frac{T_Z}{T_K} = \sqrt{\frac{g_K}{g_Z}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,4$$

Stosunek okresów dany jest pierwiastkiem odwrotnego stosunku przyspieszeń. To, że na Księżycu przyspieszenie jest 6-razy mniejsze niż na Ziemi, łatwo obliczymy znając masę i promień Księżyca oraz wykorzystując wzór (5.2.).

2. Wahadło matematyczne o długości l umieszczamy w windzie, która rusza w górę z przyspieszeniem a_0 . Jaki jest wzór na okres drgań tego wahadła?

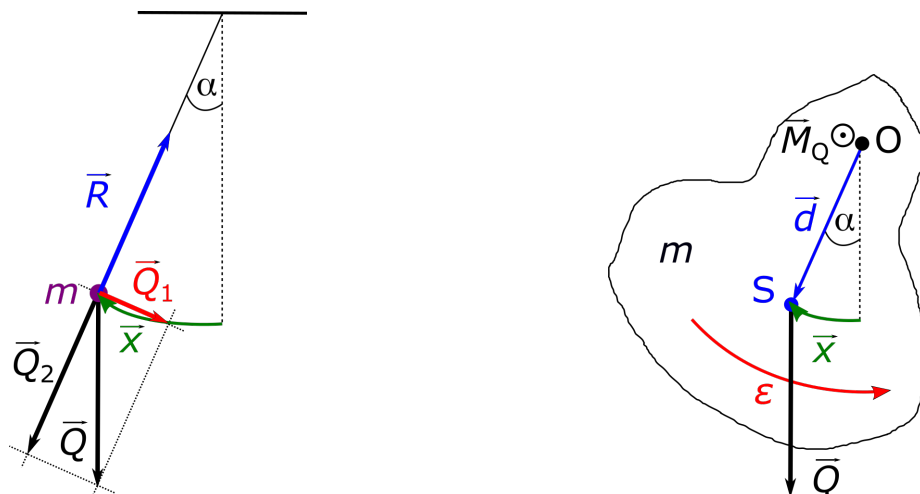
Wiemy już z Rozdziału 3.5., że w układzie poruszającym się na ciało działa dodatkowa siła (siła bezwładności), która jest zwrócona przeciwnie do przyspieszenia. W naszym przypadku a_0 jest do góry (winda rusza w górę), więc siła bezwładności $F_b = ma_0$ jest skierowana w dół - tak jak ciężar. Dodaje się więc do ciężaru. Wypadkowo mamy więc zewnętrzną siłę działającą na wahadło o wartości $m(g + a_0)$. Jej składowa prostopadła do nici powoduje ruch harmoniczny. Powtarzając etapy wyprowadzania wzoru na okres drgań wahadła, dochodzimy do wniosku, że:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a_0}}$$

6.4. Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna zaczepiona w pewnym punkcie, która może względem tego punktu wykonywać drgania. Ruch wahadła zachodzi pod wpływem siły grawitacji, podobnie jak w przypadku wahadła matematycznego. Dokładniej chodzi tutaj o to, że siła grawitacji daje moment siły względem punktu zawieszenia (punktu obrotu), dzięki czemu bryła ma przyspieszenie kątowe i się obraca. W odróżnieniu od przypadku wahadła matematycznego, gdzie ruch kulki odchylonej od pionu traktowaliśmy jako ruch postępowy, w przypadku wahadła fizycznego przyjmujemy, że bryła sztywna wykonuje ruch obrotowy względem punktu zawieszenia. W tym miejscu natychmiast możemy wnioskować, że punkt zawieszenia wahadła nie może być w środku masy. Siłę ciężkości przykładamy w środku masy, zatem jej moment względem środka masy byłby zerowy - bryła nie obracałaby się. Zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 6.7.b moment siły grawitacji wynosi:

$$\vec{M}_Q = \vec{d} \times \vec{Q} \quad \Rightarrow \quad M_Q = mgd \sin \alpha \quad (6.26.)$$



(a) Wahadło matematyczne z zaznaczonymi siłami. Składowa $\vec{Q}_1$ pełni rolę siły harmoniczej.

(b) Wahadło fizyczne. Siła grawitacji daje niezerowy moment siły $\vec{M}_Q$ powodujący obrót bryły przeciwnie do wychylenia.

Rysunek 6.7.: Schematy wahadeł.

gdzie d jest tutaj ramieniem siły Q , czyli odległością od osi obrotu (punktu zawieszenia) do środka masy. Moment siły grawitacji jest momentem wypadkowym - żadna inna siła nie daje względem punktu O momentu siły. Wykorzystamy II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej (wzór (3.18.)) i wyprowadzimy równanie ruchu wahadła fizycznego:

$$I_O \vec{\varepsilon} = \vec{M}_Q \quad \Rightarrow \quad I_O \varepsilon = mgd \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \sin \alpha \approx \alpha \\ \varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \\ \vec{M}_Q \sim -\alpha \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I_O} \alpha \quad (6.27.)$$

Założyliśmy tutaj znowu przypadek małych drgań ($\sin \alpha \approx \alpha$), wówczas mamy proporcjonalność do wychylenia mierzonego kątem α . Znak minus wynika stąd, że wypadkowy moment siły (moment siły grawitacji) jest skierowany przeciwnie do kierunku obrotu (wychylenia).

Równanie (6.27.) jest równaniem typu oscylatora, zatem wnioskujemy, że bryła sztywna zaczepiona w punkcie odległym o d od środka masy i odchylona od pionu (który jest położeniem równowagi) o mały kąt wykonuje ruch harmoniczny. Rozwiązanie równania (6.27.) jest już dla nas łatwizną: $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t)$, gdzie α_0 jest amplitudą wychylenia (maksymalnym kątem - pamiętamy, że musi być „mały”), a $\omega = \frac{mgd}{I_O}$ jest częstością drgań. Ważne! Moment bezwładności I_O jest liczony względem osi obrotu O . Zazwyczaj dla prostych brył znamy momenty bezwładności względem ich środków masy I_S (np. dla walca/kraźka $I_S = \frac{1}{2}mR^2$). Aby otrzymać I_O musimy skorzystać z tw. Steinera (3.16.).

Znając częstość, bardzo łatwo dostaniemy teraz wzór na okres drgań wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}} \quad (6.28.)$$

Przykłady

1. Pokaż, że wzór na okres wahadła fizycznego upraszcza się do wzoru na okres wahadła matematycznego, jeśli ruch kulki potraktujemy jak ruch obrotowy punktu materialnego po okręgu.

Zakładamy tutaj, że kulka (masa m z modelu wahadła matematycznego) wykonuje ruch obrotowy wokół osi zawieszenia wahadła, tak jak wahadło fizyczne. Dla punktu materialnego moment bezwładności: $I_O = ml^2$, gdzie l jest odległością kulki od osi obrotu (jest to równocześnie długość wahadła matematycznego). Korzystając ze wzoru (6.28.) otrzymujemy:

$$T_{fiz} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T_{mat}$$

co jest zgodne ze wzorem (6.25.) dla wahadła matematycznego.

2. Oblicz okres drgań krążka o promieniu 20 cm, który zawieszono w punkcie odległym o $\frac{1}{4}$ promienia od krawędzi.

Zanim wstawimy dane do wzoru, musimy policzyć moment bezwładności I_O względem osi obrotu. Skorzystamy z tw. Steinera:

$$I_O = I_S + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m \cdot \left(R - \frac{1}{4}R\right)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m \cdot \left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \frac{17}{16}mR^2$$

Nie przejmujemy się, że nie znamy masy m krążka - uprości się. Podobnie, nie znaleźliśmy d , ale wiedzieliśmy, że jest ono ułamkiem promienia, który znamy.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{17}{16}mR^2}{mg \cdot \frac{3}{4}R}} = 2\pi \sqrt{\frac{17}{12} \frac{R}{g}} \approx 1,06 \text{ s}$$

Zadania

1. Ciało o masie 5 g wykonuje drgania, które w układzie SI można opisać równaniem: $x(t) = 0,1 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$. Znaleźć amplitudę prędkości i przyspieszenia oraz liczbowe wartości energii kinetycznej i potencjalnej po upływie 20 s od chwili początkowej $t_0 = 0$. Jaka jest całkowita energia tego oscylatora?
2. Masa zamocowana na sprężynie drga z amplitudą 10 cm. Całkowita energia sprężyny wynosi 1 J. Jaka jest wartość siły sprężystości działającej na masę, gdy sprężyna jest ściśnięta o 5 cm?
3. Zakładając, że ruch tłoka w cylindrze silnika samochodowego jest ruchem harmonicznym, znaleźć maksymalne wartości szybkości i przyspieszenia tłoka, jeżeli samochód porusza się z prędkością $v = 72 \text{ km/h}$ na włączonym biegu, średnica kół $d = 16''$, a odległość między skrajnymi położeniami tłoka wynosi 95,5 mm.
4. Gawel postanowił zrobić kolejnego psikusa Pawłowi, który mieszka piętro nad nim. Chce wrzucić do mieszkania Pawła przez okno żabę. Żeby było sprytniej postanowił użyć w tym celu katapulty w postaci sprężyny o stałej siłowej 100 N/m i długości

swobodnej 20 cm. O ile Gawł musi ścisnąć sprężynę, aby żabę o masie 30 g „dostarczyć” na parapet Pawła, który znajduje się 3 m powyżej okna Gawła? *Uwaga. Zadanie łatwo jest rozwiązać korzystając z zasady zachowania energii. Trzeba pamiętać, żeby uwzględnić ściśnięcie sprężyny podczas definiowania poziomu zerowej energii potencjalnej grawitacji.*

5. Jakim wzorem wyrazić okres drgań wahadła matematycznego o długości l , które zawieszono w windzie przyspieszającej w dół z przyspieszeniem a_0 ? Ile wynosi okres, jeśli $a_0 = 0,5g$ oraz $l = 20$ cm?
6. Jaki musi być współczynnik tłumienia β wahadła matematycznego o długości l umieszczonego w windzie poruszającej się z przyspieszeniem a_0 w górę, jeżeli okres drgań wahadła tłumionego jest 2 razy większy niż swobodnego?
7. Wyprowadź wzór na okres drgań wahadła matematycznego w wagonie przyspieszającym w poziomie z przyspieszeniem a_0 . *Uwaga. Idea jest taka sama, jak w zadaniu z windą. Trzeba znaleźć siłę wypadkową działającą na wahadło.*
8. Zegar ścienny, mający kształt krążka o średnicy 35 cm, zawieszamy na gwoździu wbitym w ścianę i uprawiamy w drgania. Zakładając, że środek masy zegara jest w jego środku geometrycznym, oblicz odległość d punktu zawieszenia zegara od środka masy, jeśli okres drgań zegara wynosi 1 s? *Uwaga. Trzeba rozwiązać r. kwadratowe, a jedno z rozwiązań odrzucić (wyjdzie $d > R$).*
9. Cienki pręt metalowy, o masie $M = 0,5$ kg i długości $L = 40$ cm, użyty jest jako wahadło fizyczne. W odległości x od środka pręta wywiercony jest niewielki otwór, przez który przechodzi oś, na której zawieszamy pręt. Oblicz okres małych wahań tak zbudowanego wahadła fizycznego jako funkcję odległości x . Oblicz odległość x_1 , dla której okres wahadła przyjmuje minimalną wartość.

Rozdział 7.

Fale mechaniczne

7.1. Podstawowe pojęcia

Falą nazywamy zaburzenie ośrodka rozchodzące się w przestrzeni. W przypadku **fali mechanicznej** ośrodek musi ośrodkiem mechanicznym, mówimy: sprężystym. Fala mechaniczna do rozchodzenia się wymaga ośrodka, którego cząsteczki są pobudzane do drgań, a drgania te są przekazywane sąsiadom. Tak w uproszeniu wygląda mechanizm propagacji (rozchodzenia się) fali mechanicznej. Bez ośrodka nie ma fali mechanicznej. To jest oczywiste stwierdzenie: np. fala dźwiękowa nie rozchodzi się w próżni („w kosmosie nic nie słuchać”). Schematycznie możemy propagację fali ująć tak: jest to drganie (cząstki ośrodka w czasie), które dodatkowo przemieszcza się w przestrzeni (tak jakby oscylator harmoniczny dodatkowo się poruszał ruchem postępowym). Ośrodek sprężysty to taki, dla którego spełnione jest prawo Hooke’a (wzór (6.2.)). Przykładowe fale mechaniczne to: fala dźwiękowa (w powietrzu, cieczach lub ciałach stałych), fala w napiętej strunie, fale na wodzie, fale sejsmiczne itd.

Rodzaje fal mechanicznych. Możemy sklasyfikować fale mechaniczne na różne sposoby. **Fale podłużne** propagują się w tym samym kierunku, w którym drgają cząsteczki ośrodka. Fala dźwiękowa jest podłużna. Jej propagowanie polega na występowaniu systematycznych zagęszczeń i rozrzedzeń cząsteczek powietrza, które się przesuwały w przestrzeni. **Fale poprzeczne** propagują się w kierunku prostopadłym do kierunku drgań ośrodka. Taką falą jest np. fala w napiętej strunie (grając na gitarze, szarpiemy strunę w górę lub w dół, a fala w strunie propaguje się w stronę gryfu lub pudła). Ze względu na powtarzalność w czasie fale dzielimy na **okresowe** i **nieokresowe**, a ze względu na powtarzalność w przestrzeni mówimy o falach **o stałym kształcie** (kształt fali nie zmienia się w czasie w trakcie propagacji, stąd wniosek, że takie fale muszą propagować się ze stałą prędkością). Mówiąc o falach mechanicznych najczęściej mamy na myśli **fale harmoniczne (sinusoidalne)**, czyli takie, których równanie jest funkcją harmoniczną (patrz niżej).

Długość fali jest odległością między kolejnymi minimami lub maksimami fali (lub dowolnymi innymi punktami o stałej fazie - czyli w tym samym miejscu „na fali”). Punkty o stałej fazie tworzą **powierzchnię falową**, nazywaną też **czołem fali**. Czoło fal płaskich tworzą linie proste, fal kolistych - okręgi, fal kulistych - sfery itp. Z długością fali związana jest **liczba falowa**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7.1.)$$

(w przypadku fali 3D liczba falowa staje się wektorem falowym $\vec{k}$). Wektor falowy określa kierunek propagacji fali. Jeśli ma on tylko składową np. k_x , to fala rozchodzi się w kierunku osi x . Częstota ω , częstotliwość f (będziemy ją też często oznaczać przez ν) i okres T drgań znamy już z rozdziału o drganiach harmonicznym.

Prędkość fali zdefiniowana jest jako:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} \quad (7.2.)$$

Nazywamy tę wielkość **prędkością fazową**, bo określa ona prędkość poruszania się dowolnego „punktu fali” o danej fazie ($v = v_f$). Definiujemy też **prędkość grupową** fali, która jest szybkością propagacji „grupy” fal (pakietu falowego), składającej się z kilku fal (pakiet falowy powstaje np. w wyniku nakładania się fal). Cała grupa może poruszać się z inną prędkością niż poszczególne fale składowe. Prędkość grupowa:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = v_f + k \frac{dv_f}{dk} \quad (7.3.)$$

Prędkość grupowa może być większa lub mniejsza od prędkości fazowej. Czynnikiem $\frac{dv_f}{dk}$ nazywamy **relacją dyspersji**. Są takie ośrodki, w których prędkość (fazowa) fali zależy od długości wektora falowego (czyli także od długości lub częstotliwości fali), wtedy powyższa pochodna jest różna od zera. Ośrodki takie nazywamy dyspersyjnymi. Zjawisko dyspersji, czyli zależność prędkości fali od długości lub częstotliwości fali, ma szczególne znaczenie w optyce (którą się teraz nie zajmujemy, bo dotyczy fal świetlnych, a więc elektromagnetycznych, czyli niemechanicznych), bowiem prowadzi do takich efektów jak rozszczepienie światła (np. w pryzmacie lub spektroskopach).

Równanie fali harmonicznego jest następujące:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ y(x,t) &= A \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ y(x,t) &= A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\ \psi(\vec{r},t) &= A \exp(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (7.4.)$$

gdzie A nazywamy **amplitudą fali** (maksymalnym wychyleniem drgającej cząstki ośrodka z położenia równowagi), cały argument sinusa ($kx - \omega t$) lub ($kx - \omega t + \varphi$) nazywamy **fazą fali**, a φ jest **fazą początkową** (przesunięciem fazowym). Ostatni przykład to równanie fali 3D. Fala harmoniczna może być zdefiniowana poprzez funkcję sinus, kosinus lub ich kombinację liniową, podobnie jak w przypadku drgań harmonicznym. Fala o równaniach ze wzoru (trzy pierwsze równania) odpowiada propagacji w prawo (dodatnią stronę osi x), bo składnik kx jest dodatni, oraz drganiom zaczynającym się w dół osi y („-sinus”), bo występuje wyrażenie $-\omega t$. Możemy zapisać też równanie fali biegnącej w lewo opisanej „+sinusem”: $y(x,t) = A \sin(-kx + \omega t)$ i biegnącej jeszcze inaczej z dowolną inną kombinacją znaków w fazie. Różnicę położenia danego punktu fali w różnych chwilach czasowych, $s = \Delta x = x_k - x_p$ nazywamy **drogą falową**.

Równanie falowe (nazywane równaniem d'Alemberta) jest matematycznym równaniem jakie musi spełniać każda fala. Jest to trudne równanie różniczkowe (o pochodnych cząstkowych - dla funkcji wielu zmiennych). Jego postać w 1D to:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \left(\text{bardziej poprawnie: } \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \right) \quad (7.5.)$$

Rozwiązaniem równania jest funkcja $\psi(x,t)$ w przypadku 1D i $\Psi(\vec{r},t)$ w przypadku 3D. Można pokazać, że funkcja falowa $y(x,t)$ zdefiniowana w (7.4.) spełnia powyższe równanie (zrobimy to w Przykładach).

Przykłady

1. Równanie fali ma w jednostkach układu SI postać $y(x,t) = 0,15 \sin(3x - 0,5\pi t + 0,1\pi)$. Określ: amplitudę, fazę początkową, długość, częstotliwość, okres, prędkość fali. Z jaką maksymalną prędkością osiąga drgająca (poprzecznie) cząsteczka ośrodka pobudzana przez propagującą falę?

Przez porównanie równania naszej fali z równaniem ogólnym (7.4.) natychmiast otrzymujemy: $A = 15 \text{ cm}$, $k = 3 \text{ 1/m}$, $\omega = 0,5\pi \text{ 1/s}$, $\varphi = 0,1\pi \text{ rad}$. Zatem: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2,09 \text{ m}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,25 \text{ Hz}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s}$, $v = \frac{\omega}{k} = 0,52 \text{ m/s}$. Maksymalną prędkość w kierunku poprzecznym obliczymy tak jak prędkość w ruchu drgającym (cząsteczka ośrodka drga w kierunku osi y z amplitudą A i częstością ω). Pamiętajmy, że $v_{\max} = A\omega = 0,24 \text{ m/s}$ (na podstawie (6.8.)).

2. Pokaż, że równanie $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ spełnia równanie falowe d'Alemberta. Co możesz powiedzieć o fali o takim równaniu?

Zacznijmy od drugiego pytania. Zgadujemy, że fala biegnie w lewą stronę osi x (bo $k < 0$ i jest „+kosinusoidą”. Ponadto względem ogólnego równania danego sinusem mamy przesunięcie fazowe równe $\pi/2$ („żeby z sinusa zrobić kosinus, trzeba go przesunąć o 90° w lewo”). Sprawdźmy teraz, że równanie spełnia równanie falowe. Najpierw policzmy odpowiednie drugie pochodne:

$$\frac{d}{dt}y(x,t) = \frac{d}{dt}(A \cos(\omega t - kx)) = -A\omega \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(x,t) = \frac{d}{dt}(-A\omega \sin(\omega t - kx)) = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{d}{dx}y(x,t) = \frac{d}{dx}(A \cos(\omega t - kx)) = -Ak \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,t) = \frac{d}{dx}(-Ak \sin(\omega t - kx)) = -Ak^2 \cos(\omega t - kx)$$

Jeśli teraz wstawimy pochodne do równania (7.5.):

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - kx) = v^2 \cdot (-Ak^2 \cos(\omega t - kx)) \Rightarrow \omega^2 = v^2 \cdot k^2 \Rightarrow v = \frac{\omega}{k},$$

co jest prawdą na podstawie definicji (7.2.).

7.2. Fala w napiętej strunie

Wyobraźmy sobie, że napinamy sznur zaczepiony drugim końcem do ściany (równie dobrze może to być stalowa lina lub nylonowa struna). W pewnym momencie wzbudzamy falę w takim sznurze, lekko wychylając nasz koniec w górę i w dół. Z jaką prędkością będzie propagować się fala biegnąca w takim sznurze? Na logikę możemy powiedzieć, że prędkość ta powinna zależeć od masy (grubości, gęstości) sznura i siły, z jaką napinamy sznur. Oba te strzały są słuszne. Rzeczywiście prędkość fali w napiętym sznurze lub strunie zależy od siły naciągu F i gęstości masy μ sznura/struny. Ponieważ sznur jest w dobrym przybliżeniu obiektem jednowymiarowym (wymiary poprzeczne są pomijalne wobec dużej długości), to mamy tu na myśli gęstość liniową masy (masę liczoną na jednostkę długości). Wzór jest

następujący:

$$\text{prędkość fali w strunie: } v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (7.6.)$$

Instrumentaliści tacy jak gitarzyści, skrzypkowie itd. dobrze wiedzą, że aby wyższe dźwięki w muzyce generują struny cieńsze lub mocniej napięte. W obu tych przypadkach wartość prędkości fali w strunie zwiększa się, zgodnie ze wzorem. Przy danej długości fali (struna ma określoną długość, generujemy fale o konkretnych długościach fali) większej prędkości odpowiada większa częstotliwość dźwięku, od której bezpośrednio zależy wysokość dźwięku. O cechach i parametrach dźwięku powiemy w Podrozdziale 7.3..

7.3. Fala dźwiękowa, prędkość dźwięku

Dźwięk jest falą mechaniczną rozchodząca się w powietrzu. Schematycznie zobrazowaliśmy już mechanizm powstawania fali dźwiękowej w powietrzu (jako propagujące się zagęszczenie i rozrzedzenie cząsteczek powietrza). Podobny mechanizm można zaobserwować w cieczach i ciałach stałych. Jeśli wzbudzamy falę w metalowym pręcie, uderzając w jego koniec młotkiem, to wprowadzone w drgania atomy tworzące metal przekazują sobie nawzajem drgania i propaguje się fala. przy tej okazji powiedzmy o dwóch podstawowych rodzajach fal w pręcie. Możemy przecież uderzyć młotkiem w koniec pręta w kierunku wzdłuż pręta, lub prostopadłe do pręta. W ten sposób wzbudzimy falę podłużną lub poprzeczną. Interesującym wydaje się pytanie o prędkość różnych rodzajów fali dźwiękowej (podłużnej lub poprzecznej) w różnych ośrodkach. Poniżej zbieramy te informacje w postaci Tabeli 7.1..

W Rozdziale 6.1. poznaliśmy pojęcie modułu sprężystości podłużnej (modułu Younga). Z innymi niż podłużne odkształceniami wiążemy odpowiednie inne moduły sprężystości. Przy skręcaniu objawia się sprężystość poprzeczna i związany z nią moduł sztywności (zwany też modułem sprężystości poprzecznej lub modułem Kirchhoffa). W gazach mamy do czynienia ze ściśliwością, której odpowiada moduł ściśliwości (zwany też współczynnikiem sprężystości objętościowej). Wszystkie moduły sprężystości informują, jak łatwo dane odkształcenie zachodzi w materiale. Im większe ich wartości, tym mniej odkształcają się ciała. Teraz wiemy także, że większym wartościom modułów sprężystości odpowiada większa prędkość dźwięku w materiałach. Tak więc w stali dźwięk będzie rozchodził się szybciej niż w wodzie, bo $\frac{E_{stali}}{\rho_{stali}} \approx 11 \frac{K_{wody}}{\rho_{wody}}$, zaś w obu przypadkach szybkość dźwięku będzie znacznie większa niż w powietrzu, bowiem $\frac{K_{powietrza}}{\rho_{powietrza}} \approx \frac{1}{18} \frac{K_{wody}}{\rho_{wody}}$. Różnice będą następujące: $v_{w\ stali} \approx 3,3 v_{w\ wodzie}$ oraz $v_{w\ powietrzu} \approx 0,24 v_{w\ wodzie}$ (Czytelnik może sam znaleźć potrzebne dane i sprawdzić nasze oszacowanie).

Prędkość dźwięku w powietrzu silnie zależy od ciśnienia, a więc i temperatury (zgodnie ze wzorem w Tabeli 7.1.). W temperaturze pokojowej wynosi ona ok. 345 m/s, a w temperaturze 0° już tylko 330 m/s. W temperaturach silnie ujemnych może spaść aż do ok. 300 m/s, zaś w bardzo wysokich wzrosnąć do ponad 350 m/s.

Przyjmuje się, że zakres słyszalny dźwięku dla ludzkiego ucha wynosi mniej więcej 16(20) Hz - 20 kHz, przy czym ucho jest najczulsze na dźwięki o częstotliwości 1000-3000 Hz. (Podobnie ludzkie oko jest najbardziej wyczulone na barwę zieloną, spośród całego spektrum długości fali świetlnej). Dźwięki o częstotliwościach < 16(20) Hz nazywamy **infradźwiękami** - wydają je najczęściej bardzo duże i masywne obiekty, np. drgające budynki, poruszające

Tabela 7.1.: Prędkość fali dźwiękowej w wybranych ośrodkach.

Ośrodek	Rodzaj fali	Prędkość fali	Objaśnienia
pręt (metal)	podłużna	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$	E - moduł sprężystości [Pa] (moduł Younga) ρ - gęstość materiału $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$
pręt (metal)	poprzeczna	$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2)$	G - moduł sztywności [Pa] ρ - gęstość materiału $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$
gaz lub ciecz	podłużna	$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3)$	K - moduł ściśliwości [Pa] ρ - gęstość materiału $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$
gaz (przybliżenie adiabatyczne)	podłużna	$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (4)$	κ - wykładnik adiabaty p - ciśnienie gazu [Pa] ρ - gęstość materiału $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$ przybliżenie: $K \approx \kappa \cdot p$ T - temperatura [K] M_{mol} - masa molowa gazu $[\frac{\text{kg}}{\text{mol}}]$ $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ - stała gazowa
ogólny wzór na prędkość fali sprężystej (wzór Newtona)		$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \quad (5)$	M - odpowiedni moduł sprężystości [Pa] (E, G, K) ρ - gęstość materiału $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$

się płyty tektoniczne (takie fale mechaniczne nazywamy *sejsmicznymi*) itp. Dźwięki o częstotliwościach > 20 kHz to **ultradźwięki** - są one wydawane przez niektóre zwierzęta (owady, nietoperze, ssaki morskie, np. wieloryby i delfiny). W zakresie powyżej 20 kHz słyszą np. psy, co wykorzystuje się np. przy produkcji gwizdków na psy.

Przykłady

1. Aluminiowy pręt przykładamy jednym końcem do betonowej ściany. W drugi koniec uderzamy młoteczkiem wzbudzając falę podłużną. Jaka jest długość fali rejestrowanej w ścianie, jeśli zmierzono, że długość fali w pręcie wynosiła 1 cm?
To zadanie okaże się bardzo proste, jeśli uświadomimy sobie, jak (i które) parametry fali dźwiękowej zmieniają się przy przejściu do innego ośrodka. Oczywiście musi zmieniać się prędkość fali (aluminium i beton mają inne moduły sprężystości i gęstości). W takim razie musi się zmieniać długość lub częstotliwość. Wielkością, która się nie może zmienić przy przejściu do innego ośrodka, jest częstotliwość, bo jest ona cechą źródła fali (uderzyliśmy młoteczkiem tak, że powstała fala o określonej częstotliwości, albo

przyłożyliśmy do pręta głośnik emitujący dźwięk o określonej częstotliwości). Zmienia się więc długość fali.

Znajdujemy parametry aluminium: $E^{\text{Al}} = 69 \text{ Pa}$, $\rho^{\text{Al}} = 2720 \text{ kg/m}^3$; oraz betonu: $E^{\text{beton}} = 27 \text{ Pa}$, $\rho^{\text{beton}} = 1800 \text{ kg/m}^3$. Z równości częstotliwości wynika:

$$\nu^{\text{Al}} = \nu^{\text{beton}} \Rightarrow \frac{v^{\text{Al}}}{\lambda^{\text{Al}}} = \frac{v^{\text{beton}}}{\lambda^{\text{beton}}} \Rightarrow \lambda^{\text{beton}} = \lambda^{\text{Al}} \cdot \frac{v^{\text{beton}}}{v^{\text{Al}}}$$

Teraz podstawmy wzór na prędkość podłużnej fali dźwiękowej (1) w Tabeli 7.1.:

$$\lambda^{\text{beton}} = \lambda^{\text{Al}} \sqrt{\frac{E^{\text{beton}}}{E^{\text{Al}}} \cdot \frac{\rho^{\text{Al}}}{\rho^{\text{beton}}}} = 0,77 \lambda^{\text{Al}} = 7,7 \text{ mm}$$

Przy przejściu fali przez granicę dwóch ośrodków musi być spełniony dodatkowo tzw. warunek ciągłości - tzn. fala nie może doznać „skoku”, musi być ciągła (np. wychylenie w górę nie może skokowo zmienić się w „dołek”). Powiemy, że warunek ciągłości wymaga zachowania tej samej fazy fali po obu stronach granicy ośrodków. inaczej będzie w przypadku odbicia fali od granicy ośrodków. Wówczas dochodzi do zmiany fazy na przeciwną (por. dalsza dyskusja nt. fali stojącej).

2. Oblicz prędkość dźwięku w chlorze (Cl_2), argonie (Ar), powietrzu (p), metanie (CH_4) i helu (He), w temperaturze 0°C .

Do obliczenia prędkości dźwięku w gazie użyjemy wzoru (4) z Tabeli 7.1.. Masy molowe cząsteczek gazów odczytamy z tablic chemicznych (albo układu okresowego pierwiastków): $M_{\text{mol}}^{\text{Cl}_2} = 71 \text{ g/mol}$, $M_{\text{mol}}^{\text{Ar}} = 40 \text{ g/mol}$, $M_{\text{mol}}^{\text{p}} = 28,8 \text{ g/mol}$, $M_{\text{mol}}^{\text{CH}_4} = 16 \text{ g/mol}$, $M_{\text{mol}}^{\text{He}} = 4 \text{ g/mol}$. O wykładniku adiabaty dowiemy się więcej w późniejszym rozdziale poświęconym termodynamice. Hel oraz argon to gazy szlachetne, a więc o cząsteczkach 1-atomowych, zatem $\kappa^{\text{He}} = \kappa^{\text{Ar}} = 5/3$; powietrze to mieszanina gazów 2-atomowych, więc $\kappa^{\text{p}} = 7/5$; podobnie, cząsteczka chloru jest 2-atomowa, więc $\kappa^{\text{Cl}_2} = 7/5$; natomiast metan to gaz o cząsteczce 5-atomowej (wieloatomowej), stąd $\kappa^{\text{CH}_4} = 4/3$ (ułamki te wydadzą się nam bardzo proste do ustalenia w Podrozdziale 9.3.4.). Temperatura 0°C oznacza $T = 273 \text{ K}$ (o jednostce temperatury „kelwin” Czytelnik dowie się więcej w Rozdziale 9.1.). Zatem:

$$v^{\text{Cl}_2} = 211,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v^{\text{Ar}} = 307,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v^{\text{p}} = 332 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v^{\text{CH}_4} = 434,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v^{\text{He}} = 972 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Okazuje się, że w gazach cięższych od powietrza (chlor i argon) powietrze ma mniejszą prędkość, zaś w gazach lżejszych (metan i hel) - większą. W helu, który jest bardzo lekki, ta prędkość jest bardzo duża. Z pewnością Czytelnik kojarzy zabawny efekt podwyższenia głosu rozmówcy po wpuszczeniu helu do gardła (np. w filmach komicznych). Fala o określonej długości ma w ośrodku rzadszym (helu) większą prędkość, a więc i wyższą częstotliwość. Jak wiemy z Rozdziału 7.3.2., od częstotliwości zależy wysokość dźwięku. Stąd efekt podwyższonego głosu. Zauważmy, że przy tym prędkość dźwięku stosunkowo słabo zależy od typu cząsteczki (1-, 2- lub 3- więcej atomowej). W danej temperaturze prędkość zależy głównie od rodzaju gazu (masy molowej).

7.3.1. Efekt Dopplera

Znamy na pewno z życia codziennego efekt podwyższonego dźwięku od nadjeżdżającej karetki oraz obniżonego od oddalającej się karetki. Jeżeli źródło dźwięku i obserwator poruszają się względem siebie, to rejestrowany przez obserwatora dźwięk ma wyższą (gdy źródło się zbliża) lub niższą (gdy źródło się oddala) częstotliwość. To zjawisko nazywamy efektem Dopplera. Poruszać może się tylko źródło, lub tylko obserwator, albo oba obiekty jednocześnie. Rejestrowana przez obserwatora częstotliwość ν' wynosi:

$$\begin{aligned} \text{porusza się tylko źródło: } \nu' &= \nu \cdot \frac{v_{d\dot{z}}}{v_{d\dot{z}} \mp v_{\dot{z}r}} \\ \text{porusza się tylko obserwator: } \nu' &= \nu \cdot \frac{v_{d\dot{z}} \pm v_{obs}}{v_{d\dot{z}}} \\ \text{porusza się i źródło i obserwator: } \nu' &= \nu \cdot \frac{v_{d\dot{z}} \pm v_{obs}}{v_{d\dot{z}} \mp v_{\dot{z}r}} \end{aligned} \quad (7.7.)$$

gdzie: ν to częstotliwość dźwięku emitowanego przez źródło (częstotliwość własna źródła, taka jaka jest rzeczywiście emitowana), $v_{d\dot{z}}$ to prędkość dźwięku w danym ośrodku (w powietrzu jest to ok. 330-345 m/s), v_{obs} jest prędkością obserwatora, zaś $v_{\dot{z}r}$ to prędkość źródła (emitera) dźwięku. Znaki $\pm$ prędkości obserwatora, lub $\mp$ prędkości źródła są określone względem prędkości dźwięku. Znaki górne (+ w liczniku i – w mianowniku) dotyczą sytuacji, gdy prędkości skierowane są „ku sobie” (obserwator/źródło „zbliżają się” do fali dźwiękowej), a znaki dolne (– w liczniku i + w mianowniku) dotyczą sytuacji odwrotnej - gdy prędkości skierowane są „od siebie” (obserwator/źródło „oddalają się” od fali dźwiękowej). Warto też zapamiętać: „obserwator jest w liczniku, źródło jest w mianowniku”. Wzór (7.7.) obowiązuje w sytuacji, gdy dźwięk, obserwator i źródło poruszają się wzdłuż tej samej prostej.

Przykłady

1. Jaką długość fali dźwiękowej zarejestruje nieruchomy obserwator w wieży kontroli lotów, jeśli źródło dźwięku, którym jest samolot odrzutowy, (i) zbliża się, (ii) oddala się do obserwatora z prędkością 720 km/h, emitując dźwięk o częstotliwości 100 Hz? Przyjmij, że prędkość dźwięku wynosi 340 m/s.

Wzór (7.7.) podaje przepis na zmianę częstotliwości fali w zależności od prędkości obserwatora i źródła względem fali dźwiękowej. Zmianę długości fali obliczymy jako $\lambda' = \frac{v_{d\dot{z}}}{\nu'}$, bo dźwięk porusza się z prędkością dźwięku. W naszym przypadku porusza się tylko źródło (przypadek 1 we wzorze (7.7.)), zatem:

$$\lambda' = \frac{v_{d\dot{z}}}{\nu'} = \frac{v_{d\dot{z}}}{\nu \cdot \frac{v_{d\dot{z}}}{v_{d\dot{z}} \mp v_{\dot{z}r}}} = \frac{v_{d\dot{z}} \mp v_{\dot{z}r}}{\nu} = \begin{cases} (i): & 1,4 \text{ m} \\ (ii): & 5,4 \text{ m} \end{cases}$$

Wynik jest spodziewany. Podczas zbliżania się (i) częstotliwość rejestrowana przez obserwatora rośnie, a więc długość fali jest mniejsza. Odwrotnie w sytuacji (ii), gdy źródło oddala się.

2. Sygnał dźwiękowy karetki pogotowia emituje falę o częstotliwości 1000 Hz. Kierowca w innym samochodzie jedzie wzdłuż tej samej prostej i w tym samym kierunku, co karetka, ale wolniej („karetka go goni”). Rejestruje wówczas częstotliwość 1015 Hz. Gdy karetka go wyprzedza, obserwator w samochodzie zaczyna rejestrować częstotliwość 900

Hz. Z jaką prędkością prędkością się karetka i samochód obserwatora?

Korzystamy ze wzoru (7.7.) w wariancie z poruszającym się źródłem i obserwatorem dźwięku jednocześnie. Niech $\nu = 1000$ Hz, $\nu'_1 = 1015$ Hz, $\nu'_2 = 900$ Hz. Przyjmijmy też $v_{dz} = 340$ m/s. Mamy więc:

$$\begin{cases} \nu'_1 = \nu \cdot \frac{v_{dz} - v_{obs}}{v_{dz} - v_{zr}} \\ \nu'_2 = \nu \cdot \frac{v_{dz} - v_{obs}}{v_{dz} + v_{zr}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\nu'_1}{\nu'_2} = \frac{v_{dz} + v_{zr}}{v_{dz} - v_{zr}} \Rightarrow v_{zr} = v_{dz} \cdot \frac{\nu'_1 - \nu'_2}{\nu'_1 + \nu'_2} = 20,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{obs} = v_{dz} - \frac{\nu'_1}{\nu'_2} (v_{dz} - v_{zr}) = 15,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wyniki wydają się rozsądne. Karetka jedzie z prędkością ok. 73 km/h, podczas gdy samochód miał prędkość ok. 56 km/h.

7.3.2. Parametry dźwięku

Oprócz takich wielkości fizycznych opisujących falę dźwiękową, jak częstotliwość, długość, prędkość fali, definiujemy szereg innych parametrów dźwięku, które często mają charakter bardziej subiektywny niż czysto fizyczny. Przykładowo jedne dźwięki nam się „podobają” bardziej niż inne, ktoś woli głos soprań, a inny woli basy. Jednych drażnią dźwięki głośne, inni wolą słuchać muzyki właśnie głośnej itd. Zdefiniowanie nowych parametrów dźwięku, takich jak wysokość, barwa, głośność wymagać więc będą raczej słów, niż równań.

Zanim bardziej szczegółowo omówimy te parametry, powiedzmy najpierw, że większość źródeł dźwięków z muzyce (instrumentów) wytwarza tzw. falę stojącą, która nie propaguje się nieustannie w ośrodku. O falach tego typu powiemy więcej w Podrozdziale 7.5.2.. Taką falę wytwarza np. rozedrgana struna skrzypiec, czy słup powietrza w piszczałkach organów. W każdym przypadku jest to najczęściej fala sinusoidalna (harmoniczna) i taka wydaje się najładniej brzmieć dla ludzkiego ucha. Fala stojąca może składać się z wielu składowych fal - tzw. **wyższych składowych harmoniczných**, które charakteryzują się wyższą częstotliwością. Wynika to z pewnych ograniczeń geometrycznych, jakie musi spełniać fala stojąca (powiemy o tym w Podrozdziale 7.5.2.). Przykładowo n -ta składowa harmoniczna ma n razy większą częstotliwość niż najniższa możliwa częstotliwość. W przypadku drgającej struny o długości l największa możliwa długość fali to $\lambda = 2l$, a więc najmniejsza częstotliwość to $f_0 = \frac{v}{2l}$. Tę najmniejszą częstotliwość nazywamy **tonem podstawowym** (czasem też tonem czystym, składową podstawową). Częstotliwości wyższych składowych harmoniczných wynoszą $f_n = n f_0$. Częstotliwość tonu podstawowego decyduje o **wysokości** dźwięku. Przykładowo dźwięk a^1 (czyt. „a razkreślne”), do którego najczęściej wystrojone są kamertony, ma wysokość 440 Hz. Do takiej częstotliwości najczęściej „stroją się” chóry lub orkiestry symfoniczne przed koncertem (być może Czytelnik kojarzy pojedynczy dźwięk podany przez oboistę w sali filharmonii - to właśnie dźwięk a^1). Jeśli się okazało, że któryś z instrumentów orkiestry nie wystroił swojego instrumentu do dźwięku a^1 o częstotliwości 440 Hz, a np. do 445 Hz (lub analogicznie innych dźwięków), to słuchacz odebrałby to jako „fałsz”. Dźwięk 440 Hz nazywa się często dźwiękiem wzorcowym.

Od ilości składowych harmoniczných i ich względnych amplitudach (względem tonu podstawowego i siebie nawzajem) zależy **barwa** dźwięku. Barwa jest raczej subiektywnym odczuciem niż precyzyjnym fizycznym pojęciem, choć oczywiście moglibyśmy wprowadzić precyzyjną miarę ilości składowych harmoniczných i ich amplitud. Dźwięki wydawane przez

skrzypce w rękach początkującego skrzypka (zapewne jeszcze dziecka-ucznia szkoły muzycznej I stopnia) nie są często przyjemne dla ucha, choć mogą być niemal idealnie „czyste”. Mamy takie odczucie, bo barwa takiego dźwięku jest brzydka. Stąd można by wysnuć wniosek, że sam ton podstawowy niekoniecznie jest przez nas odbierany jako ładny, bo nie ma żadnej barwy. Uzyskanie pięknego brzmienia instrumentu (pięknej barwy) bywa sztuką i wymaga dużo wysiłku nie zawsze tylko od skrzypka, ale i producenta instrumentu (skrzypce Stradivariusu albo Amaticich uchodzą za cenne właśnie przez to, że dają wyjątkową barwę dźwięku).

Głośność dźwięku jest cechą wrażenia słuchowego i wyraża raczej subiektywne odczucie, który dźwięk jest lepiej słyszalny (głośny), a który słabiej słyszalny (cichszy). Choć głośność będzie zależała np. od natężenia dźwięku, to nie jest tak precyzyjną wielkością fizyczną jak ta druga. Głośność mierzy się w **sonach**. Podaje się też miarę logarytmiczną **poziomu głośności w fonach** (analogicznie do poziomu natężenia w skali decybelowej). Nie będziemy bardziej szczegółowo zajmować się tymi wielkościami.

Przykłady

1. Jaką siłą musi być napięta struna D w gitarze klasycznej, aby uzyskać idealny strój? Struna jest nylonowa i ma rozmiar 0,030. Rozmiar gitary to 4/4.

Zadanie to celowo jest zdefiniowane tak ogólnie. Ma nas sprowokować do znalezienia wszystkich potrzebnych danych w internecie. I tak: struna D w gitarze ma dawać dźwięk o częstotliwości mniej więcej $f_0 = 147$ Hz; rozmiar struny 0,030 oznacza, że średnica jej przekroju to $d = 0,030$ cala $= 0,762$ mm; rozmiar gitary 4/4 oznacza, że jej długość całkowita to 99 cm, a długość czynna strun (od gryfu do mostka) wynosi $l = 65$ cm. Jak pamiętamy, maksymalna długość fali stojącej w strunie wynosi $\lambda_{max} = 2l$. Ton podstawowy dla dźwięku D wynosi więc $f_0 = \frac{v}{\lambda_{max}} = \frac{v}{2l}$. Pozostaje kwestia nylonu. W internecie znajdujemy gęstość (objętościową) nylonu, równą $\rho = 1140$ kg/m³. Znając gęstość ρ i pole przekroju poprzecznego struny, możemy obliczyć jej gęstość liniową masy: $\mu = \rho \cdot S = \rho \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 5,2 \cdot 10^{-4}$ kg/m. Na koniec musimy uwzględnić związek prędkości fali (poprzecznej) w strunie z siłą naciągu. Podaje go wzór (7.6.). Ostatecznie więc mamy:

$$f_0 = \frac{v}{2l} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2l} \Rightarrow F = 4l^2 f_0^2 \cdot \mu = 19 \text{ N}$$

To jest może dość zaskakująco mała siła (mniej więcej ciężar masy 2 kg). Rzeczywiście struny w gitarze klasycznej mają stosunkowo słabe naciągi, w porównaniu np. do gitary akustycznej. Tam zakłada się struny metalowe, bo konstrukcja gryfu gitary jest mocniejsza. Gdyby do naszej gitary z zadania założyć struny stalowe ($\rho_{stal} = 7860$ kg/m³), to siła naciągu byłaby:

$$F_{stal} = 4l^2 f_0^2 \cdot \rho_{stal} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \pi d^2 l^2 f_0^2 \cdot \rho_{stal} = 130 \text{ N}$$

- zdecydowanie większa. Wydawać by się mogło, że aby uzyskać pożądane dźwięki e¹HGDAE w gitarze, można by użyć 6 identycznych strun, ale naciągniętych innymi siłami. Rzeczywiście, w teorii tak. Jednak z praktycznego punktu widzenia, konstrukcja gitary wymaga, aby naciągi wszystkich strun były mniej więcej takie same. Dlatego, zamiast, używamy strun o różnych grubościach (czyli gęstościach liniowych).

7.4. Energia, moc i natężenie fali

7.4.1. Moc fali biegnącej w strunie

Z Rozdziału 4. pamiętamy, że moc zdefiniowana jako stosunek pracy i czasu, może być interpretowana jako szybkość zmiany (przekazu) energii. Moc przenoszona przez każdą falę biegnącą jest oscylującą funkcją czasu (tak jak wychylenie cząsteczek drgającego ośrodka harmonicznym oscyluje w przestrzeni). Można pokazać, że sinusoidalna fala biegnąca w strunie napiętej siłą F przenosi energię z szybkością

$$P = A^2 k \omega F \cos^2(kx - \omega t) \quad (7.8.)$$

gdzie A to amplituda fali, k - liczba falowa, ω - częstość. Bardzo często interesuje nas *średnia moc* fali mechanicznej (moc przenoszona średnio w czasie 1 okresu). Jest to wielkość równa:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} A^2 k \omega F = 2\pi^2 A^2 \nu^2 \frac{F}{v} = 2\pi^2 A^2 \nu^2 \mu v \quad (7.9.)$$

Wykorzystaliśmy tutaj tożsamości: $k\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\pi\nu = 4\pi^2 \frac{\nu}{\lambda} = 4\pi^2 \frac{\nu^2}{v}$, a w ostatnim przejściu wzór (7.6.) na prędkość fali w drgającej strunie; μ - gęstość liniowa struny. Wzór (7.9.) można też zapisać w postaci:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v \quad (7.10.)$$

7.4.2. Energia i moc średnia fali w dowolnym ośrodku sprężystym

Można pokazać, że w ośrodku sprężystym średnia moc przekazywana przez powierzchnię S ośrodka przez falę biegnącą wynosi:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v S = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 v S \quad (7.11.)$$

gdzie ρ to gęstość ośrodka. Wyrażenie to można zapisać przy użyciu pojęcia *średniej gęstości energii* (wielkość średnia energii przenoszonej przez falę liczona na jednostkę objętości: $\overline{\rho}_E = \frac{\overline{E}}{V}$) w postaci:

$$\overline{P} = \overline{\rho}_E \cdot v \cdot S \quad \overline{\rho}_E = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (7.12.)$$

Średnia energia przenoszona przez falę jest średnią energią źródła fali (oscylatora harmonicznego). Jak wiemy energia całkowita oscylatora wynosi $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$. Ponieważ energia ta jest stała, to jej średnia (po czasie) też wynosi $\overline{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$. Zatem średnia gęstość energii rzeczywiście wynosi:

$$\overline{\rho}_E = \frac{\overline{E}}{V} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{V} = \left| \frac{m}{V} = \rho \right| = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (7.13.)$$

Zwróćmy uwagę, że w każdym wypadku średnia moc przenoszona przez falę biegnącą jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali i kwadratu częstości (częstotliwości). To jest własność wszystkich fal (nie tylko mechanicznych, ale też elektromagnetycznych, np. promieniowania rentgenowskiego). Zapamiętajmy:

$$\text{Dla każdej fali, zawsze: } \overline{P} \sim A^2 \quad \text{oraz} \quad \overline{P} \sim \nu^2 \quad (7.14.)$$

7.4.3. Natężenie fali

Natężeniem fali I nazywamy stosunek średniej mocy $\bar{P}$ przenoszanej przez falę i pola powierzchni S do której dociera czoło fali. Zgodnie z definicjami średniej mocy z poprzedniego podrozdziału, możemy zdefiniować natężenie fali jako:

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{\rho}_E \cdot v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 v \quad (7.15.)$$

Natężenie fali wyrazimy więc w jednostkach W/m². Kolejna bardzo ważna cecha wszystkich fal dotyczy natężenia:

$$\text{Dla każdej fali, zawsze: } I \sim A^2 \quad \text{oraz} \quad I \sim \nu^2 \quad (7.16.)$$

podobnie jak w przypadku średniej mocy. Natężenie fali w największym stopniu zależy od amplitudy i częstotliwości (te dwa parametry zależą wyłącznie od źródła - emitera fali).

Jeżeli mamy do czynienia z punktowym źródłem fali (z dobrym przybliżeniem jest to np. dźwięk emitowany przez metalowy dzwonek, albo nawet muzyka emitowana z głośnika), to powierzchnią tą jest powierzchnia sfery. O takiej fali mówimy, że jest anizotropowa - propaguje się jednocześnie we wszystkich kierunkach i w każdym tak samo. Nazywamy ją **falą kulistą**. Natężenie fali kulistej jest równe:

$$\text{Fala kulista (w przestrzeni):} \quad I = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} \quad I \sim \frac{1}{r^2} \quad (7.17.)$$

gdzie r jest odległością od źródła, a $4\pi r^2$ jest polem powierzchni sferycznej powierzchni, do której dociera fala o tej samej fazie. Natężenie fali maleje z kwadratem odległości od źródła fali. Tak więc gdy oddalamy się od głośnika emitującego falę dźwiękową na 2-krotnie większą odległość, rejestrujemy 4-krotnie mniejsze natężenie dźwięku (przy tej samej mocy źródła).

Oczywiście w przypadku fal rozchodzących się izotropowo na płaszczyźnie (np. fala na wodzie powstała wskutek wrzucenia pionowo z góry kamienia), czoło fali tworzy okręgi o promieniu r . Falę taką nazwiemy **falą kolistą**. Natężenie takiej fali zależy tylko od odwrotności odległości (ma wtedy jednostkę W/m):

$$\text{Fala kolista (na płaszczyźnie):} \quad I = \frac{\bar{P}}{2\pi r} \quad I \sim \frac{1}{r} \quad (7.18.)$$

7.4.4. Poziom natężenia dźwięku

Dobrze znamy decybelową skalę poziomu natężenia dźwięku. Z życia wiemy, że 20 dB (szept) jest dla nas ledwo słyszalne, 40 dB (rozmowa, gwar w pokoju) jest dla nas w miarę komfortowy, 60-80 dB (odkurzacz lub głośna muzyka) przeszkadza i może trochę drażnić, 100 dB (hałas samochodów) to już naprawdę duży poziom natężenia dźwięku, a przy 120-140 dB bolą uszy (jest to tzw. próg bólu). Skala w decybelach okazuje się bardzo pomocna w definiowaniu poziomu natężenia dźwięku. Okazuje się, że różne dźwięki (choćby te wymienione) mają bardzo różne natężenia (wartości rozciągają się na kilkanaście rzędów wielkości). Samo natężenie dźwięku I byłoby więc mało wygodne w życiu codziennym, a nawet w technice. Dlatego wprowadza się pojęcie **poziomu natężenia dźwięku**, który jest logarytmiczną miarą natężenia dźwięku w skali decybelowej:

$$L \text{ [dB]} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ [dB]} = 10 \log_{10} \left(\frac{A^2}{A_0^2} \right) \text{ [dB]} \quad (7.19.)$$

gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ jest pewnym (umownym) natężeniem dźwięku odniesienia, nazywanym też czasem progiem słyszalności; A_0 to odpowiadająca mu amplituda.

Przykłady

1. Głośnik zestawu kina domowego ma moc 50 W. Jaki poziom natężenia dźwięku zarejestrujesz siedząc na kanapie w odległości 3 m od głośnika, jeśli w danym momencie pracuje on z maksymalną mocą? Do jakiego poziomu należałoby ściszyć głośnik (do jakiej wartości obniżyć jego moc), aby móc oglądać film komfortowo, przy poziomie natężenia dźwięku 70 dB?

Wykorzystamy najpierw wzór na natężenie dźwięku fali kulistej (zakładamy, że głośnik emituje dźwięki w miarę izotropowo) w funkcji odległości (7.17.), a następnie definicję poziomu natężenia dźwięku (7.19.).

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 0,44 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \Rightarrow L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 116 \text{ dB}$$

To zdecydowanie za duży poziom natężenia dźwięku, aby móc oglądać film bez uczucia bólu uszu. Aby osiągnąć bezpieczny poziom $L' = 70 \text{ dB}$, należy z głośnika generować moc:

$$L' = 10 \log_{10} \left(\frac{I'}{I_0} \right) \Rightarrow I' = I_0 \cdot 10^{\frac{L'}{10}} = 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \Rightarrow P' = I' \cdot 4\pi r^2 \approx 1 \text{ mW}$$

Do komfortowego oglądania filmu wystarczy „skręcenie” regulatora głośności tak, by moc generowana przez głośnik była rzędu miliwatów.

2. Fala biegnąca w strunie ma równanie (w układzie SI): $y(x,t) = 0,003 \sin(kx - 2700t)$. Jaka jest gęstość energii tej fali i średnia moc przekazywana przez strunę? Struna jest wykonana ze stali ($G = 80 \text{ GPa}$, $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$) i ma przekrój kołowy o średnicy 2 mm. Fala opisana powyższym równaniem jest falą poprzeczną, zatem na podstawie wzoru (2) z Tabeli 7.1. obliczamy prędkość fali: $v = 3190 \text{ m/s}$. Z równania fali odczytujemy amplitudę: $A = 0,003 \text{ m} = 3 \text{ mm}$, oraz częstość: $\omega = 2700 \text{ rad/s}$. Średnica struny to $d = 2 \text{ mm}$. Korzystamy teraz ze wzoru 7.12. na średnią energię i średnią moc:

$$\bar{\rho}_E = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \approx 260 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}, \quad \bar{P} = \bar{\rho}_E v S = \bar{\rho}_E \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 2,6 \text{ kW}$$

7.5. Interferencja fal

Wszystkie fale nakładają się na siebie. Mówimy wówczas o superpozycji fal, w wyniku której może dochodzić do zmian kształtu, amplitudy i częstości fali wypadkowej. Podobnie jak miało to miejsce w przypadku składania drgań (Rozdział 6.2.2.), postać fali wypadkowej będzie zależał od amplitud i faz (częstości, dróg falowych i faz początkowych) fal składowych. Tylko w szczególnym przypadku nazwiemy superpozycję fali interferencją:

Interferencją nazywamy superpozycję fal **spójnych**. Fale nazywamy spójnymi, gdy ich długości fali są równe, a różnica faz nie zależy od czasu.

Tylko fale spójne (takie, których różnica faz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ jest stała w czasie, a długości fali są równe) ulegają interferencji. Mówimy dodatkowo o interferencji **konstruktywnej** - takiej, w której amplituda wypadkowa ulega wzmocnieniu (jest sumą amplitud fal składowych), oraz **destruktywnej** - w przypadku której fala ulega osłabieniu (amplitudy odejmują się). Interferencja destruktywna może doprowadzić do wygaszenia fal (interferencja całkowicie destruktywna). Dzieje się tak, gdy nakładają się dwie fale o tych samych amplitudach, ale przesunięte w fazie o π (mówimy: drgają w przeciwfazie). Przesunięcie fazowe π oznacza przesunięcie długości fali o połowę długości fali. W uproszczeniu można powiedzieć, że interferencja jest konstruktywna, gdy fale spotykają się „górkami” lub „dolinami”, a destruktywna, gdy „górką” spotyka się z „doliną”.

Warunek Younga interferencji konstruktywnej jest taki, że różnica dróg falowych obu fal musi być całkowitą wielokrotnością długości fali (równoważnie mówimy też: parzystą wielokrotnością połówek długości fali). Jeśli różnica dróg falowych jest nieparzystą wielokrotnością połówek długości fali, to jest to warunek destruktywnej interferencji. Warunki Younga interferencji możemy ująć wzorami:

$$\begin{aligned} \text{Interferencja konstruktywna: } \Delta s &= n\lambda = 2m\frac{\lambda}{2} \\ \text{Interferencja destruktywna: } \Delta s &= (2m+1)\frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (7.20.)$$

7.5.1. Fala płaska, dyfrakcja, zasada Huyghensa

Falą płaską nazywamy falę (na płaszczyźnie lub w przestrzeni), która propaguje się tylko w jednym kierunku. Jeśli spojrzymy na taką falę „z boku” (jakby w przekroju poprzecznym), to zobaczymy proste linie, łączące „górkę” lub „dolinę” sąsiednich fal. Mówimy, że czoło fali płaskiej stanowią równoodległe linie proste (na schematach często zaznaczamy czoła fali odpowiadające minimom i maksimom).

W poprzednich podrozdziałach mówiliśmy, że fala dźwiękowa rozchodzi się raczej izotropowo (jednakowo) we wszystkich kierunkach. Nie jest więc falą płaską, a kulistą. Jest to prawda w przypadku źródła punktowego (lub prawie punktowego, np. głośnik można traktować w sposób przybliżony jako źródło punktowe). Jeżeli źródło dźwięku jest bardzo duże, to w niewielkiej odległości od niego fala dźwiękowa może być traktowana w przybliżeniu jak płaska. Raczej ciężko sobie wyobrazić źródło dźwięku, generujące falę płaską. Zdecydowanie łatwiej wyobrazić sobie fale płaskie na wodzie. Świetnym przykładem są morskie fale (choć tak naprawdę ich kształt jest bardziej skomplikowany). Podobnie, gdy wytrzepujemy koc po skończonym pikniku na łące, najpewniej poruszamy nim tak, że generujemy falę płaską.

Jeżeli fala płaska pada na przeszkodę, np. w postaci niewielkiego obiektu, lub krawędzi obiektu dużego, albo na szczelinę, to ulega **ugięciu**, zwanego także **dyfrakcją**. Co to znaczy, że przeszkoda jest niewielka? Chodzi o taki rozmiar przeszkody, który jest porównywalny z długością fali padającej. Łatwo sobie wyobrazić, że fala morska o długości rzędu kilku metrów, zapewne nie „poczucie” przeszkody w postaci pojedynczego pala wbitego w dno morza. Przejdzie przez taką przeszkodę bez zmian, nie ugnie się. (Dopiero szereg wielu pali - tworzących falochron - rozbija falę.) Warunkiem dyfrakcji jest więc to, aby rozmiar przeszkody był porównywalny z długością fali. Jak dalej zachowuje się ugięta fala? O tym mówi **zasada Huyghensa**:

Każdy punkt ośrodka, do którego dotarło czoło fali, można traktować jako źródło nowej fali

kulistej (w 3D) lub kolistej (w 2D)

Tak więc, gdy fala płaska pada na przeszkodę w postaci szczeliny, za szczeliną rozchodzi się nowa fala kulista (lub kolista). Ta nowa fala musi mieć tę samą częstotliwość i kierunek rozchodzenia się, co fala padająca (w szczególności, nie może rozchodzić się „do tyłu”). Zasada Huyghensa dotyczy nie tylko sytuacji powstawania fali na przeszkodzie wskutek dyfrakcji. Każdą falę biegnącą można interpretować w oparciu o zasadę Huyghensa - fala płaska jest wówczas traktowana jako złożenie kulistych fal cząstkowych, które ze sobą interferują, a wypadkową powierzchnię falową tworzy styczna do wszystkich powierzchni fal cząstkowych.

7.5.2. Fala stojąca

W gitarze lub skrzypcach, o których wspominaliśmy powyżej, struna jest zamocowana w dwóch końcach. Jeśli wzbudzimy falę w takiej strunie, to powstanie tzw. **fala stojąca**. Fala taka nie propaguje się w ośrodku (a więc i nie przenosi energii). W pewnych miejscach w przestrzeni powstają **węzły** fali, czyli miejsca, w których amplituda wychylenia jest zawsze równa 0. Naturalnym węzłem fali w drgającej strunie lub linie zaczepionej w obu końcach jest każdy z tych końców. Fala stojąca może nie mieć więcej węzłów (powstaje wówczas fala o największej możliwej długości fali, równej $\lambda = 2l$, gdzie l to długość struny lub liny). Oprócz węzłów powstają też **strzałki**, czyli miejsca o maksymalnej amplitudzie. Przykładowo w rozedrganym pręcie zamocowanym w środku strzałki występują na końcach pręta, podobnie byłoby w obustronnie otwartej piszczalce. Znowu, mogą to być jedyne strzałki fali, a wtedy mamy do czynienia z falą o największej możliwej długości. Oczywiście fala stojąca może składać się z wielu węzłów i strzałek, przy czym występują one zawsze naprzemiennie.

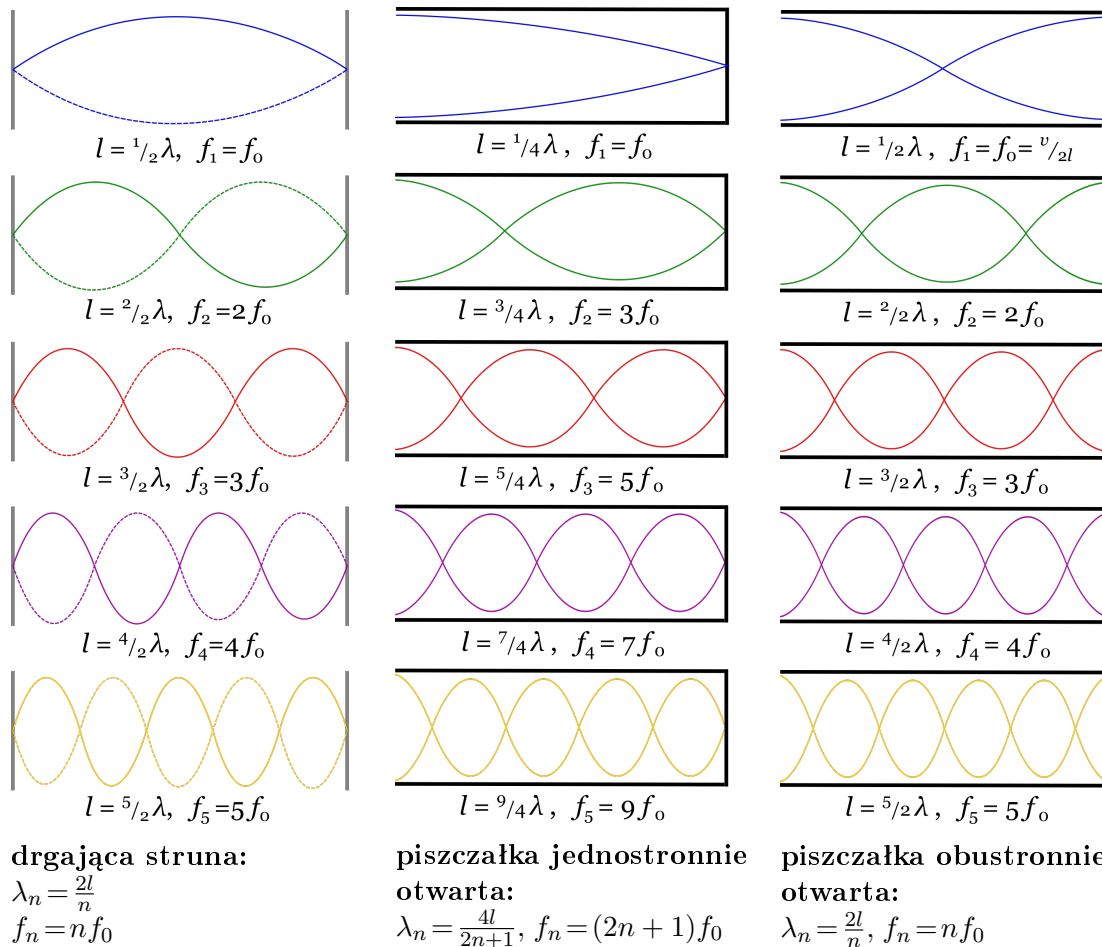
Z punktu widzenia fizyki powstawania fali stojącej, mówimy, że fala taka jest naprawdę superpozycją (złożeniem) dwóch identycznych fal, biegnących w przeciwnych kierunkach i przesuniętych w fazie o π . Wyobraźmy sobie falę biegnącą w rurce, zakończonej z jednej strony zamkniętą ścianką. Przy odbiciu od ścianki fala musi zmienić fazę na przeciwną (wynika to z warunku ciągłości, o którym mówiliśmy w jednym z Przykładów). Z tego natychmiast wynika, że na ścianie musi tworzyć się węzeł (fala „zanika” na ścianie i „rodzi się” na nowo, biegnąc z przeciwną stroną i ze zmienioną o π fazą drgań). Wyprowadźmy równanie fali stojącej:

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \sin(\omega t + kx) \text{ (fala w prawo)} \\ y_2(x,t) &= A \sin(\omega t - kx + \pi) \text{ (fala w lewo)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_{wyp} = y_1 + y_2 = 2A \cos(kx) \sin(\omega t) \quad (7.21.)$$

Równanie fali stojącej można zapisać jeszcze krócej: $y_{wyp}(x,t) = A' \sin(\omega t)$, gdzie $A' = 2A \cos kx$, co można rozumieć tak, że fala stojąca jest jakby pojedynczym drganiem o zmieniającej się w przestrzeni amplitudzie. Można też oprzeć interpretację na równoważnym wzorze: $y_{wyp} = A'' \cos(kx)$, gdzie $A'' = 2A \sin(\omega t)$ - fala stojąca to kosinusoidalny kształt, którego amplituda drga w czasie harmonicznym. Na Rysunku 7.1. pokazano przykładowe wyższe harmoniczne fali stojącej w strunie i piszczałkach.

7.5.3. Rezonans akustyczny

Jeżeli częstotliwości dwóch fal, które się spotykają, są dopasowane, dochodzi do wzmocnienia ich wypadkowego drgania. Taki efekt nazwiemy **rezonansem akustycznym**. Dochodzi



Rysunek 7.1.: Schemat powstawania kolejnych fal stojących w drgającej strunie oraz piszczałkach: jedno- i obustronnie otwartych.

wówczas do maksymalnego przekazu energii w układzie (natężenie generowanego dźwięku jest największe). Warunkiem zajścia rezonansowego wzmocnienia fali jest więc równość częstotliwości dwóch fal.

Jeżeli mamy do czynienia z falą w strunie lub w słupie powietrza w piszczałce, to muszą powstawać fale stojące. Rezonans realizuje się wówczas poprzez powstawanie wyższych harmonicznych - tylko takich, których częstotliwości fali są całkowitą wielokrotnością częstotliwości podstawowej: $f_n = n f_0$ (lub analogicznie: długości fali są kolejnymi ułamekami długości fali tonu podstawowego: $\lambda_n = \frac{1}{n} \lambda_0 = \lambda_0, \frac{1}{2} \lambda_0, \frac{1}{3} \lambda_0, \frac{1}{4} \lambda_0, \dots$). Tuż po wzbudzeniu struny do drgań (np. poprzez szarpnięcie lub uderzenie) generują się fale o wszystkich możliwych częstotliwościach, jednak bardzo szybko dochodzi do „dostrojenia rezonansowego” struny i obok tonu podstawowego pozostają tylko składowe harmoniczne. O amplitudach (udziale harmonicznych w całym tonie) decydują często czynniki zewnętrzne, takie jak np. kształt pudła rezonansowego instrumentu.

Przykłady

1. Dwuwymiarowa płaska fala o długości λ pada na przeszkodę w postaci pojedynczej szczeliny o szerokości d . Znajdź warunek interferencji destruktywnej w zależności od

kąta obserwacji fali za szczeliną (czyli wzór na katowe położenie minimów dyfrakcyjnych).

Przeanalizujmy przez chwilę proces dyfrakcji i interferencji fali płaskiej na szczelinie. Z zasady Huygensa wynika, że z punktów skrajnych szczeliny będzie propagować się fala kolista. Z obszaru pomiędzy wyjdzie dalej fala płaska. Za szczeliną dojdzie więc do interferencji fal dyfrakcyjnych. Warunek na minimum dyfrakcyjne mówi, że różnica dróg falowych interferujących fal musi być równa nieparzystej wielokrotności połówek długości fali - wzór (7.20.). Pozostaje więc obliczenie różnicy dróg falowych. Przeprowadźmy rozważania geometryczne (Rysunek ??). Zastosujemy też pewne przybliżenie: prowadzimy obserwacje z dużej odległości od szczeliny, co oznacza, że promienie fali będą niemal równoległe do siebie. Zatem kąty mierzone do promienia s_1 od jednego końca szczeliny oraz do promienia s_2 biegnącego od środka szczeliny są w przybliżeniu równe i wynoszą θ). Ten sam kąt odnajdujemy w trójkącie OAC na rysunku. Obliczenia wykonujemy dla pierwszego minimum dyfrakcyjnego ($m = 0$ we wzorze (7.20.)). W takim razie:

$$\begin{aligned} \Delta s = s_2 - s_1 &= \frac{\lambda}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\Delta s}{|OA|} = \frac{\Delta s}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \frac{d}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d \sin \theta = \lambda \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór na warunek interferencji destruktywnej fali na pojedynczej szczelinie. Jest to jednocześnie wzór na położenie minimów dyfrakcyjnych. Zauważmy, że gdy szerokość szczeliny jest dużo większa od długości fali padającej, $d \gg \lambda$, to wielkość $\sin \theta \rightarrow 0$, a więc zjawisko dyfrakcji nie zachodzi. Z drugiej strony, gdy $d \ll \lambda$, to fala nie ma szansy przejść przez szczelinę (odbije się od niej) i dyfrakcji też nie ma. Potwierdza się w ten sposób warunek dyfrakcji: rozmiar przeszkody musi być rzędu długości fali.

Aby wyznaczyć położenia kolejnych minimów (tzw. minimów dyfrakcyjnych wyższych rzędów), musimy zapisać:

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n - \text{rząd widma}$$

2. Ile razy należy zwiększyć naciąg struny, aby dostroić dźwięk do tonu czystego kamertonu o częstotliwości 440 Hz, jeśli struna daje częstotliwość jedynie 430 Hz?

Chcemy, aby struna po dostrojeniu była w rezonansie z kamertonem, a więc miała częstotliwość $f_2 = f_k = 440$ Hz, zamiast pierwotnej $f_1 = 430$ Hz. Prędkość fali dźwięku w strunie zależy od siły naciągu, natomiast długości fali pozostają takie same, tak więc mamy:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{F_1}{\mu}} = f_1 \lambda \\ v_2 &= \sqrt{\frac{F_2}{\mu}} = f_2 \lambda \end{aligned} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \approx 1,05$$

Jeśli siła ta jest niewielka (np. ~ 20 N, jak w przypadku strun w gitarze klasycznej - por. Przykład 1 w Podrozdziale 7.3.2.), to naciąg należałoby zwiększyć jedynie o ~ 1 N. Tak

precyzyjna regulacja naciągu struny może się okazać trudna. Z tego względu muzycy często korzystają z precyzyjnych stroików do strojenia instrumentów.

3. Pręt miedziany o długości $l = 50$ cm jest zamocowany w środku. Moduł Younga dla miedzi $E = 128$ GPa, a gęstość $\rho = 8920$ kg/m³. Znaleźć liczbę podłużnych drgań własnych pręta w przedziale częstotliwości od 20 do 50 kHz. Ile wynoszą odpowiadające im częstotliwości?

Wiemy, że w drgającym pręcie, zamocowanym jest w środku, wytworzy się fala stojąca. W środku pręta będzie na pewno węzeł, zaś na końcach pręta - strzałki. W takim razie na długość pręta będzie przypadać nieparzysta wielokrotność połówek długości fali (patrz Rysunek 7.1.). Prędkość dźwięku w pręcie obliczymy za pomocą wzoru (1) z Tabeli 7.1., $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3788$ m/s. Dozwolone częstotliwości rezonansowe:

$$l = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{2n + 1} \Rightarrow f_n = (2n + 1)\frac{v}{2l} \approx 3,8 \text{ kHz} \cdot (2n + 1)$$

Możemy stąd obliczyć, że w przedziale 20-50 kHz mieszczą się następujące częstotliwości: $f_3 = 26,6$ kHz, $f_4 = 34,2$ kHz, $f_5 = 41,8$ kHz, $f_6 = 49,4$ kHz. Zatem 4 drgania.

- 4.* Znajdź amplitudę fali powstałej w wyniku superpozycji dwóch fal o tych samych częstotliwościach, ale różnych drogach falowych i różnych amplitudach. Jaki jest warunek interferencji destruktywnej?

(W rozwiązaniu tego zadania użyjemy wiedzy nt. pewnych zagadnień z rachunku liczb zespolonych. Być może Czytelnik powinien odświeżyć sobie nieco tę wiedzę przed analizą rozwiązania).

Mamy dwie fale:

$$y_1(x, t) = A_1 \sin(kx_1 - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = A_2 \sin(kx_2 - \omega t).$$

W wyniku superpozycji fal powstanie fala wypadkowa o równaniu $y_{wyp} = y_1 + y_2$. Problem w rozwiązaniu stanowi fakt, że fale mają różne amplitudy, przez co nie możemy łatwo ich dodać. Z pomocą przychodzi tzw. **metoda wskazów**. Równanie każdej fali możemy potraktować jak wskaz - wektor o danej długości (amplituda fali) i kącie nachylenia względem pewnej osi (faza fali). Faza fali zmienia się w czasie poprzez czynnik ωt , dlatego wskaz czasem nazywa się „wirującym wektorem”. Ma to swoje uzasadnienie w tym, że najogólniejsze równanie fali możemy zapisać w postaci zespolonej (przypomnijmy sobie wzór 7.4.). Liczbę zespoloną $y = Ae^{i\varphi}$ (A - moduł liczby zespolonej, φ - faza liczby zespolonej) można interpretować na płaszczyźnie zespolonej jako wektor (wskaz) $\hat{y} = Ae^{i\varphi}$ o dwóch współrzędnych - części rzeczywistej $\Re\{\hat{y}\} = A \cos \varphi$ oraz urojonej $\Im\{\hat{y}\} = A \sin \varphi$. Nasze równanie fali w postaci sinusa stanowi *imaginalis* wektora $\hat{y}$. Zapiszmy równania fali za pomocą wskazów:

$$\hat{y}_1(x, t) = A_1 e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

$$\hat{y}_2(x, t) = A_2 e^{i(kx_2 - \omega t)}.$$

W metodzie wskazów dodawanie dwóch fali (wektorów) jest proste. Dodajemy dwie liczby zespolone:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{wyp} &= \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = A_1 e^{i(kx_1 - \omega t)} + A_2 e^{i(kx_2 - \omega t)} = (A_1 e^{ikx_1} + A_2 e^{ikx_2}) \cdot e^{i\omega t} = \\ &= [(A_1 \cos(kx_1) + A_2 \cos(kx_2)) + i(A_1 \sin(kx_1) + A_2 \sin(kx_2))] \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Policzmy teraz moduł tej liczby zespolonej. Autor zadania pyta nas o wzór na amplitudę fali wypadkowej. Licząc moduł $|\hat{y}_{wyp}|$ otrzymamy odpowiedź. Przypomnijmy sobie wcześniej, jak obliczać moduł liczby zespolonej $z = a + ib$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ponadto $|e^{i\omega t}| = 1$. Zatem:

$$\begin{aligned} |\hat{y}_{wyp}| &= \sqrt{(\Re\{\hat{y}_{wyp}\})^2 + (\Im\{\hat{y}_{wyp}\})^2} = \\ &= \sqrt{(A_1 \cos(kx_1) + A_2 \cos(kx_2))^2 + (A_1 \sin(kx_1) + A_2 \sin(kx_2))^2} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kx_1) \cos(kx_2) + 2A_1A_2 \sin(kx_1) \sin(kx_2)} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k(x_2 - x_1))} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\Delta x)} = A_{wyp} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór na amplitudę fali wypadkowej. Człon $2A_1A_2 \cos(k\Delta x)$ nazywamy **członem interferencyjnym**. Wzór upraszcza się, jeżeli amplitudy fal składowych są jednakowe, $A_1 = A_2 = A$:

$$A_{wyp} = A \sqrt{2 + 2 \cos(k\Delta x)}$$

Kiedy interferencja jest destruktywna? Zgodnie z definicją wtedy, gdy amplituda wypadkowa osiąga najmniejszą wartość. Ma to miejsce w sytuacji, gdy człon interferencyjny jest najmniejszy możliwy, czyli kosinus osiąga wartość -1 . Stąd warunek:

$$\cos(k\Delta x) = -1 \Rightarrow k\Delta x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left| k = \frac{2\pi}{\lambda} \right| \Rightarrow \Delta x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

5. Do wyznaczenia prędkości dźwięku może posłużyć układ pomiarowy zbudowany z wykorzystaniem tzw. rury Quincego. Z generatora fal dźwiękowych do rury wpada dźwięk, który rozdziela się na dwie części, propaguje różnymi drogami, na końcu interferuje i jest rejestrowany przez mikrofon. Na ekranie oscyloskopu obserwujemy sygnał od fali wypadkowej. Jeżeli przy częstotliwości źródła dźwięku $f = 2000$ Hz obserwuje się dwa sąsiednie minima interferencyjne w odległości $l = 17$ cm, to ile wynosi prędkość dźwięku?

Wykorzystamy warunek interferencji z poprzedniego Przykładu:

$$\Delta x_{II} - \Delta x_I = \left(\left(n + 1 \right) + \frac{1}{2} \right) \lambda - \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda = \lambda.$$

Z treści zadania mamy: $\Delta x_{II} - \Delta x_I = l$. Zatem

$$\lambda = l \Rightarrow v = l \cdot f = 340 \text{ m/s}$$

Zadania

1. Nietoperze do oceny odległości i detekcji innych obiektów używają echolokacji (emitują dźwięki mikrofalowe i rejestrują ich odbicia od obiektów). Powiedzmy, że emitowany przez nietoperza dźwięk ma długość fali 2 mm. Nietoperz leci w kierunku pionowej ściany jaskini z szybkością 25 m/s. Ile sekund ma on na wykonanie manewru, aby nie uderzyć w ścianę, jeśli odbity od ściany dźwięk rejestruje po 15 ms? Jaką częstotliwość własnego dźwięku zarejestruje sam nietoperz?
2. Jaki jest stosunek grubości skrajnych strun gitarowych (czyli e^1 , dającej dźwięk o częstotliwości 330 Hz oraz E - dźwięk 82 Hz), jeśli są naciągnięte tą samą siłą?

3. Prędkość dźwięku w temperaturze 20°C wynosi 340 m/s . Ile wynosi prędkość dźwięku w temperaturze 0° ?
4. Pręt metalowy zamocowany w jednym z końców pobudzamy do drgań. Najniższa częstotliwość dźwięku możliwa do wytworzenia w takim instrumencie wynosi $1,6\text{ kHz}$ w przypadku drgań podłużnych i 1 kHz w przypadku drgań poprzecznych. Ile wynosi współczynnik Poissona dla metalu, z którego wykonano pręt? *Wskazówka.* Współczynnik Poissona μ , moduł sztywności G i moduł Younga E są powiązane tożsamością: $E = 2G \cdot (1 + \mu)$.
5. Amplituda pewnej fali dźwiękowej jest 1000 razy większa niż minimalna amplituda dźwięku, który można jeszcze usłyszeć. Jaki jest poziom natężenia (w decybelach) tej fali dźwiękowej? Jaki musiałby być stosunek mocy źródła, aby w odległości 10 m utrzymać takie samo natężenie dźwięku, co w odległości 10 cm od źródła emisji?
6. W odległości 100 m od punktowego źródła dźwięku poziom natężenia fali wynosi 30 dB . Jaki poziom stwierdzimy w odległości 1 m od tego źródła? Zakładamy, że ośrodek jest jednorodny, a źródło izotropowe.
7. Jakie jest całkowite natężenie fali dźwiękowej wytwarzanej przez strunę drgającą z częstotliwością tonu podstawowego 369 Hz i o amplitudzie 3 mm , jeśli widmo dźwięku zawiera jeszcze 10 wyższych harmonicznych - każda o amplitudzie 5 razy mniejszej od poprzedniej. Przyjmij prędkość dźwięku w powietrzu równą 340 m/s i gęstość powietrza $1,2\text{ kg/m}^3$.

Rozdział 8.

Hydrostatyka i hydrodynamika

8.1. Podstawowe pojęcia

Hydrostatyka jest nauką o cieczy w spoczynku. Nie interesuje nas przepływ cieczy (ciecz w ruchu), ale parametry cieczy spoczywającej (np. ciśnienie na jakiejś głębokości zbiornika), a także ruch ciała w takiej cieczy. Zakładamy, że masa cieczy w zbiorniku znajduje się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego i ew. pod pewnym ciśnieniem zewnętrznym (np. ciśnieniem atmosferycznym). Będziemy zakładać, że nasza ciecz jest nieściśliwa, tzn. pod wpływem sił i ciśnień zewnętrznych jej objętość nie zmniejsza się. Początkowo też będziemy zakładać, że ciecz jest nielepka, tzn. nie wytwarza dodatkowego tarcia między sobą samą, a także na powierzchni styku z ciałem zanurzonym w niej.

Podstawowe parametry opisujące ciecz w danych warunkach to jej masa m , objętość V i gęstość ρ (wszystkie trzy są związane szkolną relacją $\rho = \frac{m}{V}$), a także ciśnienie. **Ciśnienie** jest skalarną wielkością fizyczną zdefiniowaną jako stosunek siły F działającej prostopadle na powierzchnię S :

$$p = \frac{F}{S} \quad (8.1.)$$

Z definicji tej wynika jednostka ciśnienia: paskal ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$). Jednym z podstawowych praw hydrostatyki jest prawo Pascala, podane w XVII w. przez francuskiego matematyka, fizyka i filozofa - Blaise'a Pascala.

Prawo Pascala

Jeżeli na ciecz zamkniętą w zbiorniku działa zewnętrzne ciśnienie, to ciśnienie panujące wewnątrz zbiornika jest wszędzie takie samo i równe ciśnieniu zewnętrznemu.

Najbardziej powszechnym (i na pewno znanym też Czytelnikowi) zastosowaniem prawa Pascala jest **prasa hydrauliczna**. To jedna z tzw. maszyn prostych, których przykłady już poznaliśmy (równa pochyła, bloczek). Schemat prasy znajdziesz na Rysunku 8.1.a. Na szeroki tłok z lewej strony o powierzchni S_1 działamy prostopadle do tłoka siłą F_1 skierowaną w dół. Na tłok o powierzchni S_2 z drugiej strony prasy działa siła F_2 ku górze. Dlaczego? Jaka jest ta siła? To wynika z prawa Pascala. Działając siłą F_1 na tłok lewy, wytwarzamy wewnątrz prasy ciśnienie, które zgodnie z prawem Pascala jest równe w całej objętości cieczy roboczej. Zatem z równowagi ciśnień po lewej i prawej stronie prasy mamy:

$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{lub} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (8.2.)$$

W powyższym wzorze wykorzystaliśmy też definicję ciśnienia. Jeżeli tłok po prawej stronie ma wielokrotnie mniejszą powierzchnię ($S_2 \ll S_1$), to uzyskana siła jest wielokrotnie większa od siły nacisku ($F_2 \gg F_1$).

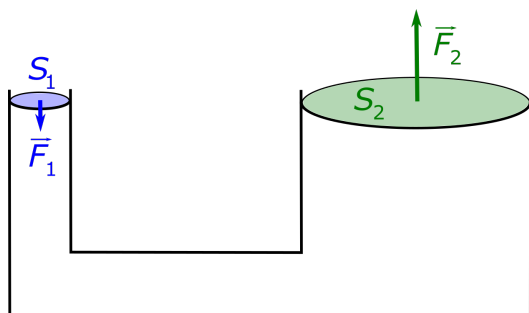
Powyższe sformułowanie prawa Pascala zakłada, że pomijamy wpływ siły grawitacji. W rzeczywistości, gdy zbiornik umieścimy z polu grawitacyjnym, to górne warstwy cieczy działają na dolne warstwy poprzez swoją masę - górne warstwy naciskają na dolne, przez co wytwarzają dodatkowe ciśnienie. To dodatkowe ciśnienie, zwane ciśnieniem hydrostatycznym, wynika wprost z ciężaru górnych warstw cieczy. Ich ciężar na pewnej głębokości h poniżej poziomu powierzchni cieczy w naczyniu wynosi $Q = mg = \rho V g = \rho S h g$. Stosując definicję ciśnienia (8.1.) i dzieląc siłę Q przez powierzchnię S , otrzymujemy wzór na **ciśnienie hydrostatyczne**:

$$p_h = \rho g h \quad (8.3.)$$

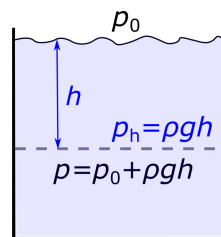
gdzie h jest głębokością interesującej nas warstwy cieczy liczoną od powierzchni. Definicja h jest ważna, nie należy mylić jej z wysokością nad ziemią (np. ciała w rzucie ukośnym).

Jeśli nasz zbiornik jest otwarty od góry i ma dostęp do powietrza pod ciśnieniem atmosferycznym p_0 , to oczywiście na warstwę cieczy o głębokości h działa całkowite ciśnienie:

$$p = p_0 + \rho g h \quad (8.4.)$$



(a) Schemat prasy hydraulicznej.



(b) Ciśnienie hydrostatyczne.

Rysunek 8.1.: Prawo Pascala i ciśnienie hydrostatyczne.

Przykłady

1. Jeżeli wężyk doprowadzający płyn hamulcowy do klocka hamulcowego w samochodzie ma średnicę tylko 5 mm, a klocek hamulcowy ma średnicę 5 cm (załóż, że klocek ma kształt koła), to ile razy większa jest siła działająca na tarczę hamulcową od przyłożonej przez kierowcę do hamulca?

Układ hamulcowy (często mówi się: hydrauliczny) działa na zasadzie prasy hydraulicznej. Pomińmy tu nowoczesne rozwiązania z wykorzystaniem elektronicznego wspomaganie itp. Pedał hamulca jest sprzężony z tłoczkiem w zbiorniczku z płynem hamulcowym, który cienkim wężykiem połączony jest z kołem. Założymy dodatkowo, że znamy siłę, z jaką kierowca działa na płyn wewnątrz wężyka. Oznaczmy indeksem dolnym „1” wężyk, a indeksem „2” klocek hamulcowy. Ze wzoru (8.2.) mamy:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_1 \frac{\pi d_2^2/4}{\pi d_1^2/4} = F_1 \frac{d_2^2}{d_1^2} = F_1 \left(\frac{5}{0,5} \right)^2 = 100 F_1$$

Okazuje się, że siła, jaka dociska klocek do tarczy hamulcowej, ma wartość aż ok. 100 razy większą niż siła, z jaką kierowca naciska na pedał hamulca. Dzięki temu jesteśmy w stanie zatrzymać rozpędzony do prędkości 100 km/h samochód ważący 1,5 tony.

Spróbujmy się zastanowić, czy rzeczywiście można przy pomocy takiego układu hamulcowego zatrzymać samochód. Zapytajmy, jakie opóźnienie kątowne kół i liniowe środka masy samochodu wytwarzamy?

Założenia: $F_1 = 400$ N (w przybliżeniu połowa ciężaru człowieka - kierowca prawie „staje na pedał hamulca”); klocek wytwarza siłę na tarczę punktowo w odległości od osi obrotu koła równej promieniowi tarczy (przyjmijmy promień tarczy hamulcowej $r = 140$ mm); moment bezwładności tarczy-walca $I = \frac{1}{2}mr^2$; współczynnik tarcia między klockiem a tarczą $f = 0,4$; za m przyjmujemy masę, którą chcemy zatrzymać (masa samochodu 1 500 kg). Siła F_2 jest siłą nacisku klocka do tarczy. Zatem siła tarcia między klockiem a tarczą wynosi $T = fF_2$. Hamujący moment siły tarcia wynosi więc $M_T = rT = rfF_2$. Opóźnienie kątowne:

$$I\varepsilon = M_T \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{rfF_2}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2fF_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2}{mr} = 152 \text{ rad/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \varepsilon r = 21 \text{ m/s}^2$$

To jest bardzo duże przyśpieszenie, które pozwalałoby zatrzymać rozpędzony do 100 km/h (28 m/s) w ok. 1,5 s. Wynik jest zbyt optymistyczny, bo nasze podejście jest zbyt idealistyczne. Jednak pokazuje, że dzięki uzyskanemu przełożeniu w układzie hamulcowym jesteśmy w stanie rzeczywiście zahamować rozpędzony samochód przykładając stosunkowo niewielką siłę do pedału hamulca.

2. Oblicz jakie ciśnienie panuje na dnie jeziora o głębokości 10 m. A jakie jest ciśnienie na dnie Rowu Mariańskiego (głębokość ok. 11 km)?

Skorzystamy z definicji ciśnienia hydrostatycznego, przy czym dodamy jeszcze ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 1013$ hPa. Gęstość wody $\rho = 1000$ kg/m³ (zakładamy, że nie zmienia się z ciśnieniem). Na dnie jeziora: $p_h = p_0 + \rho gh = 10^5$ Pa, czyli 1000 hPa, zatem całkowite ciśnienie to 2013 hPa. Na dnie Rowu Mariańskiego: $p_h = \rho gH = 1,1 \cdot 10^8$ Pa, czyli 110 MPa, dodawanie ciśnienia atmosferycznego nie ma już sensu - wynosi ono tylko 0,1013 MPa. Ciśnienie na dnie Rowu Mariańskiego jest ogromne. Jest na tyle duże, że człowiek nie jest w stanie łatwo eksplorować tych głębów - wytrzymałość na ściskanie stali, z której wykonane są łodzie podwodne czy batyskafy, wynosi rzędu kilkuset-tysiąca MPa.

8.2. Prawo Archimedesesa

Ciała zanurzone w cieczy mogą w niej pływać lub tonić się. To zależy od względnych gęstości cieczy i ciała. Np. kulka styropianowa ($\rho_s = 40$ kg/m³) z łatwością pływa w wodzie ($\rho_w = 1000$ kg/m³), ale kulka ołowiana ($\rho_{Pb} = 11340$ kg/m³) idzie szybko na dno. Ciała o gęstości większej niż ciecz - toną. Ciała o gęstości mniejszej niż ciecz - pływają. Na każde ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu, co jest treścią prawa Archimedesesa:

Prawo Archimedesesa

Na ciało zanurzone w cieczy działa pionowa, skierowana ku górze **siła wyporu**. Wartość siły jest równa ciężarowi wypartej cieczy:

$$F_{wyp} = m_{cieczy}g = \rho_{cieczy}gV_{zan.ciała} \quad (8.5.)$$

gdzie: m_{cieczy} - masa cieczy wypartej przez ciało zanurzone,

ρ_{cieczy} - gęstość cieczy,

$V_{zan.ciała}$ - objętość zanurzonej części ciała (jest równa objętości wypartej cieczy).

Należy pamiętać, że we wzorze na siłę wyporu mamy gęstość cieczy, a objętość ciała (jego zanurzonej części). Nawet na leciutką kulkę styropianową, której tylko niewielki fragment jest zanurzony, działa siła wyporu, bo kulka ta swoim ciężarem naciska na ciecz i wypiera jej część ku górze.

Co to znaczy, że ciało pływa w wodzie (na jej powierzchni lub pod nią)? Oznacza to, że ani nie tonie, ani się nie unosi ku górze. Pływające ciało pozostaje w spoczynku. Na każde zanurzone ciało działa oczywiście ciężar (skierowany w dół) oraz siła wyporu (skierowana do góry). Zgodnie z I zasadą dynamiki siły działające na pływające ciało muszą się równoważyć. Mamy więc równowagę:

$$Q = F_{wyp} \Rightarrow m_{ciała}g = \rho_{cieczy}gV_{zan.ciała} \quad (8.6.)$$

gdzie $m_{ciała}$ jest całkowitą masą pływającego ciała (nie tylko masą części zanurzonej). Oczywiście siła ciężkości działa na całą masę ciała. Na podstawie powyższego równania możemy obliczyć np. jaką część pływającego ciała jest zanurzona (o ile cm jest zanurzone?) albo jaką ciało ma gęstość, jeśli np. zanurzone jest w połowie itd.

Przykłady

1. Oblicz ile procent całej objętości kulki styropianowej jest zanurzone w wodzie? Przyjmij rozmiar kulki $r = 5$ mm. Gęstość styropianu to $\rho_s = 20$ kg/m³.

Z równania wynikającego z równowagi sił działających na pływające ciało (8.6.) mamy:

$$m_{kulki}g = \rho_w g V_{zan.kulki} \Rightarrow V_{całk.kulki} \cdot \rho_s = \rho_w \cdot V_{zan.kulki} \Rightarrow \frac{V_{zan.kulki}}{V_{całk.kulki}} = \frac{\rho_s}{\rho_w}$$

czyli tylko $0,02 = 2\%$ całej objętości kulki styropianowej jest zanurzone w wodzie. Jeśli podstawimy za objętość $V_{całk.kulki} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 523,6$ mm³, to objętość zanurzona ma wynosić tylko $V_{zan.kulki} = 10,5$ mm³.

2. Jaką średnicę wewnętrzną ma powłoka sferyczna o zewnętrznej średnicy $D = 60$ cm wykonana z żelaza ($\rho_{Fe} = 7874$ kg/m³), która pływa niemal całkowicie zanurzona w wodzie?

Znowu musimy skorzystać z równania na warunek pływania (8.6.), ale wcześniej obliczmy masę powłoki sferycznej. Oznaczmy wewnętrzną (nieznaną) średnicę przez d .

$$m = \rho_{Fe} \cdot (V_D^3 - V_d^3) = \rho_{Fe} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{D}{2} \right)^3 - \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right)$$

Natomiast objętość części zanurzonej jest równa całkowitej objętości powłoki (powłoka „pływa niemal całkowicie zanurzona”), stąd $V_{zan.ciała} = V_D$. Zatem:

$$\rho_{Fe} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{D}{2} \right)^3 - \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right) = \rho_w \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \Rightarrow d = D \sqrt[3]{\frac{\rho_{Fe} - \rho_w}{\rho_{Fe}}} = 0,96D = 57 \text{ cm}$$

Wewnętrzna średnica to aż 57 cm, czyli grubość ścianki powłoki to tylko 1,5 cm. Przy bardzo dużej gęstości żelaza, aż tak cienka musi być powłoka, aby mogła pływać w wodzie. Można by zapytać: czemu nie uwzględniliśmy, że wewnątrz powłoki jest przecież powietrze, które ma jakąś masę? Oczywiście, moglibyśmy to zrobić - masa powietrza dodatkowo zwiększa nacisk na wodę. Gęstość powietrza to jednak tylko ok. 1/775 gęstości wody, zatem poprawka byłaby bardzo niewielka (zdecydowanie do pominięcia).

3. Sześcienna kostka lodu o krawędzi a pływa częściowo zanurzona w wodzie. Gęstość lodu to 91,7% gęstości wody. (a) Jaka jest głębokość zanurzenia kostki? (b) O ile dodatkowo zanurzy się kostka, jeśli na wierzch położymy kamień o masie m ? (c) Jaka musi być masa kamienia m , aby kostka lodu o krawędzi $a = 10$ cm całkowicie zanurzyła się w wodzie?

(a) Kostka lodu pływa po wodzie, więc zapiszemy:

$$m_l g = \rho_w g V_{zan.lodu} \Rightarrow \rho_l a^3 = \rho_w \cdot a^2 h \Rightarrow h = \frac{\rho_l}{\rho_w} a = 0,917a$$

Prawie cała kostka jest zanurzona. Dokładniej, wysokość zanurzenia sześciennego kostki jest proporcjonalna do stosunku gęstości ciała i cieczy (to jest stwierdzenie ogólne, dotyczy nie tylko lodu i wody, ale też np. drewna i oleju).

(b) Dodatkowe zanurzenie wynika z dodatkowej masy po lewej strony równania:

$$(m_l + m)g = \rho_w g V'_{zan.lodu} \Rightarrow \rho_l a^3 + m = \rho_w a^2 (h + x) \Rightarrow x = \frac{m}{\rho_w a^2} + \frac{\rho_l}{\rho_w} a - h = \frac{m}{\rho_w a^2}$$

(c) Chcemy teraz, aby kostka całkowicie zanurzyła się w wodzie. Wystarczy więc, że położymy: $x = a - h$ do równania powyżej i wyliczymy m :

$$\frac{m}{\rho_w a^2} = a - \frac{\rho_l}{\rho_w} a \Rightarrow m = \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_w}\right) \cdot \rho_w a^3 = 83 \text{ g}$$

Bardzo niewielki kamyczek wystarczy, aby całą kostkę lodu zanurzyć w wodzie. Oczywiście inaczej byłoby, gdybyśmy rozważyli kostkę drewnianą (gęstość drewna sosnowego to tylko 50% gęstości wody) pływającą w wodzie. Taka kostka zanurzyłaby się na głębokość $0,5a$, a masa kamienia musiałaby być 500 g.

8.3. Elementy hydrodynamiki

W tej części zajmujemy się cieczą w ruchu, a także ruchem ciał w cieczy. Nadal zakładamy, że ciecz jest nieściśliwa (tzn. jej gęstość się nie zmienia pod wpływem ciśnienia i sił zewnętrznych). Wyróżniamy zasadniczo dwa rodzaje przepływu cieczy (przez rurę, w rzece, w dużym zbiorniku typu ocean itd.). Jest to przepływ laminarny i przepływ turbulentny. **Przepływ laminarny** (nazywany także stacjonarnym) cechuje się łagodnością i stałością ruchu cieczy i zachodzi przy małych prędkościach przepływu. Ruch cieczy zachodzi w równoległych warstwach bez zakłóceń między nimi. W **przepływie turbulentnym** (nazywanym też wirowym) cząsteczki poruszają się po torach krzywoliniowych, zderzają się i mieszają. W cieczy tworzą się wiry i zaburzenia. Przepływ taki zachodzi przy dużych prędkościach

przepływu. Przejście między przepływem laminarnym a turbulentnym nie jest ostre, ale podaje się kryterium, przy którym zachodzi. Wprowadza się w tym celu bezwymiarową **liczbę Reynoldsa**:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (8.7.)$$

gdzie: ρ - gęstość cieczy, v - prędkość przepływu (uśredniona); l - charakterystyczny wymiar długości, poprzeczny do prędkości (w przypadku przepływu cieczy przez rurę jest to średnica rury, a w ruchu kulki w cieczy - średnica kulki); η - lepkość (parametr cieczy o wymiarze Pa·s). Przyjmuje się, że przepływ cieczy przez rurę staje się turbulentny przy wartości $Re \approx 2000$, a ruch kulki w cieczy zaczyna tworzyć wiry już przy $Re = \text{kilka}$. Oczywiście Re w największym stopniu zależy od prędkości przepływu w danej cieczy.

8.3.1. Prawo ciągłości strugi

Jednym z prostszych praw opisujących ruch cieczy jest prawo ciągłości strugi. Mówi ono, że objętość cieczy wpływającej i odpływającej w ciągu jednej sekundy z dowolnego przekroju rury jest stała. Inne sformułowanie mówi, że masa cieczy przepływającej przez rurę o zmiennym przekroju jest zachowana. Z obu sformułowań wynika **równanie ciągłości strugi**:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{lub} \quad S v = \text{const.} \quad \text{albo} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (8.8.)$$

gdzie: S_1, S_2 - pola powierzchni przekroju rury w dwóch miejscach,

v_1, v_2 - prędkości cieczy w miejscu o przekroju S_1 oraz S_2 , odpowiednio.

Z prawa ciągłości wynika np. fakt, że strumień wody wypływającej z kranu zwęża się ku dołowi. Im niżej, tym szybciej płynie woda w strumieniu, bo jest przyciągana przez Ziemię siłą grawitacji. Skoro zwiększa się prędkość przepływu strumienia, to musi się zmniejszać pole przekroju strumienia. Prawo to jest ważne także przy projektowaniu różnego typu instalacji hydraulicznych - jeśli rury są zbyt wąskie, to przy zadanej wielkości strumienia, który chcemy osiągnąć w instalacji, może się okazać, że prędkości przepływu byłyby zbyt duże, co z kolei może powodować turbulencje w przepływie.

8.3.2. Prawo Bernoulliego

Kolejnym bardzo ważnym prawem opisującym przepływ cieczy jest prawo Bernoulliego. Wynika ono z zasady zachowania energii mechanicznej dla cieczy (a ściślej: gęstości energii na jednostkę masy cieczy). Treść prawa mówi, że całkowite ciśnienie cieczy w trakcie przepływu jest stałe. Zakładamy przy tym, że ciecz jest nieściśliwa, nielepka i przepływ jest laminarny. Treść prawa zapisuje się w postaci równania:

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (8.9.)$$

gdzie: p - całkowite ciśnienie cieczy w danym miejscu;

ρ - gęstość cieczy;

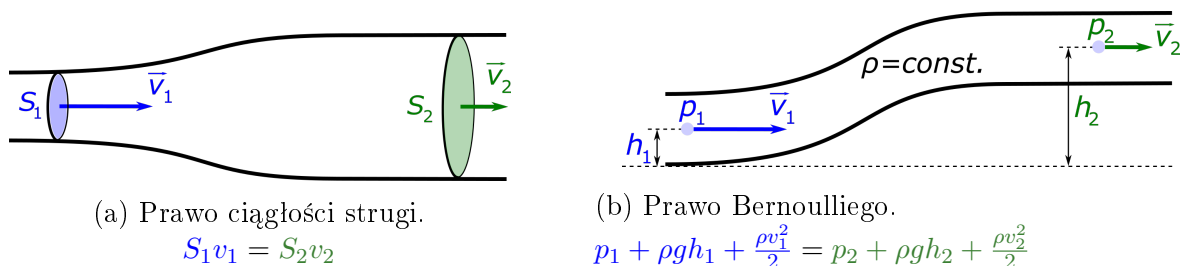
h - wysokość cieczy nad poziomem, względem którego liczymy energię potencjalną;

v - prędkość przepływu w danym miejscu.

Czynnik $\frac{\rho v^2}{2}$ nazywa się często ciśnieniem dynamicznym - jest to energia kinetyczna liczona na jednostkę objętości (sprawdź jednostki!). Ciśnienie p jest całkowitym ciśnieniem zewnętrznym, w szczególności nie rozważamy tu ciśnienia hydrostatycznego ρgh , bo ciecz nie jest statyczna - mamy przepływ. Prawo Bernoulliego jest prawem zachowania - tak jak prawo zachowania pędu czy energii. Stosujemy go więc analogicznie: porównujemy dwa dowolne punkty przepływu, dla których określamy p, h, v i porównujemy ze sobą wyrażenia (8.9.) dla tych dwóch punktów. Niektóre wnioski płynące z równania (8.9.) można zebrać w kilka punktów:

- Gdy ciecz zmienia wysokość nad poziomem odniesienia w przepływie pod stałym ciśnieniem zewnętrznym, to spada jej prędkość przepływu ($h \nearrow, v \searrow$).
- Z prawa ciągłości strugi wynika, że w rurze o mniejszym przekroju ciecz płynie szybciej ($S \searrow, v \nearrow$). Zatem, ciecz płynąc w rurze o zmieniającym się przekroju ma mniejsze ciśnienie na odcinku, gdzie przekrój jest mniejszy ($S \searrow, p \searrow$).
- Ciecz opływająca ciało o nieregularnym kształcie ma mniejsze ciśnienie od strony, gdzie droga przepływu jest dłuższa. Dzięki temu pojawia się siła nośna działająca na skrzydło samolotu.

W ostatnim punkcie zasugerowaliśmy, że prawo Bernoulliego można zastosować też do gazów, nie tylko do cieczy (powietrze opływające skrzydło samolotu). Rzeczywiście tak jest. Co więcej, właściwie wszystkie prawa hydrostatyki i hydrodynamiki można stosować tak dla cieczy, jak i gazów. Ogólnie wprowadza się w fizyce pojęcie „płyn”, które obejmuje ciecze, gazy, a nawet plazmę, emulsje, piany itd. Dział fizyki zajmujący się płynami nazywa się mechaniką płynów.



Rysunek 8.2.: Prawa hydrodynamiki.

8.3.3. Siła oporu

Co to znaczy, że ciecz jest idealna? Przede wszystkim chodzi o to, że nie występuje w niej zjawisko lepkości (mówimy: ciecz jest nielepka). Lepkość jest miarą wewnętrznego tarcia między warstwami cieczy, a także między cieczą a ciałem w niej zanurzonym. Ciecz idealna nie wykazuje lepkości, co oznacza, że ruch dowolnego ciała w niej, a także ruch samej cieczy nie doznaje tarcia. Obrazowo możemy powiedzieć, że gdyby woda była cieczą nielepką, nie moglibyśmy mieszać łyżeczką cukru wsypanego do herbaty. Lepkość cieczy jest cechą każdej cieczy, a także gazów. W warunkach idealnych (np. na potrzeby zadań z fizyki) często lepkość pomijamy. Lepkość jest tym zjawiskiem, które powoduje, że ciecz i gaz stawia opór w postaci siły oporu. Miarą lepkości jest współczynnik lepkości wyrażany w jednostkach Pa·s.

Na ciało poruszające się w ośrodku (gazie, cieczy) działa siła oporu, którą dotychczas

najczęściej pomijaliśmy. Teraz się zajmujemy tym zagadnieniem. Opór hydro- lub aerodynamiczny jest siłą skierowaną przeciwnie do wektora prędkości ciała $\vec{v}$ poruszającego się w cieczy lub gazie. Wartość siły oporu można zdefiniować wzorem:

$$F_{op} = \frac{1}{2} C_x S \rho v^2 \quad (8.10.)$$

gdzie: ρ - gęstość cieczy lub gazu;

C_x - bezwymiarowy współczynnik (zależny od kształtu ciała, liczby Reynoldsa itp.);

S - powierzchnia przekroju poprzecznego ciała;

v - prędkość ciała.

Współczynnik C_x jest w dobrym przybliżeniu stały dla szerokiego zakresu prędkości. Jego wartość w powietrzu jest dla typowych kształtów ułamkiem $\lesssim 1$ (np. sześcian - 1,05; sfera - 0,47; karoserie samochodów $\sim 0,3$; opływowy kształt typu „łezka” - 0,04). Wyznacza się go doświadczalnie. Wzór (8.10.) jest bardzo ogólny i obowiązuje także przy dużych prędkościach. Siła oporu zależy od kwadratu prędkości ciała. Tę jej własność obserwujesz np. podczas szybkiej jazdy samochodem na autostradzie, gdy spalanie jest największe. Ma to przyczynę właśnie w bardzo dużej wartości siły oporu. Mówi się czasem, że przy jeszcze większych prędkościach, siła oporu zaczyna być proporcjonalna do sześciannu prędkości.

Dla niewielkich prędkości ciała w ośrodku siła oporu jest zależna od pierwszej potęgi prędkości. Siła oporu, jakiej doznaje kulka w ruchu w ośrodku lepkiem, jest zdefiniowana przy pomocy **wzoru Stokesa**:

$$\vec{F}_{op} = -6\pi\eta r \vec{v} \quad F_{op} = 6\pi\eta r v \quad (8.11.)$$

gdzie: r - promień kulki,

v - prędkość kulki,

η - współczynnik lepkości cieczy.

Siła oporu Stokesa jest wprost proporcjonalna do prędkości kulki i przeciwnie do niej zwrócona. Opór przeciwdziała ruchowi. Przyjmujemy, że wzór (8.11.) obowiązuje dla niewielkich liczb Reynoldsa ($\lesssim 5$). Czynniki $6\pi r$ wynika z geometrii kulki.

Przykłady

1. Prędkość wody wypływającej z kranu nad wanną wynosi 1 m/s. Średnica rurki w kranie wynosi 2 cm. Z jaką prędkością strumień wody uderza w dno wanny, 75 cm poniżej? Jaką średnicę ma strumień wody tuż przed uderzeniem o dno?

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie skorzystamy po prostu z kinematyki. Każdą kroplę wody wypływającą z kranu możemy potraktować jak ciało w rzucie pionowym w dół, zatem jej ruch jest jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem g i prędkością początkową $v_0 = 1$ m/s. Jaką prędkość ma kropla po pokonaniu drogi $s = 0,75$ m w tym ruchu?

$$\begin{cases} v_k = v_0 + gt_r \\ s = v_0 t_r + \frac{1}{2} g t_r^2 \end{cases} \Rightarrow v_k^2 = v_0^2 + 2gs \Rightarrow v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gs} = 4 \text{ m/s}$$

Zatem na odcinku od wylotu kranu do dna wanny woda zwiększyła szybkość przepływu 4-krotnie. Teraz zastosujemy równanie ciągłości strugi (8.8.) do obliczenia średnicy

strumienia wody na dole. Oczywiście, skoro prędkość strugi wzrosła, to pole powierzchni przekroju strugi musiało zmaleć. Pole przekroju kołowego łatwo powiążemy ze średnicą $S = \pi d^2/4$.

$$S_0 v_0 = S_k v_k \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{S_0 v_0}{v_k} \quad \Rightarrow \quad d_k = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{v_k}} = \frac{1}{2} d_0 = 1 \text{ cm}$$

2. Zbiornik napełniono wodą do wysokości H , a w jednej z jego ścianek wywiercono otwór na głębokości y pod powierzchnią wody. Oblicz odległość x w poziomie, w jakiej spada na ziemię strumień wody. Dla jakiej głębokości y zasięg strumienia x będzie maksymalny?

To jest typowe zadanie na zastosowanie prawa Bernoulliego. Wybierzmy jako jeden z punktów przepływu punkt na powierzchni, dla niego $v = 0$, $p = p_0$ oraz $h = H$. Drugi punkt to będzie punkt, w którym ciecz wypływa ze zbiornika, dla niego $v = ?$, $p = p_0$ oraz $h = H - y$. Ważne, aby pamiętać czym jest „ h ” we wzorze na ciśnienie hydrostatyczne (głębokość pod powierzchnią wody, u nas $= y$), a czym jest „ h ” w prawie Bernoulliego (wysokość nad poziomem zerowym energii potencjalnej, który u nas przyjmujemy na dnie zbiornika, więc $h = H - y$). Możemy więc zapisać prawo Bernoulliego:

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \rho g (H - y) + \frac{\rho v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gH}$$

Ciecz wypływa z otworu w bocznej ścianie zbiornika poziomo. Zasięg w rzucie poziomym obliczyliśmy w Rozdziale 2.3.4.. Wysokość początkowa w rzucie to $H - y$, zatem poszukiwany zasięg to

$$x = v \sqrt{\frac{H - y}{g}} = 2\sqrt{y(H - y)}$$

Zasięg będzie maksymalny, gdy

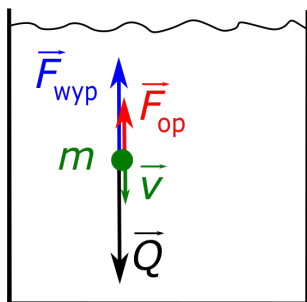
$$x'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad [y(H - y)]' = 0 \quad \Rightarrow \quad H - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}H$$

3. Kulka o masie $m = 0,2 \text{ g}$ i promieniu $r = 2 \text{ mm}$ porusza się w cieczy o gęstości $\rho = 1250 \text{ kg/m}^3$ i współczynniku lepkości $\eta = 500 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. (a) Narysuj wszystkie siły działające na kulkę. (b) Znajdź siłę wypadkową i równanie dynamiki kulki. (c) Oblicz prędkość graniczną (stałą prędkość, z którą po pewnym czasie tonie kulka).

(a) Na kulkę działają trzy siły: Siła ciężkości $Q = mg$, siła wyporu $F_{wyp} = \rho g V$ oraz siła oporu Stokesa $F_{op} = 6\pi\eta r v$, zależna od prędkości kulki. Siła ciężkości jest skierowana w dół, natomiast siła wyporu zawsze do góry, a siła oporu przeciwnie do wektora prędkości. Skoro kulka tonie (tak zakładamy, niech gęstość materiału, z którego jest wykonana, będzie większa od gęstości wody), to siła Stokesa skierowana jest też do góry. Wszystkie siły zaznaczono na Rysunku 8.3..

(b) Objętość kulki (potrzebna we wzorze na siłę wyporu) wynosi $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Siła wypadkowa jest wektorową sumą wszystkich sił:

$$\vec{F}_w = \vec{Q} + \vec{F}_{wyp} + \vec{F}_{op} \quad \Rightarrow \quad F_w = Q - F_{wyp} - F_{op} \quad \Rightarrow \quad ma = mg - \rho g V - 6\pi\eta r v$$



Rysunek 8.3.: Siły działające na kulkę poruszającą się w cieczy lepkiej.

Założyliśmy tutaj kierunek siły wypadkowej w dół, zgodnie z kierunkiem siły ciężkości. Siła ciężkości i siła wyporu ma zawsze wartość stałą w trakcie ruchu kulki. Jeżeli gęstość kulki jest większa niż gęstość cieczy, to kulka tonie i to tonie coraz szybciej. Ciężar jest większy od siły wyporu, więc pojawia się zwrócona w dół siła wypadkowa i, w konsekwencji, przyspieszenie. Skoro kulka ma przyspieszenie, to jej prędkość rośnie, a więc i siła oporu Stokesa rośnie z czasem. Zatem założenie kierunku w dół siły wypadkowej jest uzasadnione.

(c) Siła Stokesa rośnie w trakcie ruchu kulki. W pewnym momencie jej wartość jest na tyle duża, że równoważy ona wypadkową dwóch pozostałych sił i przyspieszenie kulki spada do zera. To jest klucz, aby na podstawie równania powyżej obliczyć tzw. prędkość graniczną, czyli taką prędkość, która ustala się po pewnym czasie, gdy siła Stokesa jest już odpowiednio duża.

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - \rho gV - 6\pi\eta r v_{gr} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{gr} = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi\eta r}$$

Jeśli podstawimy dane, to otrzymamy wartość prędkości granicznej $v_{gr} = 0,08$ m/s, czyli 8 cm/s. Jest to wynik raczej zgodny z naszymi oczekiwaniami. Trzeba jeszcze skomentować, że parametry cieczy podane w treści zadania odpowiadają glicerynie z ok. 5% zawartością wody w temp. 20°, a kulka jest metalowa.

Zadania

1. Jakie ciśnienie całkowite panuje na dnie jeziora? Głębokość jeziora to 100 m. Jaka siła działa na ścianki sześcienniej kostki o krawędzi 10 cm?
2. Przy pomocy prasy hydraulicznej chcemy zgnieść puszkę po coca-coli. Potrzeba do tego siły 2 kN. Jako siły nacisku z drugiego końca chcemy użyć odważnika 1-kilogramowego. Jaki musi być stosunek przekrojów tłoków po obu stronach prasy?
3. Kłosek o kształcie walca pływa w wodzie zanurzony do 2/3 wysokości (walec pływa idealnie pionowo w wodzie). Jaka jest gęstość materiału, z którego wykonano walec? Jaki to może być materiał (drewno, metal - aluminium czy stal, ołów)?
4. Kulkę o średnicy 5 cm wykonaną z drewna sosnowego ($\rho = 500$ kg/m³) zanurzono na dnie akwariium o głębokości 50 cm wypełnionego wodą i puszczono. Z jaką prędkością i na jaką wysokość kulka „wyskoczy” z wody? Pomiń lepkość wody.

5. Ciśnienie wody w instalacji wodociągowej wynosi 0,5 MPa. Średnica rur to 1 cal. Z jaką prędkością wypływa woda przez nieszczelność w instalacji w postaci otworu o średnicy 2 mm?
6. Rurka Pitota oraz rurka Prandtla to proste urządzenia służące do pomiaru prędkości przepływu (np. wody w rzece lub powietrza opływającego samolot w locie). Działanie rurek tłumaczy prawo Bernoulliego. Jakie ciśnienie całkowite wytwarzane jest w otwartym końcu rurki Pitota zamontowanej w samolocie, jeśli ciśnienie atmosferyczne na wysokości 10 000 m wynosi 260 hPa, gęstość powietrza wynosi $0,4 \text{ kg/m}^3$, a samolot leci z prędkością 960 km/h? Wcześniej z prawa Bernoulliego wyprowadź wzór na prędkość rejestrowaną przez rurkę Pitota jako funkcję różnicy ciśnień i gęstości powietrza.
7. Skrzydło samolotowe ma taki profil, że powietrze opływa jego dolną powierzchnię z szybkością 30 m/s, a górną powierzchnię 5-razy szybciej. Oblicz różnicę ciśnień panujących po obu stronach skrzydła. Oszacuj siłę nośną (różnicę sił wynikających z ciśnienia wywieranego na skrzydło z obu stron), jeśli powierzchnia dolna skrzydła to 20 m^2 , a powierzchnia górna to 22 m^2 .
8. Oblicz lepkość wody, jeśli wiemy, że aluminiowa kulka ($\rho = 2720 \text{ kg/m}^3$) o średnicy 2 mm po osiągnięciu prędkości granicznej opada przez 0,4 sekundy na odcinku 1,5 m. Porównaj otrzymany wynik z wartością tablicową. *Odp.* $\sim 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$.
9. Szklana rurka o kształcie litery U i średnicy przekroju 1 cm jest wypełniona olejem ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$). Z jednej strony ktoś delikatnym podmuchem obniżył poziom cieczy o 2 cm. Wykaż, że ruch oleju w U-rurce jest harmoniczny. Z jakim okresem drga olej?

Rozdział 9.

Termodynamika

9.1. Temperatura i ciepło. Podstawowe pojęcia

Termodynamika zajmuje się przemianami energii (wewnętrznej, termicznej) w różnych procesach fizycznych i chemicznych, dotyczących tak gazów, jak i cieczy, czy ciał stałych. Przykładowo, w procesie krystalizacji (np. zamarzania wody) zasadniczo rośnie stopień uporządkowania atomów (tworzą sieć krystaliczną), bo maleje przyczynek entropii do całkowitej energii, a dominująca energia wewnętrzna minimalizuje się właśnie w fazie krystalicznej o najwyższym porządku. Podstawowymi prawami termodynamiki są zasady termodynamiki (najważniejsze dwie z nich poznamy w tym rozdziale). Na początku rozdziału poznamy podstawowe pojęcia, jakimi operuje termodynamika. Na końcu rozdziału krótko wspomnimy także elementy teorii kinetycznej gazów.

Temperatura (T) jest podstawowym parametrem stanu układu fizycznego. Można ją zdefiniować różnie, zależnie od kontekstu. W termodynamice powiemy, że temperatura jest miarą właściwości termicznej (stanu cieplnego) ciała lub układu. Dwa ciała lub układy (np. cząsteczek gazu) o równych temperaturach nie przekazują sobie nawzajem ciepła. W teorii kinetycznej powiemy, że temperatura jest miarą energii kinetycznej układu cząsteczek gazu. Temperaturę wyrażamy w:

- stopniach Celsjusza t [$^{\circ}\text{C}$]: 0 w tej skali oznacza temperaturę zamarzania wody, a 100 - temperaturę wrzenia wody.
- stopniach Fahrenheita t_F [$^{\circ}\text{F}$]: skala używana głównie w USA, my nie będziemy jej używać. 0 w tej skali oznacza temperaturę zamarzania solanki (mieszaniny wody i soli). Przelicznik na stopnie Celsjusza: t_F [$^{\circ}\text{F}$] = $\frac{9}{5}t$ [$^{\circ}\text{C}$] + 32.
- kelwinach T [K]: jest to miara tzw. temperatury bezwzględnej, której 0 oznacza najniższą możliwą temperaturę materii we Wszechświecie. Kelwiny łatwo przeliczyć na stopnie Celsjusza: t [$^{\circ}\text{C}$] = T [K] + 273,15 (często w zaokrągleniu przyjmujemy 273). Przelicznik obu skal temperatur jest funkcją liniową, dlatego przyrost temperatury o 1°C jest równoważny przyrostowi o 1 K. Mówimy „kelwin”, a nie „stopień Kelwina”!

Uwaga. W termodynamice wyrażamy temperaturę w kelwinach (w szczególności w równaniu stanu gazu). Gdy mamy do czynienia ze zmianą temperatury (przyrostem lub spadkiem), to wymiennie możemy korzystać z obu jednostek (stopni Celsjusza i kelwinów), ale sama temperatura jest zawsze wyrażona w kelwinach ($\Delta T = \Delta t$, ale $T \neq t$).

Ciśnienie (p) jest następnym podstawowym parametrem stanu układu. Jego definicję już poznaliśmy w Rozdziale 8.

Objętość (V) jest trzecim podstawowym parametrem stanu. Oczywiście jest to miara przestrzeni, jaką ciało lub układ zajmuje w określonych warunkach. O ile dla ciał stałych, a nawet cieczy jest to dość oczywista wielkość, bo jest raczej stała (zmienia się co najwyżej w niewielkim zakresie), to w przypadku gazów ma duże znaczenie, bo silnie zmienia się w zależności od warunków ciśnienia i temperatury. Jednostką objętości jest $[m^3]$ lub odpowiednia (pod)wielokrotność.

Energia wewnętrzna (U) jest całkowitą energią zgromadzoną wewnątrz ciała lub układu cząsteczek. Jest to więc suma energii kinetycznych i potencjalnych ciała lub całego układu (makroskopowo, np. lecącej kulki śniegu), ale też wszystkich indywidualnych cząsteczek i oddziaływań między nimi (mikroskopowo: energie kinetyczne cząsteczek wody, wiązań chemicznych molekuł itd.). Mówimy, że energia wewnętrzna jest termodynamiczną funkcją stanu, tzn. zależy jedynie od parametrów stanu (p, V, T) na początku i na końcu jakiegoś procesu, a nie zależy od stanów pośrednich. (Zauważmy pewną analogię do sił zachowawczych.) W przypadku gazu doskonałego (definicja niżej) energia wewnętrzna zależy jedynie od temperatury gazu:

$$\Delta U = nC_V\Delta T \quad \text{lub} \quad dU = nC_VdT \quad (9.1.)$$

gdzie n jest liczbą moli gazu, a C_V ciepłem molowym przy stałej objętości (definicja niżej).

Ciepło (Q) jest miarą tego, ile energii (wewnętrznej) jest przekazywane w procesie cieplnym, ma więc jednostkę energii. Mówimy, że ciepło jest jednym ze sposobów przekazywania energii wewnętrznej. Przekazowi ciepła nie zawsze towarzyszy wzrost lub spadek temperatury, jakby się mogło wydawać (przemiana izotermiczna!). Ciepło nie jest funkcją stanu.

Ciepło przemiany (L) to ciepło potrzebne do tego, aby zaszła przemiana fazowa (taka jak topnienie, parowanie itd.) określonej masy substancji. Przemiana fazowa zachodzi w określonej temperaturze, typowej dla danej substancji, w danych warunkach ciśnienia (np. woda wrze w niższej temperaturze w Himalajach, niż na plaży w Darłowie, bo ciśnienie tam jest o wiele niższe), zatem ciepło Q dostarczone lub oddane w trakcie przemiany nie zależy od temperatury. Z każdą przemianą utożsamiamy z kolei charakterystyczne ciepło przemiany $L \left[\frac{J}{kg} \right]$, np. ciepło zamarzania wody (równe ciepłu topnienia lodu) jest równe $333,7 \text{ kJ/kg}$. Ciepło Q wymienione w trakcie przemiany fazowej masy m wyraża się wzorem:

$$Q = mL \quad (9.2.)$$

Praca termodynamiczna (W) jest kolejnym sposobem przekazu energii wewnętrznej. My będziemy zawsze rozumieć pracę termodynamiczną jako pracę objętościową, czyli związaną ze zmianą objętości przy danym ciśnieniu. Przykładowo, rozszerzający się gaz wykonuje pracę dodatnią (gaz „sam się rozpręża”), dlatego wzór na pracę wykonaną przez gaz jest następujący:

$$\text{praca gazu} \quad W_g = p\Delta V \quad \text{lub} \quad dW_g = p dV \quad (9.3.)$$

Przy rozprężaniu objętość rośnie, więc $\Delta V > 0$, czyli $W_g > 0$. Praca wykonana nad gazem (przez siłę zewnętrzną) jest przeciwna do pracy gazu: $W = -W_g$:

$$\text{praca nad gazem} \quad W = -p\Delta V \quad \text{lub} \quad dW = -p dV \quad (9.4.)$$

Zauważ, że w powyższych wzorach ciśnienie nie musi być stałe, żeby policzyć pracę w jakiejś przemianie będziemy musieli czasem całkować. Zgodnie z definicją, pracę możemy zawsze policzyć jako pole pod krzywą $p(V)$ na diagramie (p, V) .

Gaz doskonały jest modelem fizycznym, który zakłada, że cząsteczki gazu nie oddziałują ze sobą inaczej, jak tylko poprzez zderzenia sprężyste. Nie występują między cząsteczkami np. przyciąganie/odpychanie kulombowskie, czy cząsteczkowe (np. van der Waalsa), następuje jedynie przekaz energii kinetycznej i pędu, jak w zderzeniach sprężystych sztywnych kulek. Cząsteczki gazu mogą przy tym jednak być wieloatomowe. W zadaniach w tym skrypcie zawsze będziemy stosować przybliżenie gazu doskonałego.

Stopnie swobody gazu określają jaką swobodę ruchów ma dana cząsteczka. Możemy mieć do czynienia z ruchem posuwistym (translacje) w 3 kierunkach przestrzeni, drganiem (rotacje) względem prostopadłych osi, a także drganiem wewnętrznymi cząstek (oscylacje, np. w dwuatomowej cząsteczce azotu, atomy mogą drgać w zgodnej lub przeciwnej fazie - do siebie i od siebie, albo zgodnie). Te ostatnie stopnie swobody będziemy pomijać, bo ich wpływ w temperaturze pokojowej na energię gazu jest najmniejszy (pomijalny). Liczba stopni swobody (f) zależy od rodzaju cząsteczek, i tak mamy (w trzech wymiarach):

- cząsteczka 1-atomowa: $f = 3$, bo występują 3 translacje.
- cząsteczka 2-atomowa: $f = 5$, bo oprócz 3 translacji występują 2 rotacje.
- cząsteczka 3- i więcej-atomowa: $f = 6$, bo dochodzi dodatkowa 1 rotacja.

Ciepło właściwe (c_w) i molowe (C). Ciepło właściwe jest stałą materiałową, charakteryzującą zdolność substancji do gromadzenia (i oddawania) ciepła. Jest to ilość ciepła potrzebna, aby jednostkę masy ciała podgrzać o jednostkę temperatury. Jednostką ciepła właściwego jest $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$ lub $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}\right]$. Szczególnie ważne jest ciepło właściwe wody, wynosi ono ok. 4190 J/kg·K. Przy pomocy tej wielkości definiuje się jednostkę energii - kaloria (cal). Energia równa 1 cal jest równoważna ciepłu, potrzebnemu do podgrzania 1 g wody o 1°C, czyli 1 cal = 4,19 J.

Ciepło molowe określa, ile ciepła należy dostarczyć, aby o 1 K (lub 1°C) ogrzać 1 mol substancji. Jednostka jest więc analogiczna. Dla gazu doskonałego ciepło molowe zależy od rodzaju przemiany. Wprowadzamy pojęcia: ciepła molowego przy stałej objętości (C_V) i przy stałym ciśnieniu (C_p). Ciepło molowe przy stałej objętości zależy jedynie od liczby stopni swobody gazu:

$$C_V = \frac{f}{2}R \quad (9.5.)$$

gdzie $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ - stała gazowa. Ciepło przy stałym ciśnieniu C_p jest związane z C_V :

$$C_p - C_V = R \quad (9.6.)$$

W oparciu o dwa powyższe wzory łatwo znajdziemy ciepła molowe wszystkich gazów. Pamiętajmy, że powyższe wzory dotyczą jedynie gazu doskonałego. Zgodnie z definicją ciepła molowego możemy zapisać:

$$C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \quad \Rightarrow \quad dQ = nC dT \quad (9.7.)$$

gdzie n jest liczbą moli gazu. Szczególnie ten drugi wzór będzie dla nas przydatny przy stosowaniu I zasady termodynamiki w różnych przemianach gazowych. Oczywiście w przypadku przemiany przy stałym V (lub p) napiszemy C_V (lub C_p) we wzorze. Analogicznie możemy

zapisać wzór na ciepło dostarczone do masy m ciała o cieple właściwym c_w , powodujące wzrost temperatury o ΔT :

$$Q = mc_w \Delta T \quad (9.8.)$$

Warunki normalne w fizyce i chemii oznaczają (choć mogą się różnić, w zależności od podręcznika i „umowy”): $t = 0^\circ\text{C}$ ($T = 273,15\text{ K}$, często zaokrąglamy do 273 K), $p = 1013,25\text{ hPa}$. Spotykamy się także z pojęciem temperatury pokojowej, mamy wtedy na myśli najczęściej $t = 25^\circ\text{C}$ ($T = 298\text{ K}$).

Przykłady

1. Wyprowadź wzór wiążący ciepło właściwe i ciepło molowe.

Ponieważ c_w jest liczone na jednostkę masy, a C na mol, to oba ciepła są powiązane za pomocą wielkości fizycznej, wiążącej masę i liczbę moli. Innymi słowy: jaka wielkość fizyczna ma jednostkę masy na mol? Jest to masa molowa $\mu \left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$. W cieple molowym jednostka „mol” występuje w mianowniku, a więc musimy C podzielić przez μ , aby dostać c_w . Poprawny związek ciepła jest więc następujący: $c_w = \frac{C}{\mu}$ (uwaga na poprawną jednostkę masy: $\text{kg} \leftrightarrow \text{g}$).

2. Oblicz ciepło molowe przy stałej objętości azotu i przy stałym ciśnieniu argonu.

Azot jest gazem o 2-atomowej cząsteczce, N_2 . Ma więc $f = 5$ stopni swobody. W takim razie, zgodnie ze wzorem (9.5.), $C_V^{\text{N}_2} = \frac{5}{2}R$. Argon jest gazem szlachetnym, który zawsze jest jednoatomowy, Ar. Zatem dla argonu $f = 3$ oraz $C_p^{\text{Ar}} = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$. Jak będzie dla dwutlenku węgla, CO_2 ?

3. Wróćmy do rozwiązania Przykładu 2 z Rozdziału 4.1.. Załóżmy, że nóżki szafy są wykonane z mosiądzu, dla którego ciepło właściwe wynosi $377\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, a ich masa to 200 g , każda. O ile wzrosła temperatura nóżek szafy po przesunięciu jej na odległość 2 m , jeśli przyjmujemy, że 75% strat energii poszło na ciepło?

Siła tarcia wykonała pracę w wysokości -300 J . Zakładamy, że tylko $3/4$ ($\eta = 75\%$) tej straty energii poszła na zmianę energii wewnętrznej (możemy też powiedzieć: na wzrost energii termicznej ciała), a więc została przekazana w postaci ciepła, czyli $Q = 0,75|W_T|$. Reszta to np. straty na odkształcenie (wykrzywienie) nóżek lub podłogi (porysowanie). Skorzystamy ze wzoru na ciepło (9.8.), mamy wszystkie dane. Całkowita masa mosiężnych nóżek to $m = 800\text{ g} = 0,8\text{ kg}$ (szafa ma raczej 4 nóżki), ciepło właściwe mosiądzu $c_w = 377\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, a $Q = 225\text{ J}$. Po przekształceniu mamy:

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_w} \approx 0,75\text{ K} = 0,75^\circ\text{C}$$

Dość niewiele. Jak podgrzać nóżki szafy o 3°C ? Najprościej chyba przesunąć szafę na odległość 4-razy większą ($Q = \frac{\eta f g s}{c_w}$). W tym wzorze widać też, że przyrost temperatury nie zależy od masy nóżek, bo i ciepło Q , i praca tarcia W_T od masy zależą (w efekcie m się redukuje).

9.1.1. Rozszerzalność cieplna

Pod wpływem zmiany temperatury, większość ciał zmienia swoje rozmiary. Najczęściej ze wzrostem temperatury rosną wymiary ciał. Mówimy więc o rozszerzalności cieplnej (termicznej) ciał. Dodatkowo, jeśli zmiany temperatur nie są bardzo duże, rozszerzalność cieplna ma charakter liniowy (długość rośnie wprost proporcjonalnie do różnicy temperatur). Możemy to ująć w postaci wzoru:

$$\text{Rozszerzalność liniowa: } l = l_0(1 + \alpha\Delta T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0)) \quad (9.9.)$$

gdzie: l_0 - początkowa długość ciała w temperaturze T_0 ; l - długość ciała w temperaturze T ; α stały współczynnik rozszerzalności liniowej (stała materiałowa o jednostce $1/K$). Współczynnik α dla typowych substancji jest bardzo mały, np. dla żelaza wynosi $\alpha_{Fe} = 1,1 \cdot 10^{-5} 1/K$, podobnego rzędu jest dla innych metali. Efekt rozszerzalności liniowej jest więc bardzo niewielki. Przykładowo żelazny pręt o długości 1 m zmierzonej w temp. $0^\circ C$, będzie miał długość 1,00028 m w temperaturze pokojowej (wydłuży się o 0,28 mm). Na pozór efekt jest do pominięcia. Jednak żelazna szyna tramwajowa o długości 18 m w temperaturze $0^\circ C$ w upalny dzień (szyna może się wtedy łatwo rozgrzać do $50^\circ C$) wydłuży się o prawie 1 cm. Dla dłuższych szyn wydłużenie jest oczywiście większe. Jeżeli dystans między dwiema sąsiednimi szynami jest zbyt mały, dochodzi np. do wybrzuszeń, co jest częstym problemem np. krakowskiej komunikacji miejskiej.

Obiekty płaskie lub przestrzenne doznają rozszerzalności powierzchniowej lub objętościowej. Zakładamy, że obiekty rozszerzają się izotropowo - tzn. tak samo w każdym kierunku. Dlatego możemy łatwo zdefiniować efekt rozszerzalności ciał płaskich i objętościowych.

Rozszerzalność

$$\begin{aligned} \text{- powierzchniowa: } S &= S_0(1 + \alpha\Delta T)^2 \approx S_0(1 + 2\alpha\Delta T) = S_0(1 + \beta\Delta T) \\ \text{- objętościowa: } V &= V_0(1 + \alpha\Delta T)^3 \approx V_0(1 + 3\alpha\Delta T) = V_0(1 + \gamma\Delta T) \end{aligned} \quad (9.10.)$$

W powyższych wzorach przyjęliśmy uproszczenie słuszne dla małych wartości α . Jak pamiętamy rzeczywiście $\alpha \approx 10^{-6}$. Stąd wyższe niż pierwsza potęgi α mogliśmy pominąć. Ciekawym wynikiem tego przybliżenia jest fakt, że współczynniki rozszerzalności powierzchniowej i objętościowej możemy łatwo znaleźć, gdy znamy współczynnik α : $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$.

Przykłady

1. Jak bardzo skurczy się sześcienna kostka wykonana z ołowiu po schłodzeniu z temperatury pokojowej do temperatury ciekłego azotu ($-196^\circ C$), jeśli długość boku kostki wynosiła pierwotnie 1 cm? Współczynnik rozszerzalności liniowej ołowiu wynosi $\alpha_{Pb} = 3 \cdot 10^{-11} 1/K$.

Bok kostki po schłodzeniu ma długość $a = 0,9934 a_0 = 0,9934$ cm. Zatem objętość wynosi $V = a^3 = 0,98 a_0^3 = 0,98 V_0 = 0,98$ cm³. Kostka skurczy się zatem o ok. 2%. Ten sam wynik powinniśmy otrzymać korzystając ze wzoru (9.10.). Sprawdźmy. $V = a_0^3(1 + 3\alpha_{Pb}) = 0,98 V_0 = 0,98$ cm³. Potwierdziliśmy tym samym, że przybliżenie we wzorze (9.10.) działa.

9.2. I zasada termodynamiki

Jest to zasada termodynamiki, która wyraża jakby zasadę zachowania energii. Jej treść mówi, że zmiana energii wewnętrznej ciała lub układu (np. gazu) zachodzi poprzez przekaz ciepła lub wykonanie nad ciałem lub układem pracy.

$$\Delta U = Q + W = Q - p\Delta V \quad \text{lub} \quad dU = dQ + dW = dQ - pdV \quad (9.11.)$$

Zwróćmy uwagę szczególnie na „−” we wzorach. Zapisaliśmy I zasadę zarówno w postaci makroskopowej (z deltami), jak i różniczkowej. Obie nam się przydadzą w zadaniach. Dlaczego nie zapisujemy ΔQ i ΔW ? Ciepło i praca nie są funkcjami stanu (nie da się podać ciepła jako funkcji p_1, V_1, T_1 w stanie 1). Nie ma sensu zapytać o ciepło gazu w stanie w warunkach normalnych. Ciepło i praca same w sobie są „zmianą” (energii). Dlatego piszemy Q i W , zamiast ΔQ i ΔW . I zasada termodynamiki obowiązuje dla gazów, cieczy i ciał stałych.

Przykłady

1. Jeżeli do gazu dostarczono ciepło w wysokości 500 J, a jego energia wewnętrzna wzrosła o 300 J, to czy gaz został sprężony, czy się rozprężył? Jaką pracę wykonał gaz?
Zgodnie z I zasadą termodynamiki, zapiszemy: $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = \Delta U - Q$. Wiemy, że $Q = 500$ J oraz $\Delta U = 300$ J. Po podstawieniu danych mamy: $W = -200$ J. Ponieważ $W = -p\Delta V < 0$, to $\Delta V > 0$, czyli $V_2 > V_1$, a więc gaz uległ rozprężeniu. Praca W to praca nad gazem, praca gazu wynosi więc $W_g = -W = 200$ J i jest dodatnia.
2. O ile wzrosła temperatura 20 moli azotu, który przy stałym ciśnieniu 1000 hPa ściśnięto od objętości 1,5 m³ do objętości 0,5 m³? Oblicz przy użyciu I zasady termodynamiki. Jak się okaże, nie ma znaczenia to, że sprężanym gazem jest azot. Natomiast, znamy C_V azotu z przykładu w poprzednim podrozdziale. Zapiszmy I zasadę termodynamiki dla przemiany z zadania:

$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - p\Delta V$$

Mogliśmy zapisać $Q = nC_p\Delta T$, bo przemiana zachodzi przy stałym ciśnieniu. Z kolei $\Delta U = nC_V\Delta T$ zawsze w przypadku gazu doskonałego. Z treści zadania wiemy, że $\Delta V = V_2 - V_1 = -1$ m³ ($\Delta V < 0$, bo gaz jest sprężany). Po przekształceniu mamy

$$\Delta T = \frac{-p\Delta V}{n(C_p - C_V)} = \frac{-p\Delta V}{nR} = 601,7 \text{ K}$$

3. Pewna liczba moli helu rozpręża się przy stałym ciśnieniu p , zwiększając trzykrotnie swoją objętość. Jaka była pierwotna objętość helu, jeśli w wyniku procesu gaz pobrał ciepło Q ?
Zapiszemy oczywiście I zasadę termodynamiki, przy czym $\Delta V = 2V_1$, bo gaz trzykrotnie zwiększył swoją objętość. V_1 jest początkową objętością, której szukamy. Nie znamy ΔT , ale mamy Q , więc $\Delta T = \frac{Q}{nC_p}$ (proces przy stałym p). Podstawiamy:

$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - 2pV_1 \Rightarrow V_1 = \frac{n(C_p - C_V)}{2p}\Delta T = \frac{Q}{2p} \left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right)$$

Zauważmy, że zgodnie z (9.6.) zawsze mamy $C_V < C_p$, zatem $V_1 > 0$, co jest pożądanym wynikiem. Liczba moli helu nie była potrzebna.

4. Oblicz zmianę energii wewnętrznej 100 g wody o początkowej temperaturze 20 °C, którą doprowadzamy do wrzenia, a następnie w całości odparowujemy. Cały proces zachodzi bez zmiany ciśnienia przy ciśnieniu normalnym.

I zasada mówi, że energia wewnętrzna układu rośnie kosztem dostarczonego ciepła i wykonanej pracy. Aby ogrzać wodę, a następnie ją odparować, musimy dostarczyć ciepła w wysokości ciepła potrzebnego do zwiększenia temperatury od 20 do 100 °C oraz ciepła przemiany wody w parę wodną w temp. 100 °C. Pamiętamy wzory na oba ciepła ((9.2.) oraz (9.8.)). Ciepło właściwe wody wynosi $c_w = 4200 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, ciepło parowania wody to $L = 2\,257\,000 \text{ J/kg}$. Zatem:

$$Q_{dost} = Q_{20 \rightarrow 100^\circ\text{C}} + Q_{przemiany} = mc_w\Delta T + mL = 259\,300 \text{ J}$$

Zauważmy, że ciepło parowania L jest dużo większe niż ciepło właściwe wody. Dużo trudniej więc odparować 100 g wody niż podgrzać ją o 80 °C, bo wymaga to dostarczenia większego ciepła.

Pracę wykonaną nad wodą w trakcie ogrzewania do temperatury wrzenia możemy z powodzeniem pominąć. Oczywiście występuje tu efekt rozszerzalności cieplnej wody, ale możemy przyjąć, że jest on niewielki. Znaczący wzrost objętości natomiast występuje podczas przemiany wody w parę. Pracę obliczymy ze wzoru $W = -p \cdot \Delta V = -p \cdot (V_p - V_w)$, gdzie objętości wynoszą: $V_p = \frac{m}{\rho_p}$, $V_w = \frac{m}{\rho_w}$, a gęstości wody i pary są znane ($\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_p = 0,6 \text{ kg/m}^3$). Ciśnienie normalne oznacza 1013,25 hPa.

$$W = -p \cdot \left(\frac{m}{\rho_p} - \frac{m}{\rho_w} \right) = -16\,877 \text{ J}$$

Po pierwsze, objętość pary jest ok. 1700 razy większa niż objętość tej samej masy wody (wynika to z różnicy gęstości). Po drugie, praca wykonana nad układem jest ujemna (objętość rośnie, więc to układ sam wykonuje pracę kosztem dostarczonego ciepła). Podsumowując, zmiana energii wewnętrznej wynosi:

$$\Delta U = Q_{dost} + W = 259\,000 - 16\,877 = 242\,123 \text{ J}$$

Energia wewnętrzna układu wzrosła.

9.3. Równanie stanu gazu, przemiany

Stan gazu opisany jest przy pomocy parametrów stanu: p, V, T . Są to parametry niezależne, jednak są ze sobą powiązane równaniem stanu. Równanie stanu gazu doskonałego nazywamy **równaniem Clapeyrona** i zapisujemy wzorem:

$$pV = nRT \quad \text{lub} \quad \frac{pV}{T} = \text{const} \quad (9.12.)$$

Ponieważ liczbę moli n można powiązać z liczbą cząsteczek N , a stałą gazową R ze stałą Boltzmanna k_B , relacjami:

$$n = \frac{N}{N_A} \quad R = k_B N_A \quad (9.13.)$$

to równanie Clapeyrona przedstawia się często w postaci:

$$pV = Nk_B T \quad (9.14.)$$

Stała Boltzmanna $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Jak rozumieć równanie Clapeyrona i jak je stosować? Najczęściej będziemy używać równania stanu, aby obliczyć jakiś parametr stanu 1 (np. p_1), jeśli znamy pozostałe parametry tego stanu (V_1, T_1) i liczbę moli n . W naszych zadaniach liczba moli raczej nie będzie się zmieniać w różnych stanach, dlatego oznaczyliśmy ją po prostu n , bez indeksu 1. Często jednak nie znamy liczby moli, ale znamy parametry gazu w innym stanie 2 (p_2, V_2, T_2). Wtedy nieznaną parametr (np. p_1) obliczymy, zapisując (dla stałej liczby moli):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (9.15.)$$

Pamiętamy, że temperatura jest zawsze wyrażona w kelwinach, także w równaniu Clapeyrona.

Prześledzimy teraz 4 podstawowe przemiany gazowe. Przemiany te charakteryzują się tym, że zachowany jest w nich jeden z parametrów termodynamicznych (p, V, T), lub ciepło (Q), stąd też nazywamy je odpowiednio: izobaryczną, izochoryczną, izotermiczną i adiabatyczną. Przebieg przemiany gazowej często obrazujemy na wykresach, których dwie osie pokazują zmiany dwóch niezależnych parametrów. Mogą to być wykresy (p, V), (V, T), czy (p, T). Oczywiście możemy zawsze zamienić miejscami osie (i rysować np. wykres (V, p)).

9.3.1. Przemiana izobaryczna

Zachowanym parametrem jest ciśnienie, $p = \text{const}$. Równanie przemiany izobarycznej jest następujące:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{lub} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (9.16.)$$

Wykres tej przemiany na diagramie (p, V) przedstawiono na Rysunku 9.1.a, jest to funkcja stała (ciśnienie się nie zmienia). Krzywą przemiany na dowolnym diagramie nazywamy izobarą. I zasada termodynamiki zapisana dla przemiany izobarycznej ma dokładnie postać wzoru (9.11.) w zapisie makroskopowym. Ponieważ $p = \text{const}$ nie ma potrzeby całkowania. W przemianie izobarycznej łatwo też zdefiniować ciepło w funkcji zmiany temperatury: $Q = nC_p \Delta T$, gdzie C_p jest ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu. Wobec tego I zasada ma postać:

$$nC_V \Delta T = nC_p \Delta T - p \Delta V \quad (9.17.)$$

9.3.2. Przemiana izochoryczna

W tej przemianie nie zmienia się objętość gazu, $V = \text{const}$. Skoro tak, to praca wykonana nad gazem jest zerowa, bo $\Delta V = 0$. Bardzo łatwo zapiszemy więc I zasadę termodynamiki dla tej przemiany:

$$nC_V \Delta T = Q \quad \text{lub} \quad nC_V dT = dQ \quad (9.18.)$$

Tym razem $Q \neq nC_p \Delta T$, bo nie możemy stosować wielkości C_p (ciśnienie się zmienia w przemianie izochorycznej). W przemianie izochorycznej $W = 0$, więc ciepło jest równe zmianie energii wewnętrznej, $Q = \Delta U = nC_V \Delta T$. Równanie stanu przemiany izochorycznej jest następujące:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{lub} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (9.19.)$$

Zapisu różniczkowego użyjemy, gdy np. znamy zmianę ciśnienia lub temperatury, a nie objętości. Krzywa przemiany izochorycznej, nazywana izochorą, ma na diagramie (p, V) postać prostej pionowej o równaniu $V = \text{const.}$

9.3.3. Przemiana izotermiczna

Przemiana izotermiczna zachodzi w stałej temperaturze, $T = \text{const.}$ Równanie przemiany jest następujące:

$$pV = \text{const} \quad \text{lub} \quad p_1V_1 = p_2V_2 \quad (9.20.)$$

Izoterma, czyli krzywa przemiany izotermicznej, jest na diagramie (p, V) hiperbolą o równaniu $p = \frac{\text{const}}{V}$, jak na Rysunku 9.1.c. Skoro $T = \text{const.}$, to $\Delta T = 0$, a więc $\Delta U = 0$ - zmiana energii wewnętrznej gazu jest zerowa. Oznacza to, że gaz może wykonać dodatnią pracę jedynie kosztem dostarczonego ciepła. Innymi słowy, całe ciepło dostarczone do gazu jest przeznaczone na wykonanie przez niego pracy, albo, równoważnie, praca nad gazem w całości powoduje dostarczenie do gazu ciepła. I zasada dynamiki w przemianie izotermicznej wygląda następująco:

$$Q = -W \quad \text{czyli} \quad dQ = pdV \quad (9.21.)$$

Nie możemy użyć postaci makroskopowej (z deltami), bo ciśnienie się zmienia w przemianie izotermicznej. Musimy całkować. Ciekawym zagadnieniem jest obliczenie pracy wykonanej przez gaz w przemianie izotermicznej. Załóżmy, że mamy do czynienia z izotermicznym sprężaniem od stanu p_1, V_1 do stanu p_2, V_2 w stałej temperaturze T . Ile wynosi praca gazu w tej przemianie?

$$W_{g,1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dW_g = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \left| \begin{matrix} pV = nRT \\ p = \frac{nRT}{V} \end{matrix} \right| = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9.22.)$$

Nie mogliśmy od razu całkować wyrażenia $p dV$, bo ciśnienie się zmienia, jest funkcją V . Dlatego musieliśmy zrobić podstawienie i pokazać jawną zależność p od zmiennej całkowania V . Oczywiście można było zmienić zmienną całkowania i całkować po p . Dostalibyśmy wtedy wzór

$$W_{g,1 \rightarrow 2} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (9.23.)$$

Ponieważ chodziło nam o sprężanie izotermiczne, to $V_2 < V_1$, a więc praca gazu jest ujemna: $W_{g,1 \rightarrow 2} = -nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT \ln \frac{p_2}{p_1}$. Praca wykonana nad gazem jest oczywiście przeciwna (w tym przypadku dodatnia). W przemianie izotermicznej mamy (9.21.), a więc ciepło jest ujemne w procesie sprężania. To jest logiczne - gaz oddaje ciepło do otoczenia w trakcie sprężania w ilości równej, co do wartości bezwzględnej, wykonanej nad nim pracy. Do zapamiętania: praca w przemianie izotermicznej jest dana funkcją logarytmiczną stosunku objętości lub ciśnienia.

9.3.4. Przemiana adiabatyczna

Przemiana adiabatyczna zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem, $Q = 0$. Zwróćmy uwagę: ciepło jest zerowe, ale nie oznacza to stałej temperatury. Temperatura w przemianie adiabatycznej się zmienia. (Podobnie w przemianie izotermicznej ciepło nie jest zerowe

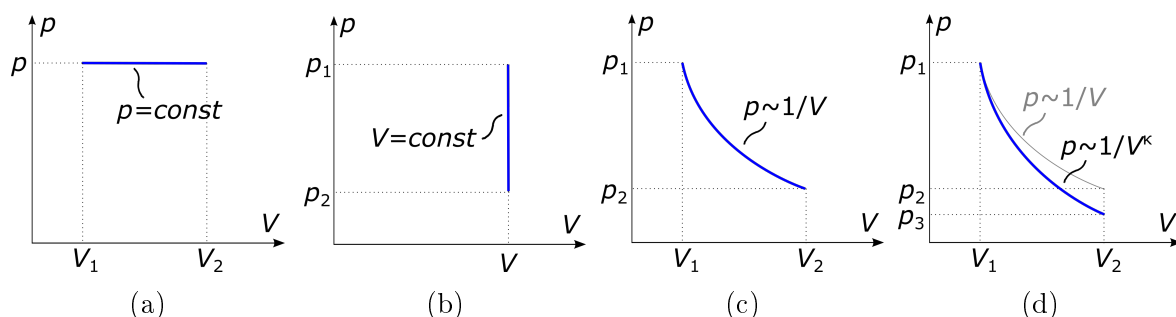
mimo stałej temperatury.) Wobec tego I zasada termodynamiki może być zapisana dla tej przemiany następująco:

$$\Delta U = W = -p\Delta V \quad \text{czyli} \quad dU = -pdV \quad (9.24.)$$

Czasem mówi się też, że ciepło molowe przemiany adiabatycznej jest równe zero (skoro $Q = 0$, to $C^{adiab} = 0$, bo $\Delta T \neq 0$). Równanie stanu dla przemiany adiabatycznej można wyprowadzić z I zasady termodynamiki, $nC_V dT = -pdV$, i równania Clapeyrona, co jednak jest dość skomplikowane i wymaga dłuższego rachunku, więc je pominiemy. W wyniku otrzymuje się równanie:

$$pV^\kappa = \text{const} \quad \text{lub} \quad p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \quad (9.25.)$$

gdzie stały, bezwymiarowy parametr kappa: $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$ nazywamy wykładnikiem adiabaty. κ jest stosunkiem ciepła właściwych przy stałym ciśnieniu i stałej objętości i zależy jedynie od rodzaju gazu. Tak więc, dla gazu 1-atomowego: $\kappa = \frac{5}{3} \approx 1,67$, dla gazu 2-atomowego: $\kappa = \frac{7}{5} = 1,4$, a dla gazu 3-atomowego: $\kappa = \frac{4}{3} \approx 1,33$. Wykres przemiany adiabatycznej na diagramie (p,V) dany jest hiperbolą, podobnie jak dla przemiany izotermicznej. Adiabata ma jednak większe nachylenie, bo jej równanie jest następujące $p = \frac{\text{const}}{V^\kappa}$, a $\kappa > 1$ (patrz: Rysunek 9.1.d).



Rysunek 9.1.: Wykresy przemian termodynamicznych przedstawione na diagramie (p,V) : (a) izobara, (b) izochora, (c) izoterma, (d) adiabata.

Przykłady

1. Przedstaw równanie przemiany izobarycznej na diagramie (V,T) .
Izobara na diagramie (p,V) jest prostą poziomą o równaniu $p = \text{const}$. Równanie przemiany izobarycznej to $\frac{V}{T} = \text{const}$, więc na diagramie (V,T) izobara jest prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych o równaniu liniowym $V = \text{const} \cdot T$ (Rysunek 9.2.a).
2. Wyraż równanie adiabaty poprzez parametry V i T .

$$\begin{cases} pV^\kappa = \text{const} \\ \frac{pV}{T} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pV^\kappa = \text{const} \\ p = \text{const} \cdot \frac{T}{V} \end{cases} \Rightarrow \frac{T}{V} \cdot V^\kappa = \text{const} \Rightarrow TV^{\kappa-1} = \text{const}$$

3. Podczas przemiany izotermicznej ciśnienie 3 moli gazu zmieniło się od 1 atm do 5 atm, a objętość końcowa gazu wyniosła 20 dm³. (a) W jakiej temperaturze zaszła ta przemiana? (b) Jaka była początkowa objętość gazu? (c) Jaką pracę wykonał gaz? (d) Ile

ciepła gaz pobrał od otoczenia? (e) O ile wzrosła energia wewnętrzna gazu?

(a) Jednostka ciśnienia „atm”, czyli „atmosfera” (fizyczna) jest równa ciśnieniu atmosferycznemu. Mamy wszystkie dane, aby obliczyć temperaturę przemiany izotermicznej. Jest to po prostu temperatura w stanie (p_2, V_2) . Skorzystamy z równania Clapeyrona, które zapiszemy dla stanu końcowego (2):

$$p_2 V_2 = nRT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{5 \cdot 1013 \cdot 10^2 \text{ Pa} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3 \text{ mol} \cdot 8,31 \text{ J/mol K}} = 406,3 \text{ K}$$

Hektopaskal to oczywiście 10^2 paskala, dm^3 jest równy 10^{-3} m^3 , a $\text{Pa} \cdot \text{m}^3 = \text{Nm} = \text{J}$. Musieliśmy zamienić jednostki na podstawowe, żeby dostać na końcu kelwin.

(b) W stanie początkowym (1) gaz miał oczywiście tę samą temperaturę (przemiana izotermiczna), więc możemy łatwo obliczyć objętość gazu V_1 , korzystając z równania przemiany:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{p_2 V_2}{p_1} = \frac{5 \text{ atm} \cdot 20 \text{ dm}^3}{1 \text{ atm}} = 100 \text{ dm}^3$$

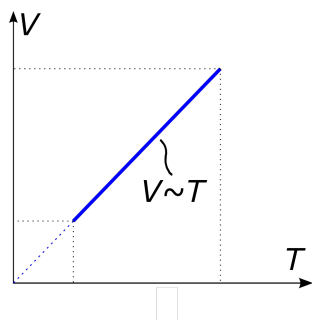
Nie zamienialiśmy tym razem jednostek na podstawowe, bo (i) atmosfery się uprościły, (ii) objętość końcową wyraziliśmy dzięki temu w dm^3 , tak jak początkową.

(c) Znamy objętości V_1 i V_2 oraz ciśnienia p_1 i p_2 , dlatego łatwo policzymy pracę gazu, wykorzystując równanie (9.22.) lub (9.23.). Zauważmy, że $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 5$.

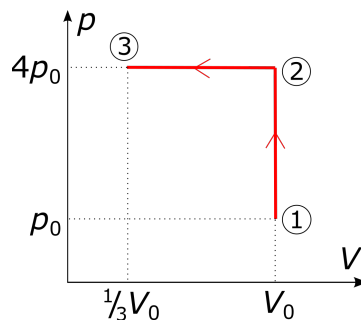
$$W_g = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} = 3 \text{ mol} \cdot 8,31 \text{ J/mol K} \cdot 406,3 \text{ K} \cdot \ln \frac{1}{5} = -16\,302 \text{ J}$$

Praca gazu jest ujemna, bo gaz się sprężał ($V_2 < V_1$).

(d)+(e) W przemianie izotermicznej nie zmienia się temperatura, więc od razu możemy odpowiedzieć na pytanie (e): energia wewnętrzna gazu się nie zmieniła, $\Delta U = 0$. Zatem ciepło: $0 = Q - W_g \Rightarrow Q = W_g = 16,3 \text{ kJ}$. Ciepło jest dodatnie, a więc gaz pobrał je od otoczenia, co więcej, w całości zamienił je na pracę.



(a) Izobara na diagramie (V, T) dana jest linią prostą $V = \text{const} \cdot T$, przechodzącą przez początek układu.



(b) Dwuetapowa przemiana z Przykładu 4: izochoryczne ogrzewanie $(1) \rightarrow (2)$, izobaryczne sprężanie $(2) \rightarrow (3)$.

Rysunek 9.2.

4. Gaz jednoatomowy ogrzano izochorycznie tak, że ciśnienie gazu wzrosło 4-krotnie. Następnie gaz sprężono izobaryczne do $1/3$ jego objętości początkowej. (a) Narysuj

przebieg całego procesu na diagramie (p, V) . (b) Oblicz zmianę temperatury w tym dwuetapowym procesie. (c) Jaką pracę wykonano nad gazem? (d) Ile ciepła gaz oddał do otoczenia? (e) Jaka jest całkowita zmiana energii wewnętrznej gazu? Dane są: ciśnienie początkowe p_0 , objętość początkowa V_0 , liczba moli n .

(a) Przyjmijmy oznaczenia: przemiana izochoryczna $(1) \rightarrow (2)$, przemiana izobaryczna $(2) \rightarrow (3)$. Wykres przedstawiono na Rysunku 9.2.b.

(b) Z treści zadania i z wykresu (p, V) widzimy, że:

$$(p_1 = p_0, V_1 = V_0, T_1), (p_2 = 4p_0, V_2 = V_0, T_2), (p_3 = 4p_0, V_3 = \frac{1}{3}V_0, T_3).$$

Dla każdego punktu na wykresie możemy zapisać równanie Clapeyrona i obliczyć nieznane temperatury:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}, \quad T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{4p_0 V_0}{nR}, \quad T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = \frac{\frac{4}{3}p_0 V_0}{nR}$$

Tak więc całkowita zmiana temperatury w tym dwuetapowym procesie wynosi

$$T_3 - T_1 = \frac{1}{3} \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Zauważmy, że gaz osiąga najwyższą temperaturę w stanie (2), wtedy jest ona aż 4-razy wyższa niż początkowa $\frac{p_0 V_0}{nR}$.

(c) Pracę wykonaną nad gazem od stanu (1) do (3) obliczymy jako sumę pracy w przemianach $(1) \rightarrow (2)$ oraz $(2) \rightarrow (3)$. W pierwszym etapie mamy do czynienia z przemianą izochoryczną, więc $W_{1 \rightarrow 2} = 0$. W drugim etapie zachodzi przemiana izobaryczna (przy stałym p), więc skorzystamy z definicji (9.4.): $W_{2 \rightarrow 3} = -p_2 \Delta V = -p_2 (V_3 - V_2) = \frac{8}{3} p_0 V_0$ ($W > 0$, bo gaz jest sprężany). Zatem całkowita praca wynosi

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = \frac{8}{3} p_0 V_0$$

Zauważmy, że jest to także pole pod wykresem $p(V)$.

(d) Całkowite ciepło wymienione z otoczeniem też będzie sumą ciepł z obu przemian.

W procesie izochorycznym mamy

$$Q_{1 \rightarrow 2} = nC_V \Delta T = nC_V (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot \frac{3p_0 V_0}{nR} = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

W procesie izobarycznym:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = nC_p \Delta T = nC_p (T_3 - T_2) = n \cdot \frac{5}{2} R \left(-\frac{8p_0 V_0}{3nR} \right) = -\frac{20}{3} p_0 V_0.$$

W takim razie:

$$Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{9}{2} p_0 V_0 - \frac{20}{3} p_0 V_0 = -\frac{13}{6} p_0 V_0$$

Ciepło całkowite jest ujemne - gaz rzeczywiście oddał ciepło do otoczenia, jak sugerował autor zadania.

(e) Oczywiście

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = Q_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} + W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = -\frac{13}{6} p_0 V_0 + \frac{8}{3} p_0 V_0 = \frac{1}{2} p_0 V_0$$

Z drugiej strony mamy wzór definicyjny na zmianę energii wewnętrznej gazu doskonałego: $\Delta U = nC_V \Delta T = nC_V (T_3 - T_1) = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot \frac{1}{3} \frac{p_0 V_0}{nR} = \frac{1}{2} p_0 V_0$. Zmiana energii wewnętrznej jest dodatnia (energia wzrosła), bo temperatura wzrosła: $\Delta T > 0 \Rightarrow \Delta U > 0$.

9.4. Cykl termodynamiczny

Cykl termodynamiczny to układ kilku przemian termodynamicznych, które wychodzą z i prowadzą do tego samego stanu (p, V, T) . Tworzą więc zamknięty układ przemian - cykl. Układ fizyczny, który realizuje cykl (obieg) termodynamiczny nazywamy silnikiem termodynamicznym (cieplnym). Pamiętamy z Podrozdziału 9.1., że energia wewnętrzna U jest funkcją stanu - jej zmiana zależy tylko od stanu początkowego i końcowego. Zatem dla cyklu zmiana energii wewnętrznej jest 0. Z tego wynika, że całkowita praca wykonana przez gaz jest równa wypadkowemu ciepłu dostarczonemu do gazu (jest to różnica ciepła pobranego i oddanego przez gaz). Możemy to zapisać w postaci wzorów:

$$\Delta U^{\text{cykl}} = 0 \quad \text{oraz} \quad W_c = Q_{\text{pobr}} - |Q_{\text{odd}}| \quad (9.26.)$$

To jest ważna własność cyklu, którą będziemy wykorzystywać w zadaniach. Przy ciepłe oddanym Q_{odd} piszemy znak wartości bezwzględnej, bo jest ono ujemne ($Q < 0$ oznacza, że ciepło przepłynęło od gazu do otoczenia, czyli zostało oddane do otoczenia). Interesuje nas tutaj sama wartość ciepła oddanego, dlatego pomijamy znak, pisząc moduł. Pracę całkowitą gazu możemy zawsze obliczyć jako różnicę ciepł (pobrane minus oddane), ale też jako pole pod wykresem cyklu na diagramie (p, V) . Cykl tworzy zawsze zamkniętą krzywą na takim diagramie (np. prostokąt, ale częściej składa się z gałęzi krzywoliniowych).

Charakterystycznym parametrem danego cyklu jest **sprawność** cyklu, którą oznaczamy zwyczajowo przez η , wyrażamy bezwymiarowo jako ułamek (lub procentowo) i definiujemy jako stosunek całkowitej pracy wykonanej przez gaz W_c do ciepła pobranego przez gaz Q_{pobr} :

$$\eta = \frac{W_c}{Q_{\text{pobr}}} = \frac{Q_{\text{pobr}} - |Q_{\text{odd}}|}{Q_{\text{pobr}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{odd}}|}{Q_{\text{pobr}}} \quad (9.27.)$$

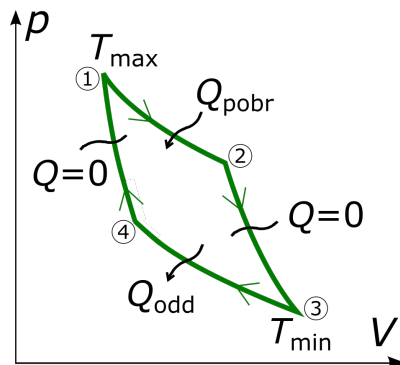
Oczywiście, sprawność może wynosić maksymalnie 1 (100%). Czasem w danych technicznych nowoczesnych urządzeń termodynamicznych, np. gazowych kotłów grzewczych, pojawia się informacja o sprawności $> 100\%$. Wynika to z innej definicji sprawności - nie jest to sprawność termodynamiczna, która zawsze jest mniejsza niż 100%.

Możemy sobie wymyślić dowolnie wiele różnych cykli termodynamicznych, dla których obliczymy sprawność. Okazuje się jednak, że istnieje jeden cykl, którego sprawność idealna (teoretyczna) jest największa możliwa, przy danych skrajnych wartościach temperatury, w zakresie których pracuje gaz roboczy (oczywiście ciągle stosujemy przybliżenie gazu idealnego). Jest to tzw. **cykl Carnota**, który składa się z dwóch izoterm i dwóch adiabat. Przedstawiamy go na diagramie (p, V) na Rysunku 9.3.. Obliczeniem sprawności cyklu Carnota zajmiemy się w przykładach. Teraz podamy tylko wynik:

$$\eta^{\text{Carnot}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} \quad (9.28.)$$

gdzie przez T_{max} i T_{min} oznaczyliśmy największą i najmniejszą temperaturę, jaką osiąga gaz roboczy w cyklu. Temperatury te czasem nazywa się też: temperaturą chłodnicy - odbiornika ciepła oddawanego przez gaz (T_{min}) oraz temperaturą grzejnika - źródła wysokiej temperatury (T_{max}). Przykładowo, jeśli skrajne temperatury to 373 K (temp. wrzenia wody) i 423 K (typowa temp. wody w rurach ciepłowniczych), to sprawność cyklu Carnota wynosi ok. 12%. Jeśli rozpatrzmy dowolny inny cykl, „pracujący” w takim przedziale temperatur

373-423 K, to będzie on miał zawsze sprawność niższą niż cykl Carnota. Często odnosimy sprawność danego cyklu do sprawności cyklu idealnego (Carnota), co daje nam pewną informację o „skuteczności”, czy „wydajności” tego cyklu. Im różnica temperatur jest większa, tym większą sprawność uzyskuje nasz cykl.



Rysunek 9.3.: Przebieg cyklu Carnota: izotermiczne rozprężanie (1)→(2) - temperatura T_{max} , gaz pobiera ciepło Q_{pobr} ; adiabatyczne rozprężanie (2)→(3) - brak wymiany ciepła, temperatura spada do T_{min} ; izotermiczne sprężanie (3)→(4) - temperatura T_{min} , gaz oddaje ciepło Q_{odd} ; adiabatyczne sprężanie (4)→(1) - brak wymiany ciepła, temperatura rośnie z powrotem do T_{max} .

Czytelnik na pewno zna dwa podstawowe typy silnika spalinowego - benzynowy (czterosuwowy) i Diesla (zwany też wysokoprężnym). Oba silniki realizują inne cykle termodynamiczne. W przypadku silnika wysokoprężnego jest to cykl Diesla, a w przypadku silnika benzynowego - cykl Otta. Cykl Otta jest szczególnie prostym cyklem - składa się z czterech procesów: sprężanie adiabatyczne (realizuje suw sprężania), ogrzewanie izochoryczne (ciśnienie gwałtownie rośnie, gdy dochodzi do zapłonu), rozprężanie adiabatyczne (realizuje cykl pracy) i ochładzanie izochoryczne (realizuje wydech). Okazuje się, co Czytelnik sam może łatwo obliczyć, że sprawność cyklu Otta zależy w bardzo prosty sposób od skrajnych objętości mieszanki paliwowej:

$$\eta^{Otto} = 1 - \left(\frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{1-\kappa} = 1 - \left(\frac{V_{min}}{V_{max}} \right)^{\kappa-1}$$

Stosunek objętości $\frac{V_{max}}{V_{min}}$ możemy z dobrym przybliżeniem traktować jako tzw. stopień sprężania lub skok tłoka, co jest jednym z podstawowych parametrów technicznych każdego silnika. Jeśli silnik ma np. stopień sprężania równy 7:1, a gaz roboczy (mieszanka paliwowa) jest 3-lub więcej atomowa (tak naprawdę jest to dość skomplikowana mieszanina), to sprawność takiego silnika spalinowego powinna wynosić $\eta = 47,7\%$. Sporo!

Przykłady

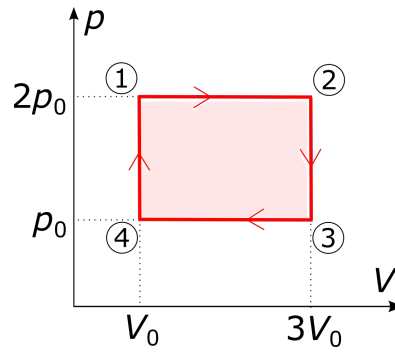
1. W pewnym cyklu zaobserwowano, że gaz oddaje do chłodnicy 1500 J ciepła, a jego sprawność wyznaczono na 43,5%. Ile ciepła musi być dostarczane w tym procesie? Jaką pracę wykonuje gaz w tym cyklu?

Przekształcamy wzór na sprawność i otrzymujemy:

$$Q_{pobr} = \frac{Q_{odd}}{1 - \eta} \approx 2655 \text{ J}$$

Praca z kolei to $W_c = Q_{pobr} - Q_{odd} = 1155 \text{ J}$.

2. Cykl termodynamiczny składa się z dwóch izochor i dwóch izobar. Skrajne wartości ciśnienia i objętości cyklu wynoszą (p_0, V_0) , $(2p_0, 3V_0)$. (a) Przedstaw cykl na diagramie (p, V) . (b) Oblicz pracę wykonaną przez gaz. (c) Oblicz ciepło pobrane i oddane przez gaz. (d) Sprawdź, że rzeczywiście $\Delta U = 0$ w tym cyklu. (e) Oblicz sprawność cyklu i porównaj ją ze sprawnością cyklu Carnota.



Rysunek 9.4.

- (a) Cykl przedstawiono na Rysunku 9.4..
 (b) Całkowitą pracę obliczymy bardzo prosto - jako pole pod wykresem (p, V) . Jest to pole kwadratu o bokach p_0 i $2V_0$, zatem jego pole (i praca gazu) to:

$$W_c = 2p_0V_0$$

Gdyby nasz cykl miał adiabatę lub izotermę na którejkolwiek z gałęzi (krzywoliniowy fragment), to musielibyśmy całkować.

(c) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zastanówmy się, na których gałęziach gaz pobiera, a na których oddaje ciepło? W przemianach izochorycznych gaz nie wykonuje pracy, a więc ciepło jest równe zmianie energii wewnętrznej, czyli proporcjonalne do zmiany temperatury. Na gałęzi $(2) \rightarrow (3)$ ciśnienie spada, a więc zgodnie z równaniem przemiany izochorycznej (9.19.) temperatura też spada. Zatem $Q \sim \Delta T < 0$ (przy izochorycznym ochładzaniu mamy „produkcję” ciepła). Gaz oddaje ciepło w ilości

$$Q_{2 \rightarrow 3} = nC_V(T_3 - T_2) = nC_V T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) = nC_V \frac{p_2 V_2}{nR} \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) = \frac{C_V}{R} V_2 (p_3 - p_2) = -3p_0 V_0 \frac{C_V}{R}.$$

W takim razie, na gałęzi $(4) \rightarrow (1)$ gaz pobiera ciepło ($p_1 > p_4 \Rightarrow T_1 > T_4$) w ilości

$$Q_{4 \rightarrow 1} = nC_V(T_1 - T_4) = \frac{C_V}{R} V_4 (p_1 - p_4) = p_0 V_0 \frac{C_V}{R}.$$

W powyższych przekształceniach skorzystaliśmy z równania przemiany izochorycznej (zamiana T , którego nie znamy, na p , które znamy) i równania Clapeyrona (zamiana T na p i V). Dla przemian izobarycznych ciepło możemy zapisać jako $Q = nC_p \Delta T$. Zatem mamy:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = nC_p(T_2 - T_1) = nC_p T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = nC_p \frac{p_1 V_1}{nR} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = \frac{C_p}{R} p_1 (V_2 - V_1) = 4p_0 V_0 \frac{C_p}{R}$$

oraz

$$Q_{3 \rightarrow 4} = nC_p(T_4 - T_3) = \frac{C_p}{R} p_3 (V_4 - V_3) = -2p_0 V_0 \frac{C_p}{R}.$$

Całkowite pobrane przez gaz ciepło jest więc równe

$$Q_{pobr} = Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = p_0 V_0 \left(\frac{C_V + 4C_p}{R} \right) = p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right)$$

natomiast ciepło oddane przez gaz do otoczenia jest równe

$$Q_{odd} = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = -p_0 V_0 \left(\frac{3C_V + 2C_p}{R} \right) = -p_0 V_0 \left(2 + \frac{5C_V}{R} \right)$$

Skorzystaliśmy w powyższych dwóch wzorach z relacji (9.6.) ($C_p = C_V + R$) dla gazu doskonałego. Zauważmy, że $Q_{pobr} > |Q_{odd}|$, więc sprawność nam wyjdzie dodatnia. Po drugie, praca gazu ma być równa różnicy tych ciepł, a ona oczywiście nie może być ujemna (w przypadku silnika).

(d) Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu jest równa

$$\begin{aligned} \Delta U &= \sum_{\substack{(i) \rightarrow (j) \\ i,j = 1,2,3,4}} (W_{i \rightarrow j} + Q_{i \rightarrow j}) = W_c + Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = \\ &= 2p_0 V_0 + 4p_0 V_0 \left(\frac{C_V}{R} + 1 \right) - p_0 V_0 \left(2 + \frac{5C_V}{R} \right) - 3p_0 V_0 \frac{C_V}{R} + p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right) = 0 \end{aligned}$$

Tego należało oczekiwać, bo w cyklu (zamkniętym obiegu termodynamicznym) zmiana energii wewnętrznej jest zawsze zero (energia wewnętrzna jest funkcją stanu). Na podstawie tego wyniku możemy wnioskować, że nie pomyliliśmy się w cząstkowych obliczeniach.

(e) Sprawność obliczymy dwoma równoważnymi sposobami:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \frac{W_c}{Q_{pobr}} = \frac{2p_0 V_0}{p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right)} = \frac{1}{2 + \frac{5C_V}{2R}} \\ \eta^{(2)} &= \frac{Q_{pobr} - |Q_{odd}|}{Q_{pobr}} = \frac{p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right) - p_0 V_0 \left(2 + \frac{5C_V}{R} \right)}{p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right)} = \frac{2p_0 V_0}{p_0 V_0 \left(4 + \frac{5C_V}{R} \right)} = \frac{1}{2 + \frac{5C_V}{2R}} \end{aligned}$$

Oczywiście $\eta^{(1)} = \eta^{(2)}$, bo $W_c = Q_{pobr} - |Q_{odd}|$. Załóżmy, że nasz gaz roboczy jest 1-atomowy (np. hel). Wówczas $C_V = \frac{3}{2}R$, a sprawność $\eta = \frac{4}{23} \approx 17\%$. Bardzo mała sprawność. Żeby jeszcze bardziej się o tym przekonać, obliczmy sprawność cyklu Carnota dla takich samych skrajnych temperatur. Wynoszą one:

$$T_{max} = T_2 = \frac{6p_0 V_0}{nR} \text{ oraz } T_{min} = T_4 = \frac{p_0 V_0}{nR}.$$

Wiemy to na podstawie równania Clapeyrona ($T = \frac{pV}{nR}$). Zatem sprawność cyklu Carnota - wzór (9.28.):

$$\eta^{\text{Carnot}} = 1 - \frac{p_0 V_0}{6p_0 V_0} = \frac{5}{6} \approx 83,3\%$$

Gdyby nasz gaz (dowolnie jaki) realizował cykl Carnota, którego skrajne temperatury wynoszą tyle samo, co w rozważanym cyklu („prostokątnym”), to sprawność tego cyklu byłaby blisko 5-krotnie wyższa.

3. Wyprowadź wzór na sprawność cyklu Carnota.

Cykl Carnota składa się z dwóch izoterm (na jednej ciepło jest pobierane, a na drugiej oddawane) oraz dwóch adiabat (bez wymiany ciepła). Nie policzymy łatwo pracy jako pola pod wykresem. W takim razie w ogóle nie liczymy pracy, a jedynie dwa ciepła w przemianie izotermicznej: Q_{pobr} przy izotermicznym rozprężaniu (gałąź (1)→(2) na Rysunku 9.3.) oraz Q_{odd} przy izotermicznym sprężaniu (gałąź (3)→(4)). Pamiętamy z podrozdziału o przemianie izotermicznej, że ciepło w tej przemianie jest równe pracy

gazu i wynosi $Q = nRT \ln \frac{V_k}{V_p}$, gdzie przez V_k/V_p oznaczyliśmy tym razem końcową i początkową objętość gazu w przemianie. W naszym przypadku więc:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = nRT_{max} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{oraz} \quad Q_{3 \rightarrow 4} = nRT_{min} \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_{min} \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Oczywiście $Q_{3 \rightarrow 4} < 0$, więc zapisaliśmy jak powyżej. Trzeba teraz jakoś zamienić objętości, których nie znamy, na temperatury, które znamy. Przypomnijmy sobie równanie przemiany adiabatycznej, ale w postaci z Przykładu 2 Podrozdziału 9.3., czyli $TV^{\kappa-1} = const$, które zapiszemy dla dwóch gałęzi w cyklu Carnota:

$$T_2 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1} \quad \text{oraz} \quad T_4 V_4^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1}$$

Oczywiście $T_1 = T_2 = T_{max}$ i $T_3 = T_4 = T_{min}$, więc powyższe równania adiabat mają postać

$$T_{max} V_2^{\kappa-1} = T_{min} V_3^{\kappa-1} \quad \text{oraz} \quad T_{min} V_4^{\kappa-1} = T_{max} V_1^{\kappa-1}$$

Podzielmy te równania stronami

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

W takim razie licznik we wzorze ogólnym na sprawność przyjmuje postać

$$W_c = Q_{pobr} - |Q_{odd}| = nR \ln \frac{V_2}{V_1} (T_{max} - T_{min})$$

a cała sprawność

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{nR \ln \frac{V_2}{V_1} (T_{max} - T_{min})}{nRT_{max} \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}}$$

end.

9.5. Entropia

Entropia jest bardzo ważną wielkością termodynamiczną, dlatego poświęcamy jej osobny podrozdział. Podanie precyzyjnej definicji entropii sprawa pewien kłopot - definicja może się wydawać trochę enigmatyczna. Mówimy, że entropia jest funkcją stanu, która określa stopień nieuporządkowania układu. Definiujemy ją poprzez jej różniczkę:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (9.29.)$$

gdzie dQ jest różniczką (nieskończenie małym przyrostem) ciepła, a T - temperaturą. Po raz kolejny definiujemy jakąś wielkość termodynamiczną raczej poprzez jej zmianę - mówiliśmy, że ciepło jest formą przekazu energii, więc Q samo w sobie jest zmianą. Podobnie, w ramach termodynamiki klasycznej (fenomenologicznej) o entropii będziemy myśleć w kategoriach zmiany na skutek przekazu ciepła. Nie jest przy tym poprawny wzór: $S = \frac{Q}{T}$. Żeby obliczyć o ile wzrosła (lub zmalała) entropia w danym procesie musimy wykonać całkowanie:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (9.30.)$$

W Przykładach wyprowadzimy wzory i obliczymy zmiany entropii w różnych procesach. Entropia jest nierozłącznie związana z treścią II zasady termodynamiki, o której powiemy więcej w podrozdziale.

Jak rozumieć hasło „miara stopnia nieuporządkowania” w definicji entropii? W definicji klasycznej entropii, podanej powyżej, można spróbować wyjaśnić to tak: skoro zmiany entropii dokonujemy poprzez przekaz ciepła, a więc dostarczenie do układu energii, to każda z cząsteczek gazu (lub ogólniej: ciał wchodzących w skład układu) otrzymuje pewną porcję energii, która daje jej większą swobodę ruchu. W takim razie nieporządek w układzie rośnie, bo wyżej energetyczne cząsteczki zachowują się bardziej dynamicznie, chaotycznie. Odwrotnie w przypadku odbierania od układu ciepła. Bardzo dobrze da się wyjaśnić pojęcie entropii jako miary nieporządku w układzie dzięki tzw. definicji mikroskopowej entropii (w ramach termodynamiki statystycznej). W termodynamice statystycznej entropia układu makroskopowego (składającego się z wielu cząsteczek) jest równa:

$$S = k_B \ln \Omega \quad (9.31.)$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna, natomiast Ω jest funkcją statystyczną, która określa na ile sposobów da się zrealizować stan termodynamiczny naszego układu makroskopowego poprzez wszystkie tzw. stany mikroskopowe (pojedyncze stany realizowane np. przez poszczególne cząsteczki gazu). Jeśli np. nasz układ może być zrealizowany tylko na jeden ściśle określony sposób (np. dwa puzzle pasują tylko i wyłącznie do siebie, albo książka o tytule 'A' może stać jedynie na prawo od książki 'B'), to $\Omega = 1$, a więc entropia jest równa $S = k_B \ln 1 = 0$. Wielkość Ω możemy trochę rozumieć jak zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych w teorii rachunku prawdopodobieństwa. W uproszczeniu można powiedzieć, że Ω jest proporcjonalne do prawdopodobieństwa, że układ znajduje się w określonym stanie. Zauważmy, że w ramach definicji statystycznej możemy mówić o entropii jako funkcji konkretnego stanu (a nie jak o zmianie). Co więcej, taka definicja daje naturalne wyczucie, o co chodzi z tym nieporządkiem. Jeśli stan danego układu makro można realizować na wiele sposobów, to Ω może być bardzo duże, a więc S też będzie duże.

Ponieważ entropia jest funkcją stanu, to podobnie jak energia wewnętrzna, jej całkowita zmiana w cyklu termodynamicznym wynosi 0. Sprawdźmy to w Przykładach. Co więcej, przemianie adiabatycznej także towarzyszy zawsze zerowa zmiana entropii (w przemianie adiabatycznej mamy $dQ = 0 \Rightarrow dS = 0$).

9.5.1. II zasada termodynamiki

II zasada termodynamiki mówi, że dla układu izolowanego (bez wpływu czynników zewnętrznych) przy przejściu od jednego stanu do drugiego entropia nigdy nie maleje, zmiana entropii jest nieujemna:

$$\Delta S \geq 0 \quad (9.32.)$$

Równość w powyższym wzorze zachodzi jedynie dla tzw. procesów odwracalnych. Tzn. jeśli w danym procesie zmiana entropii jest zerowa, to taki proces może zajść w drugą stronę (np. reakcja chemiczna może być odwracalna, dwukierunkowa). II zasada termodynamiki często budzi wiele kontrowersji i wątpliwości, przecież możemy sobie wyobrazić procesy fizyczne, które zmniejszają entropię układu. Przykładowo, jeśli poustawiam książki na półce alfabetycznie wg tytułów, to stopień uporządkowania rośnie, więc entropia maleje. Podobnie,

jeśli posprzątam pokój, to porządek rośnie. Owszem, w tym pojedynczym procesie entropia zmalała, ale II zasadę termodynamiki należy rozpatrywać w szerszej skali, także czasowej. W dłuższej perspektywie czasowej bałagan w pokoju i tak się pojawi. Poza tym, oba trywialne przypadki zmniejszania entropii nie dotyczą przecież układu izolowanego. Cały układ termodynamiczny tworzą nie tylko książki, czy ubrania, także my sami, powietrze wokół nas, które z pewnością zaburzamy itd. Wypadkowo, entropia może wcale nie maleć.

Przykłady

1. Wyprowadź ogólny wzór na zmianę entropii dowolnego procesu termodynamicznego gazu doskonałego.

Wykorzystamy definicję różniczkową entropii, I zasadę termodynamiki i równanie stanu gazu doskonałego:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{dU - dW}{T} = \frac{nC_V dT + p dV}{T} = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = \left| \begin{array}{l} pV = nRT \\ \frac{p}{T} = \frac{nR}{V} \end{array} \right| = \\ &= nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Zatem zmiana entropii jest równa:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9.33.)$$

2. Ile wynosi zmiana entropii $n = 50$ moli dwutlenku węgla sprężanego izotermicznie od ciśnienia $p_1 = 2$ atm do $p_2 = 2,5$ atm w temperaturze pokojowej?

Możemy oczywiście skorzystać ze wzoru ogólnego, wyprowadzonego w poprzednim przykładzie. W procesie termodynamicznym $dU = 0$ (równoważnie: $T_1 = T_2$), więc pierwszy składnik sumy wynosi 0. Znamy skrajne ciśnienia, a nie objętości, więc skorzystamy z równania przemiany izotermicznej

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

żeby zamienić stosunek objętości na stosunek ciśnień. Po wstawieniu do wzoru:

$$\Delta S = nR \ln \frac{p_1}{p_2} = nR \ln \frac{2}{2,5} = nR \ln(0,8) = 50 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (-0,223) = -92,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

3. Wróćmy do Przykładu 2 z Podrozdziału 9.4.. Obliczymy zmiany entropii na każdej z gałęzi cyklu i sprawdzimy, czy rzeczywiście całkowita zmiana entropii jest zerowa.

Łatwo nam będzie wyrażać entropię poprzez stosunki temperatur, więc najpierw wypiszmy temperatury w czterech stanach cyklu (liczone na nR , które pominiemy - przy liczeniu ilorazów i tak się skrócą):

$$T_1 = p_1 V_1 = 2p_0 V_0, \quad T_2 = 6p_0 V_0, \quad T_3 = 3p_0 V_0, \quad T_4 = p_0 V_0.$$

W procesach izochorycznych nie ma zmiany objętości, więc drugi składnik sumy w (9.33.) znika. Mamy

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = nC_V \ln \frac{T_3}{T_2} = nC_V \ln \frac{1}{2} = -nC_V \ln 2$$

$$\Delta S_{4 \rightarrow 1} = nC_V \ln \frac{T_1}{T_4} = nC_V \ln 2$$

W procesach izobarycznych możemy skorzystać z definicji ciepła $dQ = nC_p dT$. W takim razie w procesie izobarycznym entropia wynosi $dS = nC_p \frac{dT}{T}$. Czyli:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1} = nC_p \ln 3$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4} = nC_p \ln \frac{T_4}{T_3} = nC_p \ln \frac{1}{3} = -nC_p \ln 3$$

Gołym okiem widać, że cztery wyrazy ΔS sumują się do zera. Zatem całkowita zmiana entropii w cyklu przedstawionym na Rysunku 9.4. wynosi $\Delta S_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4} = 0$, co dowodzi: (i) poprawności naszych wcześniejszych rachunków, (ii) że entropia jest funkcją stanu.

9.6. Teoria kinetyczna gazów*

Teoria kinetyczna jest jednym z działów termodynamiki (fizyki) statystycznej. Pozналиśmy już inne pojęcie z tej dziedziny - entropię mikroskopową. Na wstępie zaznaczmy, że podajemy tu jedynie uproszczony opis teorii kinetycznej, zwanej też szerzej teorią kinetyczno-molekularną gazów. Teoria ta stanowi model budowy gazów z perspektywy mikroskopowej, a więc przy pomocy opisu ruchu indywidualnych cząsteczek gazu. Założeniem teorii kinetycznej jest to, że cząsteczki gazu są w nieustannym, chaotycznym ruchu, wywołanym energią termiczną; oddziałują tylko poprzez zderzenia idealnie sprężyste (jak sztywne kulki - model gazu doskonałego); a ich rozmiary są dużo mniejsze niż rozmiar całego układu. Najważniejsze równanie tej teorii podaje tzw. **zasada ekwipartycji energii**, która mówi, że średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki liczona na jeden stopień swobody wynosi:

$$\overline{E}_{k.r.post.poj.cz.} = \frac{1}{2} k_B T \quad (9.34.)$$

gdzie kreska nad E oznacza, że chodzi nam o średnią. Wzór powyższy podaje związek energii kinetycznej z temperaturą, ważny nie tylko w fizyce statystycznej. Dzięki istnieniu takiego związku możemy wyrazić energię w jednostkach temperatury. Mówimy, że energia jest rzędu $k_B T$: $E \sim k_B T$. Temperatura pokojowa w skali energii oznacza energię równą 26 meV, gdzie jednostka elektronowolt [eV], używana w wielu dziedzinach fizyki, wynosi $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Dla układu N cząsteczek o f stopniach swobody zasadę ekwipartycji zapiszemy następująco:

$$\overline{E}_{k.r.post.N.cz.} = \frac{f}{2} N k_B T \quad (9.35.)$$

Na podstawie zasady ekwipartycji możemy określić tzw. *średnią prędkość kwadratową* cząsteczek, czyli pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości. Wartość ta daje wyobrażenie o szybkości cząsteczek gazu w danej temperaturze. Łatwo wyprowadzimy wzór dla 1-atomowej cząsteczki (m - masa pojedynczej cząsteczki gazu):

$$\frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} \quad (9.36.)$$

Okazuje się, że prędkość gazu w danej temperaturze (przy danej energii kinetycznej) podlega pewnemu statystycznemu rozkładowi. Obliczona powyżej wielkość v_k jest jedną z charakterystycznych prędkości, ale nie jest to ani najbardziej prawdopodobna, ani średnia prędkość. Statystyczny rozkład prędkości cząsteczek gazu doskonałego (dla pojedynczej, 1-atomowej cząsteczki w 3 wymiarach przestrzeni) jest dany **rozkładem Maxwella**:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \quad (9.37.)$$

Czynnik eksponencjalny z tym wzorze, $\exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right)$ (u nas $E = \frac{mv^2}{2}$) nazywa się czynnikiem (rozkładem) Boltzmanna, jest to także bardzo ważna wielkość w fizyce statystycznej. Rozkład $P(v)$ należy rozumieć dokładnie tak, jak funkcję gęstości prawdopodobieństwa w statystyce matematycznej, np. funkcję Gaussa. Kształt rozkładu Maxwella prezentujemy na Rysunku 9.5.. Jest to niesymetryczna krzywa dzwonowa, która osiąga wartości zerowe w punktach $v = 0$ i w nieskończoności. To znaczy, że cząsteczek gazu o bardzo dużych prędkościach jest naprawdę bardzo mało, jest to znikoma frakcja wszystkich cząsteczek. Podobnie, cząsteczek o bardzo małych, bliskich 0, prędkościach jest też niewiele. Co ciekawe i ważne, temperatura T jest jedynie, jak mówimy, parametrem rozkładu Maxwella, to znaczy wpływa na jego kształt, ale nie zależność od v .

Podamy teraz najważniejsze prędkości charakterystyczne rozkładu:

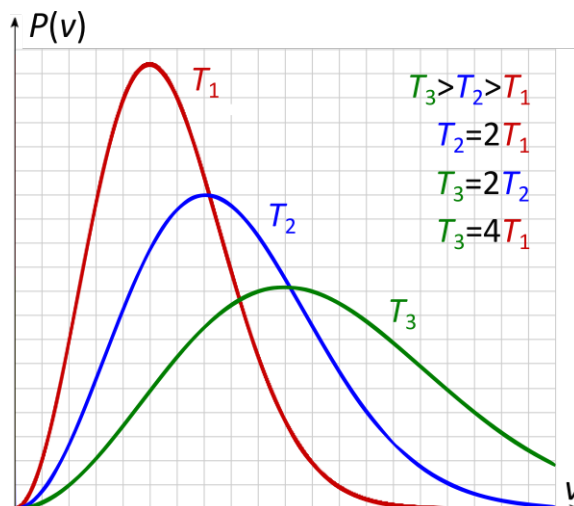
prędkość najbardziej prawdopodobna (maksimum rozkładu $P(v)$)	$v_{max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$	(9.38.)
prędkość średnia (wartość oczekiwana $P(v)$)	$v_{sr} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$	
średnia prędkość kwadratowa (drugi moment $P(v)$)	$v_k = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$	
relacja prędkości	$v_{max} < v_{sr} < v_k$	

Średnia prędkość kwadratowa obliczona na podstawie rozkładu Maxwella jest taka sama, jak ta obliczona z zasady ekwipartycji energii, co świadczy o spójności teorii.

Kolejnym parametrem charakteryzującym cząsteczki gazu, obok energii kinetycznej i prędkości, jest **średnia droga swobodna**, którą oznaczymy przez $\bar{\lambda}$. Jest to średnia odległość, jaką pokonuje cząsteczka (w ruchu prostoliniowym) pomiędzy kolejnymi zderzeniami z innymi cząsteczkami. Spodziewamy się, że $\bar{\lambda}$ powinno zależeć od prędkości, a więc bardziej bezpośrednio od energii, czy wręcz zupełnie bezpośrednio od temperatury. Tak rzeczywiście jest. Ponadto, $\bar{\lambda}$ zależy też od koncentracji cząsteczek, a więc pośrednio od ciśnienia gazu. Okazuje się, że średnia droga swobodna zależy też od rozmiaru cząsteczki. Podsumowując:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}, \quad \text{gdzie:} \quad \begin{cases} n = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T} \\ \sigma = \pi d^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{k_B T}{p\sqrt{2}\pi d^2} \quad (9.39.)$$

W powyższym wyprowadzeniu: $n = \frac{N}{V}$ - koncentracja (ilość cząsteczek na jednostkę objętości); p - ciśnienie gazu; d - (efektywna) średnica cząsteczki (w przybliżeniu sztywnej kulki). Średnia droga swobodna zależy od rodzaju gazu jedynie poprzez wielkość jego cząsteczek.



Rysunek 9.5.: Rozkład Maxwella $P(v)$ wg definicji (9.37.) dla trzech temperatur: $T_3 = 2T_2 = 4T_1$. Temperatura jest parametrem rozkładu. Wraz ze wzrostem temperatury maksimum rozkładu przesuwają się w stronę większych prędkości i obniża, ale pole pod krzywą się nie zmienia.

Przykłady

1. Oszacuj koncentrację cząsteczek powietrza w warunkach normalnych (w przybliżeniu gazu doskonałego).

W warunkach normalnych 1 mol gazu zajmuje objętość $V_{mol} = 22,4 \text{ dm}^3$. Ten znany z chemii w liceum fakt łatwo obliczymy na podstawie równania Clapeyrona:

$$V_{mol} = \frac{(n=1)RT}{p} = \frac{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \cdot 298 \text{ K}}{101300 \text{ Pa}} = 0,0224 \text{ m}^3$$

W jednym molu mamy N_A (liczbę Avogadry) cząsteczek. Zatem koncentracja:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{mol}} = \frac{N_A p}{RT} \approx 2,5 \cdot 10^{25} \text{ 1/m}^3$$

Koncentracja powietrza w warunkach normalnych jest rzędu 10^{25} cząsteczek/ m^3 .

2. Azot o temperaturze pokojowej zamknięto w butli pod ciśnieniem atmosferycznym. Ile wynosi średnia energia kinetyczna, średnia prędkość i średnia droga swoboda cząsteczek azotu?

Do rozwiązania zadania potrzebujemy masy pojedynczej cząsteczki azotu N_2 i jej efektywnej średnicy. Za d przyjmijmy ok. $3 \text{ Å} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, co znamy np. z tablic lub internetu. Masę cząsteczki ustalimy na podstawie układu okresowego. Masa molowa N_2 wynosi $\mu_{N_2} = 28 \text{ g/mol}$, zatem jedna cząsteczka waży $m_{N_2} = \frac{\mu_{N_2}}{N_A} = 4,65 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Azot N_2 jest dwuatomowy, więc $f = 5$. Możemy teraz wykorzystać podane wcześniej wzory, aby obliczyć szukane wartości.

Średnia energia kinetyczna (9.34.): $\bar{E}_k = \frac{f}{2} k_B T \approx 10^{-20} \text{ J} \approx 0,6 \text{ eV}$.

Średnia prędkość (9.38.): $v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_{N_2}}} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Dużo!

Średnia droga swoboda (9.39.): $\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{p \sqrt{2} \pi d^2} = 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,32 \mu\text{m}$. Mało!

Wszystkie powyższe wyniki są bardzo typowego rzędu wielkości dla gazów w warunkach normalnych.

Zadania

1. Oblicz C_V i C_p gazów 1-, 2- i 3-atomowych.
2. Energia wewnętrzna gazu, który w wyniku pewnej przemiany oddał do otoczenia 100 J ciepła, zmalała o 200 J. Jaką pracę wykonał gaz? Czy gaz uległ sprężeniu, czy rozprężeniu w wyniku przemiany?
3. Zaobserwowano, że kulka stalowa wrzucona do gorącej wody zmienia objętość o 1%. Temperatura początkowa kulki to 0 °C, a współczynnik rozszerzalności liniowej stali $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$. Jaka jest temperatura wody gorącej?
4. Oblicz pracę wykonaną nad gazem przy izotermicznym rozprężaniu 10 moli azotu od objętości 100 dm³ do objętości 150 dm³ w temperaturze pokojowej. Ciśnienie początkowe jest równe ciśnieniu atmosferycznemu. Jakie ciśnienie ma azot po tej przemianie?
5. Dwa mole gazu doskonałego, którym jest azot N₂, o temperaturze początkowej równej $t_0 = 27^\circ\text{C}$ w pierwszym etapie zostały izobarycznie ściśnięte do połowy swojej objętości. Z kolei w drugim etapie gaz podlega przemianie izochorycznej, w trakcie której ciśnienie gazu rośnie dwukrotnie. Oblicz ciepło pobrane przez gaz oraz pracę wykonaną nad gazem w kolejnych przemianach. Ile wynoszą: zmiana energii wewnętrznej, ciepło i praca po obu przemianach gazu. Przedstaw przemiany na wykresie (p, V). Stała gazowa $R = 8,31 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$.
6. Wyprowadź wzór na pracę gazu w przemianie adiabatycznej, gdy (i) znasz skrajne temperatury T_1 i T_2 (bardzo proste) i (ii) gdy znasz skrajne objętości V_1 i V_2 . Dodatkowo znany wykładnik adiabaty κ i liczbę moli n .
7. Wyprowadź wzór na sprawność cyklu Otto, podany w Podrozdziale 9.4..
8. Silnik cieplny realizuje cykl, który na diagramie (p, T) tworzy prostokąt o wierzchołkach: $(5p_0, T_0)$, $(5p_0, 3T_0)$, $(2p_0, 3T_0)$, $(2p_0, T_0)$. (a) Narysuj ten cykl na diagramach (p, T) i (p, V). (b) Nazwij 4 procesy tego cyklu. (c) Oblicz sprawność cyklu i (d) porównaj ją ze sprawnością cyklu idealnego Carnota. Gazem roboczym jest argon.
9. Oblicz zmiany entropii na każdej z gałęzi dwuetapowej przemiany z Rysunku 9.2.b (Przykład 4 z Podrozdziału 9.3.). Następnie oblicz całkowitą zmianę entropii dwoma sposobami: sumując poprzednie wyniki oraz licząc $\Delta S_{1 \rightarrow 3}$. Jaki wniosek możesz wyciągnąć na tej podstawie?
- 10.* Wykazać, że entropię mieszania $\Delta S_{mix} = S_2 - S_1$ przy rozprężaniu N cząsteczek gazu od objętości V do $2V$ można wyrazić przez $\Delta S_{mix} = Nk_B \ln 2$. *Wskazówka.* Trzeba skorzystać z definicji mikroskopowej entropii (9.31.).
11. Oblicz średnią drogę swobodną i średnią energię kinetyczną całego gazu, którym jest metan, w temperaturze 100°C pod ciśnieniem 2 atm. Za średnicę cząsteczki CH₄ przyjmij 3,8 Å.

- 12.* Dla pewnego gazu zmierzono czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami równy 51 ps i średnią energię kinetyczną na pojedynczą cząsteczkę 9,4 meV. Pomiaru dokonano w temperaturze -200°C pod ciśnieniem normalnym. Oszacuj co to za gaz. *Wskazówki.* Załóż ruch jednostajny cząsteczki z prędkością równą prędkości średniej z rozkładu Maxwella (jak wtedy wyrazić czas na drodze między kolejnymi zderzeniami?). Przyjmij średnicę kinetyczną cząsteczki 2,6 Å.

Rozdział 10.

Szczególna Teoria Względności

W tym rozdziale zajmiemy się mechaniką relatywistyczną, która opisuje ruch ciał przy bardzo dużych prędkościach. Okazuje się, że kinematyka i dynamika, jakie dotąd poznaliśmy (tworząc razem mechanikę klasyczną) są jedynie przybliżeniem ogólniejszej teorii. Oczywiście słusznym, jeśli prędkości ciał, cząstek, układów są niewielkie w porównaniu z prędkością światła. Mechanikę klasyczną nazywamy też nierelatywistyczną. Nasze rozważania w tym rozdziale ograniczymy głównie do kinematyki relatywistycznej, chociaż na koniec rozdziału omówimy krótko także elementy dynamiki relatywistycznej. Mechanika relatywistyczna opiera się na dwóch podstawowych teoriach - Szczególnej i Ogólnej Teorii Względności Einsteina (STW i OTW). My zajmiemy się tylko pierwszą z nich - STW, dla której najpierw podamy 2 postulaty, na których zbudowana jest teoria.

I. Zasada względności. Prawa fizyki są jednakowe we wszystkich inercjalnych (poruszających się bez przyspieszeń) układach odniesienia. Inaczej: Wszystkie inercjalne układy odniesienia są równoważne i zawsze można znaleźć ogólne transformacje jednego układu do drugiego - nazwiemy je *transformacjami Lorentza*, o których powiemy później. Zasadę względności stosowaliśmy już wielokrotnie w kontekście mechaniki klasycznej (mówiliśmy, że wybór układu odniesienia nie ma wpływu na fizykę - jest zupełnie dowolny, a skoro tak, to wybieraliśmy „najwygodniejszy”). Tam obowiązywały *transformacje Galileusza* dla układów inercjalnych, z których otrzymaliśmy prawo składania prędkości (problemy typu: samolot na wietrze, łódka na wodzie, ruch jednego ciała względem drugiego).

II. Niezmienniczość prędkości światła w próżni. Prędkość światła w próżni (oznaczona jako c i równa $c = 299\,792\,458\text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$) jest stała i taka sama dla wszystkich obserwatorów z układu inercjalnego i nie zależy od kierunku ani prędkości samych obserwatorów. Co więcej, jest to największa prędkość, jaką może uzyskać obiekt w próżni (jest to wynikiem wspomnianych transformacji Lorentza). Należy przy tym pamiętać, że cały czas mówimy o próżni, jako ośrodku, w którym poruszają się obiekty, w tym także światło. Obiekt w danym ośrodku materialnym może mieć prędkość większą niż prędkość światła w tym ośrodku (ale nie większą niż światło w próżni).

10.1. Relatywistyczny czynnik Lorentza

Wprowadzimy teraz wygodny w opisie relatywistycznym czynnik Lorentza, który będzie pojawiał się we wszystkich wzorach i równaniach STW. Niech v będzie prędkością obiektu, a c prędkością światła w próżni. Stosunek tych prędkości, v/c oznacza się czasem przez β . Czynnik Lorentza γ jest zdefiniowany jako:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (10.1.)$$

Łatwo zauważyć, np. rysując wykres $\gamma(v)$, jak na Rysunku 10.1., że dla bardzo małych v , czynnik Lorentza przyjmuje wartość bliską 1, natomiast gwałtownie „wybucha” do nieskończoności przy $v \rightarrow c$. Przykładowo:

Tabela 10.1.: Wartości czynnika Lorentza dla przykładowych prędkości (wyrażonych jako ułamek prędkości światła).

prędkość $\beta = v/c$	0,05	0,1	0,5	0,75	0,9	0,95	0,99	0,995	0,9999
czynnik Lorentza γ	1,001	1,005	1,15	1,51	2,29	3,20	7,09	10	70,7

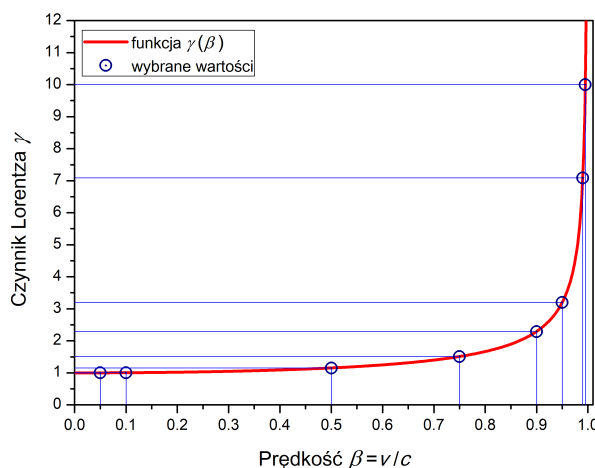
W przypadku małych prędkości (powiemy: w przybliżeniu klasycznym) czynnik γ możemy śmiało przyjąć jako równy 1, albo wykonać przybliżenie w postaci rozwinięcia w szereg Taylora wokół $v = 0$. Wówczas wzory relatywistyczne przechodzą w klasyczne. Zachodzi pytanie: kiedy (przy jakich prędkościach) musimy użyć już opisu relatywistycznego, a kiedy możliwy jest jeszcze opis klasyczny? Do tego pytania nawiązuje Przykład 3 poniżej. Granica, o której mowa, nie jest bardzo precyzyjna i zależy od naszej „umowy”. Najczęściej przyjmuje się, że opis relatywistyczny należy zastosować przy prędkościach powyżej 10% prędkości światła (choć niektórzy autorzy mówią tu o progu 1%, a niektórzy nawet 30%). Pytamy tutaj bowiem o ew. błąd, jaki popełniamy stosując wzór klasyczny do problemu relatywistycznego. Zauważmy, że przy $v = 0,1c$, wielkość czynnika Lorentza to $\gamma = 1,005$ (patrz: Tabela 10.1.), a więc wciąż stosunkowo niewiele więcej niż 1.

10.1.1. Masa relatywistyczna i pęd relatywistyczny

Jest kwestią światopoglądową na mechanikę relatywistyczną, czy wprowadzać pojęcie masy relatywistycznej, czy nie. Niektórzy autorzy podają definicję masy relatywistycznej:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (10.2.)$$

jako odpowiednika masy w problemach relatywistycznych. Wielkość m_0 jest przy tym tzw. masą spoczynkową, czyli masą ciał, cząstek i obiektów w spoczynku. Masa spoczynkowa elektronu wynosi $m_{0,e} = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, podczas gdy elektron rozpędzony (np. w akceleratorze) do prędkości $v = 0,9c$ ma masę $26,4 \cdot 10^{-31}$ kg = $2,9 m_{0,e}$, a więc ponad dwukrotnie większą. Możemy więc rozumieć to tak, że poruszająca się z prędkością relatywistyczną cząstka „nabiera” masy, wraz ze wzrostem prędkości staje się coraz cięższa. Można uzasadnić pojęcie masy relatywistycznej poprzez definicję masy jako miary bezwładności ciała (im większa masa



Rysunek 10.1.: Wykres zależności czynnika Lorentza od prędkości (czerwona linia). Niebieskimi punktami zaznaczono dane z Tabeli 10.1..

ciała, tym trudniej zmienić jego ruch, co rzeczywiście zachodzi przy dużych prędkościach dla każdego obiektu). Trudno nam zinterpretować fizycznie pochodzenie czy też przyczynę tej zwiększającej się masy. Dlatego niektórzy autorzy odrzucają hipotezę masy relatywistycznej, rezygnując całkowicie z tego pojęcia. Masa jest jedna i niezmienna, i jest to masa spoczynkowa (wtedy $m = m_0$). Zamiast, wprowadza się relatywistyczny pęd, który zdefiniowany jest następująco:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad m_0 - \text{masa spoczynkowa} \quad (10.3.)$$

Oczywiście, jeśli przyjąć występowanie masy relatywistycznej (wzór 10.2.), to pęd wynosi $p = mv = \gamma m_0 v$. Widzimy, że definicja pędu w STW jest analogiczna do definicji znanej z mechaniki klasycznej, przy czym uwzględniamy dodatkowo czynnik Lorentza. Stosowanie obu tych koncepcji - masy relatywistycznej i pędu relatywistycznego - prowadzi do tej samej fizyki. Różnica jest tylko, jak już mówiliśmy, światopoglądowa. Fizycy cząstek elementarnych i wysokich energii wręcz często nie rozróżniają tych pojęć i mówiąc „pęd cząstki” mają na myśli ich masę relatywistyczną.

Pewną trudność koncepcyjną stanowi masa cząstek takich jak foton (kwant światła), czy fonon (kwant drgań sieci krystalicznej). Są to tzw. cząstki bezmasowe, co oznacza, że nie mają masy spoczynkowej ($m_0 = 0$). Można jednak podać ich masy relatywistyczne lub pędy relatywistyczne, bo przecież możemy je zmierzyć (także ich energie). Jeśli mamy do czynienia np. ze światłem niebieskim, to możemy dość precyzyjnie określić energię fotonów w takiej wiązce światła, a więc ich pęd, a więc także ich masę (relatywistyczną). Ponieważ foton (i inne tego rodzaju cząstki) nie ma masy spoczynkowej, a ma masę relatywistyczną, to wniosek jest taki, że nie istnieją fotony, które by się nie poruszały - nie ma fotonów spoczywających. Co więcej, muszą one poruszać się z prędkością światła, aby czynnik Lorentza był dla nich równy ∞ . Fotony nazywamy także czasem cząstkami niematerialnymi - nie posiadającymi masy (spoczynkowej). Podobnie, rozumując odwrotnie, żadna cząstka materialna nie może osiągnąć prędkości światła w próżni. Musiałaby bowiem mieć nieskończoną masę, a więc i nieskończoną energię (por. z dyskusją w następnym rozdziale).

10.2. Energia relatywistyczna

Albert Einstein jest autorem koncepcji *równoważności masy i energii*, co zapisujemy w postaci słynnego wzoru *Einsteina*:

$$E = mc^2 \quad E = \gamma m_0 c^2 \quad (10.4.)$$

Koncepcja ta bierze swój początek z obserwacji, że w wyniku wypromieniowania przez ciało energii E jego masa (relatywistyczna) maleje o wielkość E/c^2 , co leży u podstawy takich pojęć jak *energia wiązania* czy *ubytek masy* w zagadnieniach fizyki jądrowej i atomowej. Wzór Einsteina stosujemy w mechanice relatywistycznej jako definicję energii całkowitej ciała. Energia całkowita jest równa sumie energii spoczynkowej E_0 (związanej z masą spoczynkową; ma ją każde ciało obdarzone masą) i kinetycznej E_k (związanej z ruchem):

$$E = E_0 + E_k \quad \Leftrightarrow \quad mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + E_k \quad (10.5.)$$

Energia kinetyczna przy tym nie może być zdefiniowana klasycznym wzorem: $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$, ani $E_k = \frac{p^2}{2m_0}$. Wzory te obowiązują jedynie w mechanice nierelatywistycznej. W STW energię kinetyczną możemy obliczyć jedynie za pomocą wzoru wynikającego z (10.5.):

$$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (10.6.)$$

Definicja energii (wzory (10.4.) i (10.5.)) dotyczy cząstek materialnych, obdarzonych masą. Dla fotonu energię zdefiniujemy inaczej, poprzez pęd, co omówimy w Podrozdziale 10.2.1..

Przy okazji dyskusji o energii relatywistycznej poznamy nową jednostkę energii, często używaną w fizyce relatywistycznej. Jednostka ta ma swoje uzasadnienie w definicji energii kinetycznej uzyskanej przez ładunek elektryczny w polu elektrycznym. *Elektronowolt* (eV) to jednostka energii równoważna energii kinetycznej 1 elektronu (ładunek elektryczny $1e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, C - kulomb) przyspieszonemu napięciem 1 V (V - wolt). W jednostkach podstawowych SI: $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. W poniższej Tabeli 10.2. podano przykładowe wielkości energii wyrażone w jednostkach eV. Przy pomocy tej jednostki wygodnie wyraża się się też inne niż energia wielkości fizyczne, np. masa m [eV/ c^2], pęd p [eV/ c]

Tabela 10.2.: Masy spoczynkowe m_0 i energie spoczynkowe E_0 wybranych ciał.

Obiekt	elektron	proton	cząstka α	cząsteczka H_2O	piłka golfowa
m_0 [kg]	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$1,673 \cdot 10^{-27}$	$6,64 \cdot 10^{-27}$	$29,9 \cdot 10^{-27}$	0,045
m_0 [eV/ c^2]	511 keV/ c^2	938 MeV/ c^2	3,73 GeV/ c^2	16,78 GeV/ c^2	$2,5 \cdot 10^{34}$ eV/ c^2
E_0 [eV]	511 keV	938 MeV	3,73 GeV	16,78 GeV	$2,5 \cdot 10^{34}$ eV

Z powyższej tabeli widzimy, że jednostka eV jest wygodna w przypadku obiektów o masach naprawdę małych (i rozmiarach subatomowych). Dla obiektów w skali makro nie znajduje zastosowania. W poprzednim podrozdziale mówiliśmy o granicy relatywistycznej dla prędkości, powyżej której należy stosować wzory relatywistyczne. Jako ćwiczenie dla Czytelnika zostawiamy wykazanie, że granica $v = 10\% c$ oznacza granicę dla energii $E_k = 0,5\% m_0 c^2$.

Przykłady

1. Jaką energię całkowitą ma (a) samochód o masie 2 t rozpędzony do prędkości 100 km/h, (b) elektron o energii kinetycznej 100 keV?

Energię całkowitą obliczymy ze wzoru (10.5.), natomiast energie spoczynkowe ze wzoru (10.4.) za masę kładąc masę spoczynkową. Energię kinetyczną samochodu obliczymy ze wzoru nierelatywistycznego, bo $v = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s} \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Energię kinetyczną elektronu podano w elektronowoltach. Zatem:

(a) $E_k = \frac{mv^2}{2} = 7,7 \cdot 10^5 \text{ J}$, $E_0 = mc^2 = 1,8 \cdot 10^{20} \text{ J}$. Widzimy, że energia spoczynkowa samochodu jest o wiele rzędów wielkości większa niż energia kinetyczna (byłoby tak nawet przy prędkości 300 km/h jak w przypadku Ferrari, czy nawet prędkości dźwięku 340 m/s jak w przypadku myśliwca). Możemy więc śmiało powiedzieć, że dla ciał nierelatywistycznych (przy $v \ll c$) całkowita energia relatywistyczna jest w zasadzie równa energii spoczynkowej. inaczej będzie dla cząstki subatomowej.

(b) $E_k = 100 \text{ keV}$, z Tabeli 10.2. wiemy, że dla elektronu $E_0 = 511 \text{ keV}$. Energia całkowita: $E = E_0 + E_k = 611 \text{ keV}$. Energia kinetyczna elektronu stanowi więc niemal 1/5 energii spoczynkowej i niemal 1/6 całkowitej energii relatywistycznej. Ciekawym wydaje się być pytanie o prędkość takiego elektronu, którego energia kinetyczna wynosi 100 keV - o tym w następnym przykładzie. Na razie z pewnością możemy powiedzieć, że taki elektron musiałby być przyspieszony napięciem 100 kV np. w akceleratorze, aby osiągnąć energię (całkowitą) 611 keV.

2. W mechanice nierelatywistycznej prędkość można powiązać z energią kinetyczną za pomocą wzoru $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$. Wyprowadź relatywistyczny wzór na prędkość jako funkcję energii kinetycznej. (a) Ile wynosi prędkość samochodu o masie 2 t, którego energia kinetyczna to 225 kJ? (b) Jaka jest prędkość elektronu o energii 100 keV? (c) Jaka jest prędkość protonu, którego energia kinetyczna jest równa 49% energii spoczynkowej? Przekształcając wzór (10.6.) możemy wyliczyć parametr β , a więc i prędkość:

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m_0 c^2} + 1 \right)^2} \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m_0 c^2} + 1 \right)^2}} \quad (10.7.)$$

(a) Prędkość samochodu możemy policzyć zarówno ze wzoru klasycznego, jak i relatywistycznego. Mamy: $v_{\text{klas}} = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 15 \text{ m/s}$ (wynik ścisły). Zauważmy, że dla samochodu $E_k/m_0 c^2 = 1,25 \cdot 10^{-15} \ll 1$, zatem czynnik ten można śmiało pominąć (spróbuj wykonać na kalkulatorze sumę: $1 + 1,25 \cdot 10^{-15}$, otrzymasz po prostu 1). Zatem $v_{\text{rel}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m_0 c^2} + 1 \right)^2}} \approx c \sqrt{1 - \frac{1}{1}} \approx 0$. Rzeczywiście $v = 15 \text{ m/s} \ll c$, a więc prawie

0. Aby pomocy wzoru relatywistycznego udało się nam policzyć prędkość obiektu bardzo powolnego, musielibyśmy zastosować przybliżenie w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy. Zobaczmy efekt takiego postępowania w następnym przykładzie.

(b) Dla elektronu sprawa jest bardziej oczywista, bo przy $E_k/m_0 c^2 = 0,196$ zastosujemy wzór relatywistyczny. Stąd $v_{\text{rel}} = 0,4c$. Spróbujmy użyć wzoru klasycznego: $v_{\text{klas}} = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ keV}}{511 \text{ keV}/c^2}} = 0,55c$. Zwróćmy uwagę, jaka duża jest rozbieżność w wynikach. Wzór klasyczny ewidentnie zawyża wartość prędkości i przy $E_k = m_0 c^2$ podaje

wartość $v_{\text{klas}} = c$.

(c) Skoro $E_k = 0,49 m_0 c^2$, to $v_{\text{rel}} = 0,74 c$, natomiast nierelatywistycznie (błędnie): $v_{\text{klas}} = 0,99 c$.

3. Pokaż, że klasyczny wzór na energię kinetyczną $E_k = \frac{mv^2}{2}$ jest przybliżeniem wzoru relatywistycznego dla małych prędkości. Jaki błąd (w procentach) popełnimy stosując wzór klasyczny przy prędkości $v = 10\% c$?

Skorzystamy tutaj z matematycznego rozwinięcia funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ w szereg Taylora wokół punktu $x = 0$. Dokładnie taką postać funkcyjną ma zależność $\gamma(\beta)$, gdzie $\beta = v/c$. Z tablic matematycznych odczytujemy dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$, gdzie x to będzie nasze β . Zatem przybliżony wzór (10.6.) na energię kinetyczną ma postać:

$$E_k \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 - 1 \right) = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \beta^2 = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

co należało dowieść. Jaki błąd popełniamy stosując wzór klasyczny przy $\beta = 0,1$? Obliczmy najpierw energie kinetyczne przy pomocy obu wzorów: $E_{k,\text{rel}} = 0,00504 m_0 c^2$, $E_{k,\text{klas}} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta^2 = 0,005 m_0 c^2$.

$$\text{błąd względny} = \frac{E_{k,\text{rel}} - E_{k,\text{klas}}}{E_{k,\text{rel}}} = 7,5 \cdot 10^{-3} = 0,75\%$$

Zauważmy, że przy całkiem sporej prędkości cząstki, równej $v = 10\% c$, błąd popełniany przy stosowaniu wzoru klasycznego zamiast relatywistycznego jest wciąż niewielki, na poziomie poniżej 1%.

10.2.1. Niezmiennik relatywistyczny

Pokażemy teraz, że pewna wielkość jest w STW stała. Jest nią tzw. niezmiennik relatywistyczny energii-pędu (w STW znamy kilka niezmienników - wielkości, które nie zależą od układu odniesienia). W następnych podrozdziałach poznamy wzory na transformacje Lorentza (położenia i czas oraz energii i pędu), tam wykażemy, że niezmienniki relatywistyczne rzeczywiście są niezmiennicze względem zmiany układu odniesienia. Niezmiennik relatywistyczny energii-pędu definiujemy następująco:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = \text{const.} \quad (10.8.)$$

co możemy łatwo wykazać, stosując wzór (10.5.) na całkowitą energię relatywistyczną i wzór (10.3.) na pęd:

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= (\gamma m_0 c^2)^2 - (\gamma m_0 v)^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 (c^2 - v^2) = \\ &= \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^4 \end{aligned} \quad (10.9.)$$

Wzór (10.8.) jest bardzo użytecznym wzorem, pozwalającym określić energię i pęd cząstek materialnych i niematerialnych. Pęd cząstek materialnych możemy zdefiniować przy pomocy energii całkowitej następująco:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} \quad (10.10.)$$

lub wykorzystując energię kinetyczną:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(E_k + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2} \quad (10.11.)$$

Zauważmy, że dla cząstek niematerialnych, takich jak foton, wzór także jest słuszny, jeśli położymy $m_0 = 0$. Zatem pęd cząstki niematerialnej związany jest z energią prostą relacją:

$$E = pc \quad \Rightarrow \quad p = \frac{E}{c} \quad (10.12.)$$

Przykłady

1. Oblicz pęd elektronu o energii kinetycznej 100 keV. Jaki jest pęd fotonu o energii równej całkowitej energii relatywistycznej tego elektronu?

Skorzystamy ze wzoru (10.11.), pamiętając, że dla elektronu $m_0 c^2 = 511$ keV. Pęd elektronu $p_e = 335$ keV/c = $1,79 \cdot 10^{-22}$ kg·m/s. Całkowita energia naszego elektronu to 611 keV, a pęd fotonu o takiej samej energii to $p_f = 611$ keV/c = $3,26 \cdot 10^{-22}$ kg·m/s.

2. Foton o energii 1 MeV rozprasza się na spoczywającym, swobodnym elektronie, wskutek czego elektron uzyskuje energię kinetyczną 200 keV. Oblicz energię rozproszonego fotonu. Pod jakim kątem rozproszył się foton?

Zadanie to, choć ma kontekst, wydawałoby się, dotyczący zaawansowanej fizyki, jest w istocie prostą realizacją zasad zachowania pędu i energii, bardzo podobną jak w przypadku zderzeń kulek. W istocie, i elektron, i foton możemy potraktować jak cząstki punktowe - punkty materialne (według obecnej wiedzy foton i elektron nie mają wewnętrznej struktury, możemy je więc traktować jak punkty obdarzone masami). Autor zadania zasugerował, że foton zmienił (rozproszył) energię w wyniku zderzenia, zatem mamy do czynienia z sytuacją podobną do zderzenia niesprężystego, o czym dyskutowaliśmy w Rozdziale 3.8., przy czym wiemy dokładnie na co poszła strata energii fotonu - na przyrost energii kinetycznej elektronu. Możemy więc skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej (w ujęciu relatywistycznym), aby wyznaczyć energię E'_f fotonu po rozproszeniu, a następnie z zasady zachowania pędu (w zapisie wektorowym), aby znaleźć kąt rozproszenia fotonu θ . Znamy energię padającego fotonu $E_f = 1$ MeV oraz energię spoczynkową $m_0 c^2 = 511$ keV i kinetyczną $E_k = 200$ keV elektronu.

$$\text{z.z.e.:} \quad E_f + m_0 c^2 = E'_f + m_0 c^2 + E_k \quad \Rightarrow \quad E'_f = E_f - E_k = 800 \text{ keV}$$

Zasadę zachowania pędu zapiszemy w postaci wektorowej, a ponieważ znamy energię, a nie pędy, użyjemy też wzorów (10.11.) i (10.12.):

$$\text{z.z.p.:} \quad \vec{p}_f + 0 = \vec{p}'_f + \vec{p}_e \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_e = \vec{p}_f - \vec{p}'_f \quad \Rightarrow \quad p_e^2 = p_f^2 + p_f'^2 - 2p_f p_f' \cos \theta$$

$$\text{stąd:} \quad \cos \theta = \frac{p_f^2 + p_f'^2 - p_e^2}{2p_f p_f'} = \frac{E_f^2 + E_f'^2 - (E_k^2 + 2E_k m_0 c^2)}{2E_f E_f'} = 0,87 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 29,3^\circ$$

Zadania

1. Oblicz prędkość cząstki, której całkowita energia wynosi $2m_0c^2$. Czy wartość ta zależy od rodzaju cząstki (np. elektron, proton, cząstka α)?
2. Podaj wzór na czynnik Lorentza wyrażony przez całkowitą energię cząstki.
3. Przy jakiej energii kinetycznej E_k prędkość cząstki, liczona przy pomocy wzoru nie-relatywistycznego (a więc błędnie), wyniesie c ? Jaka jest prawdziwa prędkość takiej cząstki?
4. Oblicz prędkość elektronu, który ma taki sam pęd, co foton o energii 1 GeV.
5. Proton o energii 1 GeV padł na spoczywający antyproton (cząstkę o takich samych parametrach fizycznych, ale ujemnym ładunku elektrycznym) i anihilował (cała energia układu proton-antyproton zamieniła się w energię dwóch nowo-wytworzonych fotonów). Oblicz energię każdego fotonu powstałego w procesie anihilacji i kąt pomiędzy kierunkami ruchu fotonów.

10.3. Transformacja Lorentza

Założmy, że mamy dwa inercjalne układy odniesienia S i S' , przy czym układ S' (nazywany *primowanym*, albo *własnym*) porusza się względem S (zwanego *nieprimowanym*, albo *laboratoryjnym*) ze stałą prędkości V (zwaną prędkością unoszenia). Prędkość V to prędkość układu S' względem S mierzona w układzie S (oczywiście prędkość własna układu S' jest 0). Założmy dodatkowo, że osie x', y', z' układu S' są równoległe do osi x, y, z układu spoczywającego S (patrz: Rysunek 10.2.). Z oboma układami zwiążemy ich własne zegary, które będą mierzyć czasy własne t' i t . Powiedzmy też, że w chwili początkowej $t = t' = 0$ początki obu układów się pokrywały. W mechanice nierelatywistycznej transformacja współrzędnych (przestrzennych i czasu) z układu nieprimowanego do primowanego ma postać transformacji Galileusza:

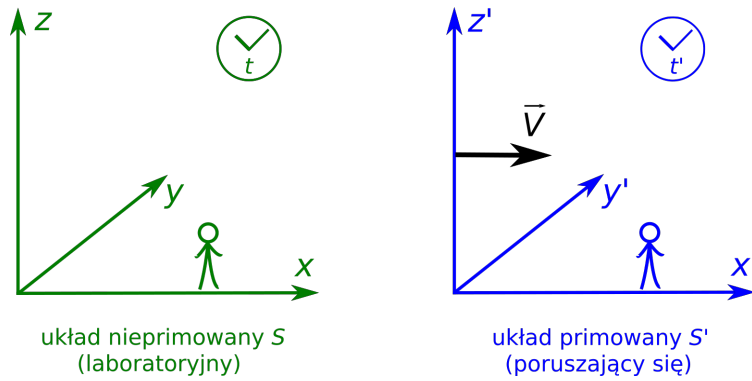
$$\begin{aligned} \text{Transformacja Galileusza:} \quad & \begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \end{aligned} \tag{10.13.}$$

W szczególności zwróćmy uwagę, że czas „biegnie” w obu układach tak samo. Okazuje się, że przy prędkościach relatywistycznych, transformacja Galileusza nie znajduje zastosowania. W STW obowiązuje transformacja Lorentza o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \text{Transformacja Lorentza:} \quad & \begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{aligned} \end{aligned} \tag{10.14.}$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ jest czynnikiem Lorentza. Nie będziemy się tutaj zajmować wyprowadzeniem powyższych wzorów, choć dałoby się to oczywiście zrobić.

Zauważmy, że tym razem transformacji podlega również czas, w dodatku transformacja



Rysunek 10.2.: Dwa układy odniesienia w STW: **nieprimowany** S (laboratoryjny, spoczywający) oraz **primowany** S' (własny, poruszający się z prędkością unoszenia $\vec{V}$ względem S).

czasu zależy nie tylko od prędkości unoszenia układu S' względem S , ale także współrzędnej przestrzennej x z układu S . To zaskakujący rezultat STW, który znacząco zmienia fizykę obiektów o prędkościach relatywistycznych. Czas staje się w STW czwartą współrzędną, obok współrzędnych przestrzennych (mówimy nawet: współrzędna czasowa). Wprowadzamy pojęcie *czasoprzestrzeni* o 4 wymiarach (3 współrzędne przestrzenne i 1 współrzędna czasowa). Z transformacji Lorentza wynika szereg ciekawych efektów, które nierzadko przeczą naszej intuicji. Niektóre z nich omówimy w kolejnych podrozdziałach. W STW mamy też do czynienia z tzw. paradoksami, jak np. paradoks bliźniąt, paradoks garażu (zwany też paradoksem drabiny), a także kwestie takie jak podróżowanie w czasie itp. Tym nie będziemy się zajmować w niniejszym skrypcie.

Przypomnijmy, że założyliśmy tylko ruch wzdłuż osi x obu układów, dlatego transformują się tylko te współrzędne. Gdyby wektor prędkości był skierowany inaczej, to zapisalibyśmy transformacje dla wszystkich składowych przestrzennych dokładnie tak jak w pierwszej linii zestawu równań (10.14.) (ze składowymi V_x, V_y, V_z wektora prędkości unoszenia $\vec{V}$ przy odpowiednich składowych położenia), a w transformacji czasu pojawiłoby się wyrażenie $\vec{V} \circ \vec{r}$, gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$.

Czytelnik łatwo sam może odwrócić relacje (10.14.) i wyprowadzić transformację odwrotną Lorentza, także często przydatną:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \end{aligned} \quad \text{Transformacja odwrotna Lorentza:} \quad (10.15.)$$

Obie postacie transformacji Lorentza są „symetryczne”, przez co łatwo zgadnąć drugą, gdy pamięta się pierwszą.

Podamy teraz kolejny niezmiennik STW. Będzie to tzw. niezmiennik czasoprzestrzenny, którym jest **interwał czasoprzestrzenny**, czyli odległość między dwoma zdarzeniami w czasoprzestrzeni. Interwał czasoprzestrzenny zdefiniowany jest jako (w układzie S , podobną definicję można podać w układzie primowanym):

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \quad (10.16.)$$

W Przykładzie udowodnimy sobie, że interwał czasoprzestrzenny jest rzeczywiście niezmiennikiem STW. Transformację Lorentza można podać także dla innych wielkości fizycznych,

np. składowych pola elektrycznego $\vec{E}$ i magnetycznego $\vec{B}$ (odpowiednik relatywistyczny równań Maxwella), a także energii i pędu. Podamy transformację dla tego drugiego przypadku, czyli całkowitej energii relatywistycznej i pędu relatywistycznego (założymy znowu pomiar pędu wzdłuż jednej składowej x , zgodnej z kierunkiem wektora prędkości unoszenia $\vec{V}$):

$$\text{Transformacja Lorentza energii i pędu:} \quad \begin{aligned} E' &= \gamma(E - Vp) \\ p' &= \gamma\left(p - \frac{V}{c^2}E\right) \end{aligned} \quad (10.17.)$$

Przykłady

1. Wykaż, że interwał czasoprzestrzenny jest rzeczywiście niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Na podstawie wzorów (10.14.) zapiszemy odległości $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ oraz $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ między dwoma zdarzeniami (x'_1, t'_1) i (x'_2, t'_2) w czasoprzestrzeni i pokażemy, że różnica $(\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2$ jest równa takiej samej różnicy zapisanej w zmiennych nieprimowanych. Ograniczymy się tu tylko do x -owej współrzędnej przestrzennej, ponieważ przy naszych założeniach: $\Delta y' = \Delta y$ oraz $\Delta z' = \Delta z$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) \\ \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x) \end{cases} \\ &\Downarrow \\ &\begin{cases} (\Delta x')^2 = \gamma^2[(\Delta x)^2 - 2V\Delta x\Delta t + V^2(\Delta t)^2] \\ c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 - 2V\Delta x\Delta t + \frac{V^2}{c^2}(\Delta x)^2] \end{cases} \end{aligned}$$

Po odjęciu stronami ostatniej pary równań, otrzymujemy:

$$(\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 = \gamma^2 \left[(\Delta x)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - c^2(\Delta t)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right] = (\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

co należało wykazać. Posłużyliśmy się po drodze definicją czynnika Lorentza $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

2. Jeśli zmierzona w układzie laboratoryjnym energia elektronu wynosi $E = 2$ MeV, to jakie są energia i pęd elektronu w jego układzie własnym? Czy jest sens zadać podobne pytanie dla fotonu?

Musimy zastosować transformację Lorentza energii i pędu - wzór (10.17.). Znając energię elektronu, znajdziemy jego pęd ($p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2c^4} = 1,93$ MeV/c), oraz czynnik Lorentza (co jest treścią zadania 2 w Podrozdziale 10.2.1.). Na podstawie definicji energii relatywistycznej (10.5.): $\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = 3,91$. Zależność prędkości od energii pokazaliśmy w Przykładzie 2 w Podrozdziale 10.2. (wzór (10.7.)), stąd:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m_0c^2} + 1\right)^2}} = \dots = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2} = 0,97 c.$$

Zatem energia i pęd w układzie własnym elektronu będą równe:

$$E' = \gamma(E - Vp) = 0,511 \text{ MeV} \text{ oraz } p' = \gamma\left(p - \frac{V}{c^2}E\right) = 0 \text{ MeV}/c.$$

Energia w układzie własnym elektronu jest mniejsza, niż zmierzona w laboratorium (to wynika z transformacji Lorentza). Jest ona w dodatku równa energii spoczynkowej. Natomiast pęd elektronu w układzie własnym jest 0. Oba te wyniki nie dziwią - w układzie własnym elektron spoczywa.

Czy jest sens pytać o to samo w przypadku fotonu? Z niezmiennika relatywistycznego dla cząstki niematerialnej (wzór (10.12.)) wiemy, że dla fotonu $E_f = p_f c$, więc także $E'_f = p'_f c$. Niech nasz foton też będzie miał energię 2 MeV (w takim razie jego pęd to 2 MeV/c). Podstawmy do wzoru na transformację energii (pamiętamy, że prędkość fotonu wynosi c , a czynnik Lorentza przy tej prędkości wynosi $\gamma = \infty$):

$$E'_f = \gamma(E - Vp) = \gamma(E - V\frac{E}{c}) = \gamma E(1 - \frac{V}{c}) \xrightarrow{V=c} \infty \cdot E \cdot 0 = ?.$$

Podobnie będzie dla pędu. Spróbujmy inaczej wyliczyć tę granicę:

$$E'_f = \gamma E(1 - \frac{V}{c}) = E \sqrt{\frac{(1 - \frac{V}{c})^2}{1 - (\frac{V}{c})^2}} = E \sqrt{\frac{(1 - \frac{V}{c})^2}{(1 - \frac{V}{c})(1 + \frac{V}{c})}} = E \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} \xrightarrow{V=c} E \cdot 0 = 0$$

i analogicznie dla pędu: $p'_f = 0$. Jak to rozumieć? W układzie primowanym cząstka spoczywa (taka jest definicja tego układu odniesienia), zatem energia fotonu w jego układzie własnym powinna być równa jego energii spoczynkowej, a ta, jak wiemy, wynosi 0. Podobnie możemy pomyśleć o pędzie. Względem układu poruszającego się (primowanego) cząstka przecież spoczywa, więc jej pęd musi być 0. Zwróćmy uwagę na to, że takie rozważania są jednak czysto matematyczne i raczej hipotetyczne. Związujemy bowiem układ odniesienia z obiektem poruszającym się z prędkością światła. Żaden materialny obserwator nie jest w stanie osiągnąć prędkości światła, zatem pomiar energii fotonu w układzie poruszającym się z prędkością światła za pomocą dowolnych przyrządów pomiarowych jest niemożliwy. Czasem nawet mówi się, że nie istnieje układ własny fotonu.

10.3.1. Relatywistyczny efekt Dopplera

Zwróćmy uwagę na bardzo ciekawy wynik, który uzyskaliśmy przy okazji dyskusji problemu w Przykładzie 2 Podrozdziału 10.3.. Chodzi o wzór:

$$E' = E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (10.18.)$$

na transformację energii z układu S do układu S' , który porusza się z prędkością względną β . Wzór ten jest słuszny dla prędkości $\beta < 1$ (już wiemy, że przy $\beta = 1$, np. dla fotonu, wynik jest trywialny: $E' = 0$). Jest to nic innego, jak wzór na *relatywistyczny efekt Dopplera*. O efekcie Dopplera dyskutowaliśmy przy okazji fal w Rozdziale 7.3.1.. Wzór ten jest bardzo użyteczny w obliczeniach fizyki atomowej i cząstek elementarnych, gdy chcemy poznać energię (oraz pęd) cząstki w układzie poruszającym się, a dysponujemy wartością zmierzoną, lub odwrotnie.

Wzór (10.18.) określa, jak mówimy, podłużny efekt Dopplera. Jeżeli dodatkowo uwzględnimy, że układ primowany porusza się pod pewnym kątem θ względem osi x układu nieprimowanego, to możemy zapisać, że $p_x = p \cos \theta$. Powtarzając wyprowadzenie wzoru z Przykładu otrzymamy wzór na transformację energii w zależności od kąta między kierunkiem ruchu cząstki, a kierunkiem jej obserwacji (pełny efekt Dopplera):

$$E' = E \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{E'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)} \quad (10.19.)$$

Zauważmy, że wzór (10.19.) przechodzi we wzór (10.18.) przy kącie $\theta = 0^\circ$.

Wzór na efekt Dopplera najczęściej stosujemy dla światła (ogólnie: promieniowania elektromagnetycznego), które jest emitowane przez poruszające się z prędkością β źródło w

kierunku detektora ustawionego pod kątem θ względem kierunku ruchu źródła. Energia E' (oznaczana częściej E_0) jest wtedy energią własną fotonu, ale w rozumieniu energii fotonu wysyłanego ze źródła (np. poruszająca się z prędkością $0,5c$ cząstka α emituje kwant promieniowania o energii $E_0 = 100$ keV). Energia E jest natomiast energią rejestrowaną przez detektor z układu laboratoryjnego.

10.3.2. Relatywistyczne składanie prędkości

Transformacja Galileusza nie narzuca żadnego ograniczenia na prędkość względną dwóch ciał. Przykładowo, jeśli jedziemy samochodem 1 z prędkością 100 km/h, a z naprzeciwka zbliża się do nas samochód 2 o tej samej prędkości (lecz przeciwnym zwrocie), to nasza względna prędkość ma wartość 200 km/h. Czy prędkość względna fotonów poruszających się w przeciwne strony wynosi $2c$? Oczywiście nie. W tym podrozdziale wyprowadzimy relatywistyczny wzór na składanie prędkości. W przypadku klasycznym, wzór jest prosty i oczywisty. Jeśli zróżniczkujemy po czasie równanie (10.13.), otrzymamy:

$$v' = v - V \quad (10.20.)$$

gdzie $v = \frac{dx}{dt}$ i $v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}$ (bo $t' = t$) to prędkości obiektu w układzie spoczywającym i poruszającym się, a V to prędkość unoszenia. Wracając do przykładu z samochodami, prędkość samochodu 2 względem samochodu 1 wynosi: $v' = 100 - (-100) = 200$ km/h.

W przypadku relatywistycznym mamy również: $v = \frac{dx}{dt}$ i $v' = \frac{dx'}{dt'}$, przy czym transformacje położenia i czasu dane są tym razem wzorami (10.14.). Mamy zatem:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - Vdt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} \quad (10.21.)$$

Ostatecznie, wzór na relatywistyczne składanie prędkości jest następujący:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2}v} \quad (10.22.)$$

Jeśli zastosujemy go teraz do naszego przykładu z dwoma fotonami, to przy $v = c$ i $V = -c$ mamy $v' = \frac{c+c}{1+\frac{c}{c^2}c} = \frac{2c}{2} = c$. Prędkość względna dwóch obiektów o prędkościach równych c może być co najwyżej równa c .

W problemach dotyczących składania prędkości (obliczania prędkości względnej dwóch obiektów) prędkość jednego z nich wynosi v , a drugiego V - jest to prędkość unoszenia układu poruszającego się związanego z drugim obiektem. W kontekście obliczania prędkości względnej samochodu 2 względem naszego samochodu 1, będziemy rozumieć, że V jest prędkością samochodu 2, a v jest naszą własną prędkością (prędkością naszego samochodu 1). Oczywiście przy małych prędkościach (np. 100 km/h) wzór relatywistyczny z powodzeniem może być zastąpiony wzorem klasycznym.

Transformacja składowej poprzecznej

Pokazaliśmy przed chwilą, że prędkość obiektu transformuje się wg wzoru (10.22.). Wzór ten dotyczy składowej prędkości wzdłuż wektora prędkości unoszenia $\vec{V}$, a więc w kierunku osi x . Okazuje się, że składowa prędkości w kierunku osi poprzecznej (np. y lub z) również się transformuje. Nie jest tak, że prędkość v'_y zmierzona w układzie primowanym nie jest równa

v_y w układzie nieprimowanym. Analogicznie do składowej x , możemy wyprowadzić wzór na składanie prędkości w kierunkach poprzecznych:

$$\begin{cases} dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx) \end{cases} \Rightarrow v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2}v} \quad (10.23.)$$

gdzie v jest prędkością obiektu w układzie nieprimowanym wzdłuż kierunku x (czyli v_x). Analogiczny wzór można wyprowadzić dla składowej z . Zauważmy, że jeśli obiekt nie ma składowej prędkości wzdłuż kierunku ruchu (czyli $v = 0$), to transformacja prędkości w kierunkach poprzecznych jest prosta: $v'_y = v_y$, $v'_z = v_z$.

10.3.3. Relatywistyczna transformacja przyspieszenia*

Zupełnie analogicznie do wyprowadzenia wzoru na relatywistyczne składanie prędkości postąpimy w przypadku wzoru na transformację przyspieszenia. Znowu rozważmy tylko przypadek 1D (wektor prędkości unoszenia $\vec{V}$ wzdłuż osi x). Definicje przyspieszenia w układzie S i S' są proste: $a = \frac{dv}{dt}$ i $a' = \frac{dv'}{dt'}$. Potrzebujemy wyliczyć różniczkę prędkości dv' :

$$\begin{aligned} v' = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2}v} \Rightarrow dv' &= \frac{dv(1 - \frac{V}{c^2}v) + (v - V)\frac{V}{c^2}dv}{(1 - \frac{V}{c^2}v)^2} = \frac{dv(1 - \frac{V^2}{c^2})}{(1 - \frac{V}{c^2}v)^2} = \\ &= \frac{dv}{\gamma^2(1 - \frac{V}{c^2}v)^2} \end{aligned} \quad (10.24.)$$

Zatem pochodna prędkości po czasie w układzie primowanym (różniczkę dt' mamy z równania (10.21.)):

$$\frac{dv'}{dt'} = \frac{dv}{\gamma^2(1 - \frac{V}{c^2}v)^2} \cdot \frac{1}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\gamma^3(1 - \frac{V}{c^2}v)^2(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})} \quad (10.25.)$$

Ostatecznie, wzór na relatywistyczne składanie przyspieszeń jest następujący:

$$a' = \frac{a}{\gamma^3(1 - \frac{V}{c^2}v)^3} \quad (10.26.)$$

Bardzo nieoczywistym wynikiem STW jest to, że przyspieszenie obiektu z układu nieprimowanego, rejestrowane przez obserwatora z układu primowanego, zależy nie tylko od przyspieszenia w układzie nieprimowanym, ale także od prędkości obiektu w tym układzie. Jakie przyspieszenie spadającego swobodnie na powierzchni Ziemi jabłka zarejestruje załoga statku kosmicznego podróżującego z prędkością $0,5c$? Odpowiedź brzmi: to zależy. Od prędkości jabłka w danej chwili. Mianownik wyrażenia (10.26.) dla $V = 0,5c$ wynosi: (a) $\gamma^3 = (1,15)^3 \approx 1,5209$ na początku ruchu jabłka przy jego prędkości względem Ziemi $v = 0$; (b) $0,9999995\gamma^3 \approx 1,5209$ po 10 s spadku jabłka. W obu przypadkach różnica jest niezauważalna i rejestrowane przez załogę statku przyspieszenia jabłka wynoszą $a' \approx 0,66g$. Ruch jabłka w spadku swobodnym nie jest przecież relatywistyczny, stąd prędkość jabłka w różnych fazach jego spadku nie ma większego znaczenia.

Gdyby chodziło o elektron, przyspieszany w akceleratorze napięciem $U = 1$ MV na dystansie $d = 100$ m (a więc przyspieszenie elektronu w układzie nieprimowanym wynosi $a = \frac{eU}{m_0 d} = 1,76 \cdot 10^{15}$ m/s²), to po przebyciu drogi 100 m, jego prędkość wyniosłaby (energia kinetyczna elektronu przyspieszanego napięciem 1 MV wynosi 1 MeV): $v = 0,81c$ (wykorzystaliśmy wzór (10.7.)). Wtedy mianownik wyrażenia (10.26.) dla $V = 0,5c$ wyniósłby: $0,21\gamma^3 \approx 0,32$, a zmierzone przez załogę statku przyspieszenie elektronu byłoby: $a' = 3,12a = 5,49 \cdot 10^{15}$ m/s².

Zadania

1. Podaj współrzędne (x, t) w układzie laboratoryjnym dla elektronu poruszającego się z prędkością $0,9c$, jeśli w jego własnym układzie spoczywa on w początku układu współrzędnych, a na jego stoperze minęło 10 s od rozpoczęcia obserwacji.
2. Wyprowadź odwrotną transformację Lorentza - wzory (10.15.).
3. Analogicznie do Przykładu 1 udowodnij, że wyrażenie (10.8.) jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
4. Wykorzystując wzór na relatywistyczny efekt Dopplera (10.19.) oblicz, przy jakim kącie obserwacji zmierzona energia fotonu jest największa, a przy jakim najmniejsza. Jakie są te energie?
5. (*) Pod jakim kątem ustawiony był detektor fotonów w eksperymencie, w którym wiązka jonów uranu U^{91+} o energii $E_b = 80$ MeV/u (80 MeV na nukleon), wzbudzonych po przejściu przez tarczę, emituje kwanty promieniowania X o energii 100 keV, jeśli zmierzona przez ten detektor energia fotonów wyniosła 88 keV? *Wskazówka.* Energię kinetyczną jonów uranu U^{91+} można obliczyć jako $E_k = E_b \cdot A$, gdzie $A = 238$ to liczba masowa uranu. Energia spoczynkowa uranu może być obliczona jako Mc^2 , gdzie $M = m_n \cdot A$, a $m_n = 1,674 \cdot 10^{-27}$ kg jest średnią masą nukleonu (protonu i neutronu).
6. Przy pomocy wzoru (10.22.) oblicz prędkość względną dwóch samochodów jadących z prędkościami 100 km/h naprzeciw siebie. Czy wynik jest zgodny z przewidywaniami transformacji Galileusza?
7. Do atmosfery wpadają różne cząstki elementarne pochodzenia kosmicznego, jak np. protony, mezony, neutrina, także kwanty promieniowania elektromagnetycznego gamma o wysokich energiach. Wszystkie je nazywamy ogólnie *promieniowaniem kosmicznym*. Jeśli do atmosfery wpada foton gamma i proton o energii 10^{12} eV i obie cząstki poruszają się wzdłuż tej samej prostej, to jaka jest ich prędkość względem siebie?

10.4. Efekty relatywistyczne

10.4.1. Dylatacja czasu

Wiemy już, że czas „płyne inaczej” w układzie primowanym i nieprimowanym. Wynika to z transformacji Lorentza. Wobec tego długość trwania jakiegoś zdarzenia zmierzona przez obserwatorów w różnych układach będzie różna. Okazuje się, że czas zdarzenia w układzie

primowanym (własnym) jest najkrótszy. Czas zarejestrowany w układzie laboratoryjnym będzie dłuższy, co właśnie nazywamy *dylatacją czasu*. Mówiąc ogólniej:

Czas trwania zdarzenia zachodzącego w układzie odniesienia obserwatora spoczywającego względem zdarzenia rejestrowany przez obserwatora poruszającego się względem zdarzenia z prędkością V jest dłuższy. Czas własny jest najkrótszy.

Dylatację czasu możemy opisać równaniem:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \begin{array}{l} \Delta t' = \Delta t_0 : \text{czas „własny” zdarzenia} \\ \Delta t : \text{czas zarejestrowany w układzie} \\ \text{poruszającym się względem zdarzenia} \end{array} \quad (10.27.)$$

Pamiętamy, że zawsze $\gamma \geq 1$. Wyprowadzimy teraz powyższy wzór. Oczywiście $\Delta t = t_2 - t_1$ oraz $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Skorzystamy z odwrotnej transformacji Lorentza (10.15.):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2 \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1 \right) = \gamma \left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} (x'_2 - x'_1) \right) = \gamma \Delta t' \quad (10.28.)$$

W ostatnim przejściu położyliśmy $x'_2 - x'_1 = 0 \Rightarrow x'_2 = x'_1$, czyli zmiana położenia w układzie primowanym nie zachodzi, co oczywiście jest prawdą. Zdarzenie zachodzi w określonym miejscu w przestrzeni w układzie S' .

10.4.2. Kontrakcja długości

Kolejnym ciekawym efektem STW jest *kontrakcja (skrócenie) długości*. Efekt ten nazywany jest często także skróceniem Fitzgeralda-Lorentza, albo po prostu skróceniem Lorentza. Długości przedmiotów, a także odległości zmierzone w tym samym czasie między dwoma zdarzeniami, są różne w różnych układach odniesienia. Załóżmy, że podobnie jak w poprzednim podrozdziale, znamy długość lub odległość L'_0 w układzie primowanym (przedmiot spoczywa względem niego), natomiast mierzymy tę samą wielkość w spoczywającym układzie laboratoryjnym, którą oznaczmy przez L . Układ laboratoryjny teraz widziany jest względem primowanego jako poruszający się. Efekt Lorentza mówi, że $L < L'_0$.

Długość przedmiotu lub odległości między zdarzeniami są największe w układzie, względem którego mierzony przedmiot lub zachodzące zdarzenia spoczywają. Długości i odległości są skrócone w układzie odniesienia poruszającym się względem mierzonego przedmiotu lub zdarzeń.

Możemy to ująć w postaci wzoru:

$$L = \frac{L'_0}{\gamma} \quad \begin{array}{l} L'_0 : \text{odległość/długość „własna” w układzie primowanym} \\ L : \text{odległość/długość zmierzona w układzie laboratoryjnym} \\ \text{poruszającym się względem zdarzeń/przedmiotu} \end{array} \quad (10.29.)$$

Wyprowadzenie wzoru na kontrakcję długości będzie przebiegało podobnie, jak w przypadku dylatacji czasu. Przyjmijmy $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ (pomiar w układzie primowanym) oraz $\Delta x = x_2 - x_1$ (pomiar w układzie laboratoryjnym). Załóżmy, że znając długość $L'_0 = \Delta x'$ w układzie primowanym, chcemy zmierzyć L w układzie laboratoryjnym. Oczywiście pomiaru musimy

dokonać w tych samych chwilach czasu, a więc $L = \Delta x$ tylko wtedy, gdy $t_1 = t_2$. Skorzystamy ze wzorów (10.15.) i (10.14.):

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) - \gamma(x'_1 + Vt'_1) = \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma V(t'_2 - t'_1) = \\ &= \gamma\Delta x' + \gamma V[\gamma(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2) - \gamma(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1)] = \gamma\Delta x' - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} \Delta x\end{aligned}\quad (10.30.)$$

Po przeniesieniu na lewą stronę składnika z Δx mamy:

$$\begin{aligned}\text{Lewa} &= (1 + \gamma^2 \frac{V^2}{c^2}) \Delta x = \left(1 + \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) \Delta x = \gamma^2 \Delta x \\ \text{Prawa} &= \gamma \Delta x' \\ \text{Lewa} = \text{Prawa} &\Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \Rightarrow L = \frac{L'}{\gamma}\end{aligned}\quad (10.31.)$$

co było do udowodnienia.

Nieco inną sytuacją fizyczną jest taka, że przedmiot leży w spoczynku w układzie laboratorium i tam jego długość własna wynosi L_0 , natomiast pomiaru dokonuje obserwator z poruszającego się z prędkością V układu primowanego. Wyprowadzenie wzoru na kontrakcję długości w tym przypadku jest analogiczne do powyższego, przy czym teraz mierzymy L' w układzie primowanym, przy założeniu $t'_1 = t'_2$. Czytelnik sam może dokonać odpowiedniego wyprowadzenia i przekonać się, że wówczas:

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} \quad \begin{array}{l} L_0 : \text{odległość/długość „własna” w układzie laboratoryjnym} \\ L' : \text{odległość/długość zmierzona w układzie primowanym} \\ \text{poruszającym się względem zdarzeń/przedmiotu} \end{array} \quad (10.32.)$$

Zróbmy teraz „śmieszny” eksperyment myślowy. Załóżmy, że pręt o długości L_0 spoczywający na Ziemi (układ laboratoryjny) chcą wykonać astronauta statku kosmicznego, który porusza się w przestrzeni kosmicznej z relatywistyczną prędkością V . Widzą oni długość pręta $L' = L_0/\gamma$, a więc krótszą. Wykonują więc swój model pręta, ale o skróconej długości L' . Teraz znowu pracownicy laboratorium ziemskiego chcą skopiować kosmiczny pręt, który dla nich ma długość $L''_0 = L'/\gamma$. Jaka będzie długość pręta „podwójnie skopiowanego” względem długości oryginału? Oczywiście $L'' = L_0/\gamma^2$. Zatem pręt będzie γ^2 -krotnie skrócony po takim dwukrotnym kopiowaniu.

Skomentujmy jedną istotną sprawę. Skrócenie Lorentza występuje tylko dla wymiaru wzdłuż wektora prędkości unoszenia $\vec{V}$. Wymiary poprzeczne nie ulegają zmianie. Jeśli więc, tak jak założyliśmy podczas definiowania wzorów transformacyjnych (10.14.) i (10.15.), wektor $\vec{V}$ jest skierowany wzdłuż osi x , to $\Delta y' = \Delta y$ oraz $\Delta z' = \Delta z$.

Relatywistyczne skrócenie długości jest przyczyną tego, że przedmioty poruszające się z prędkością relatywistyczną wydają się nam być zdeformowane, mają zmienione kształty. Np. okrąg umieszczony w rakiecie kosmicznej wydaje się być elipsą o krótszej półosi w kierunku ruchu rakiety. Podobnie kwadrat będzie rejestrowany jako prostokąt „ściśnięty” w kierunku ruchu itd. Efekt ten jest przyczyną wielu paradoksów, jak np. paradoks garażu (lub drabiny). Zainteresowanych odsyłamy do bardziej specjalistycznej literatury.

10.4.3. Relatywistyczne zwięźnienie wiązki promieniowania*

Założmy, że poruszając się z prędkością relatywistyczną (np. na futurystycznym statku kosmicznym) dysponujemy latarką, którą kierujemy pod kątem φ' względem kierunku ruchu

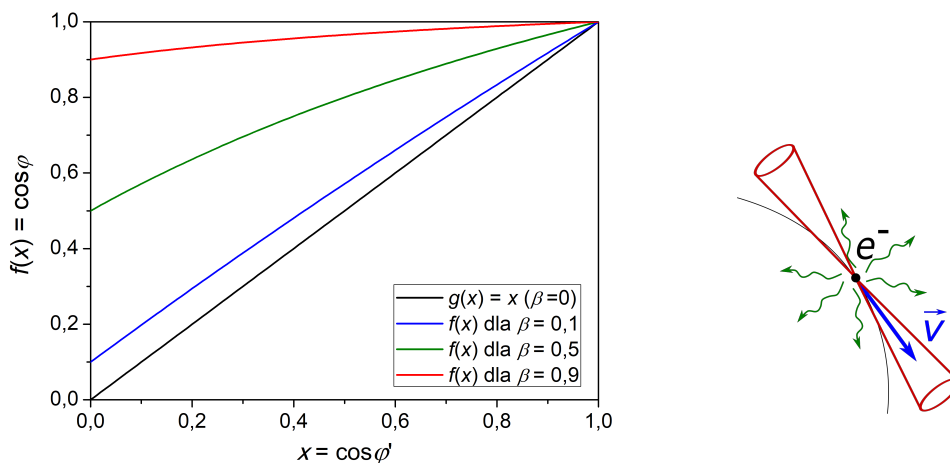
naszego statku. Jaki kąt φ zaobserwuje obserwator z Ziemi? Czy wiązka światła wyda mu się szersza czy węższa? Spróbujmy rozwiązać tę zagadkę.

Światło w układzie primowanym w czasie t' pokona drogę ct' w kierunku pod kątem φ' . Przesunięcie wiązki światła w kierunku osi x' wyniesie $x' = ct' \cos \varphi'$. Podobnie będzie z perspektywy układu nieprimowanego: $x = ct \cos \varphi$ (oczywiście w obu układach prędkość światła wynosi c , w układzie nieprimowanym zmierzmy jednak inne przesunięcie x i zanotujemy inny czas t). Kąt zmierzony w układzie nieprimowanym możemy więc zdefiniować jako: $\cos \varphi = \frac{x}{ct}$. Skorzystajmy z transformacji odwrotnej Lorentza (10.15.):

$$\cos \varphi = \frac{x}{ct} = \frac{x' + Vt'}{c(t' + \frac{V}{c^2}x')} = \frac{ct' \cos \varphi' + Vt'}{c(t' + \frac{V}{c^2}ct' \cos \varphi')} = \frac{\cos \varphi' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'} \quad (10.33.)$$

Powyższy wzór podaje transformację kąta z układu własnego do układu laboratoryjnego. Na pierwszy rzut oka ciężko stwierdzić, czy $\cos \varphi > \cos \varphi'$ czy odwrotnie. Spróbujmy jednak rozstrzygnąć tę kwestię metodą graficzną. Na Rysunku 10.3. szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{x+\beta}{1+\beta x}$ oraz $g(x) = x$, gdzie $x \equiv \cos \varphi$, a $\beta \leq 1$. Widać, że w interesującym nas przedziale $x \in \langle 0,1 \rangle$ $f(x) > g(x)$, czyli $\cos \varphi > \cos \varphi' \Rightarrow \varphi < \varphi'$ (kosinus jest funkcją malejącą w zakresie kątów ostrych). Zatem mamy do czynienia rzeczywiście ze zwięzieniem kąta wiązki promieniowania, rejestrowanego w układzie laboratoryjnym (patrz: Rysunek 10.3.). Wniosek jest prawdziwy dla wszystkich kątów $\theta' \in (0, 360^\circ)$.

Efekt ten jest powszechnie obserwowany w eksperymentach fizyki cząstek elementarnych. Np. w eksperymencie z użyciem akceleratorów kołowych (synchrotronów) zakrzywane w silnym polu magnetycznym elektrony emitują tzw. promieniowanie synchrotronowe. Jest to promieniowanie elektromagnetyczne o wysokiej energii. Okazuje się, że jest ono rejestrowane przez nas tylko w wąskim stożku o małym kącie rozwarcia wokół toru elektronu, mimo że elektron emituje je izotropowo (równomiernie) w każdym kierunku. W Przykładzie wrócimy do tego zjawiska.



Rysunek 10.3.: Po lewej: Wykres zależności $\cos \varphi$ od $\cos \varphi'$ dla różnych prędkości β . $\cos \varphi$ jest zawsze większy od $\cos \varphi'$. Po prawej: relatywistyczne zwięzienie wiązki (schemat emisji promieniowania synchrotronowego); przy małych prędkościach elektronu ($v \approx \text{małe}$) promieniowanie jest emitowane izotropowo; przy relatywistycznych prędkościach elektronu ($v \rightarrow c$) wiązka jest skupiona w wąskim stożku.

Przykłady

1. Wiemy, że niektóre cząstki elementarne mają bardzo krótki czas życia (tzn. bardzo szybko się rozpadają na inne cząstki). Przykładowo spoczywający mion („brat bliźniak” elektronu) żyje ok. $2,2 \mu\text{s}$ od momentu jego powstania zanim się rozpadnie. Miony mogą być wytwarzane w górnych warstwach atmosfery wskutek zderzeń wysokoenergetycznych cząstek promieniowania kosmicznego z molekułami atmosfery. Jak to jest możliwe, że jesteśmy w stanie rejestrować takie miony na powierzchni Ziemi?

W zadaniu chodzi o to, że w czasie $2,2 \mu\text{s}$ najszybsze obiekty we Wszechświecie (fotony) mogą przebyć drogę ok. 660 m ($s = ct$), podczas gdy zewnętrzne warstwy atmosfery rozciągają się na setki i tysiące kilometrów nad powierzchnią Ziemi. Miony mają więc do przebycia, powiedzmy, 10-100 km. Możliwe jest to dzięki efektom relatywistycznym. Czas życia mionów $2,2 \mu\text{s}$ dotyczy ich układu własnego. W układzie laboratoryjnym zanotujemy czas wydłużony, zgodnie z efektem dylatacji czasu. Ponieważ mion może poruszać się z prędkością przyświatłą, np. $0,999c$, dla której czynnik Lorentza $\gamma \approx 22$ to czas życia mionu zmierzony na Ziemi wyniesie $t = \gamma t' = 22 \cdot 2,2 \approx 48 \mu\text{s}$, a więc w układzie laboratoryjnym mion może pokonać dystans ok. 22 razy większy w czasie swojego życia. To daje nam już ok. 15 km. W rzeczywistości, miony jako cząstki stosunkowo lekkie, mogą mieć nawet większe prędkości.

2. Jak zmieni się pole kwadratu o boku a , podróżującego w statku kosmicznym z prędkością $0,5c$, a obserwowanego z Ziemi? Załóż, że kwadrat jest ustawiony jednym bokiem wzdłuż wektora prędkości unoszenia.

Mamy tutaj do czynienia z relatywistycznym skróceniem długości. Skróceniu ulega tylko ten wymiar, który dotyczy długości boku ustawionego wzdłuż prędkości statku, nazwijmy go a'_x (układ primowany jest związany ze statkiem). Wykorzystamy wzór (10.29.): $a_x = a'_x/\gamma = a/\gamma = 0,866a$. Oczywiście drugi wymiar: $a_y = a'_y = a$ (kwadrat stał się prostokątem). Współczynnik gamma odczytaliśmy z Tabeli 10.1.. Zatem pole powierzchni: $A = a_x a_y = 0,866a^2 = 86,6\% A'$.

Jak sytuacja wyglądałaby, gdyby kwadrat był ustawiony na podkładzie statku wzdłuż swojej przekątnej względem kierunku lotu? Skróceniu lorentzowskiemu uległaby przekątna kwadratu: $d_x = d'_x/\gamma = 0,866d'$, ale czy kwadrat będzie nadal kwadratem? Skoro skróceniu uległa jedna przekątna, a druga nie (bo jest prostopadła do wektora prędkości), to oczywiście kwadrat stał się rombem. Wykorzystując wzór na pole rombu przy użyciu długości przekątnych, obliczamy: $A = \frac{1}{2}d_x d_y = \frac{1}{2}\frac{d'_x}{\gamma}d'_y = 0,866 \cdot \frac{1}{2}d'_x d'_y = 0,866 A'$. Pole jest więc takie samo, ale kształt figury uległ zmianie, tym razem jest to romb, a nie prostokąt. Obliczmy ostry kąt tego rombu: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}d_y}{\frac{1}{2}d_x} = \frac{d'_y}{d'_x/\gamma} = \gamma$, stąd kąt ostry w rombie wynosi $\alpha = 82^\circ$. Romb nie jest więc bardzo „spłaszczony”, bo prędkość statku nie jest jeszcze bardzo duża.

3. Synchrotron ESRF wybudowany w Grenoble, we Francji, może rozpędzać elektrony do energii 6 GeV. Jaki kąt tworzy wiązka promieniowania synchrotronowego emitowanego przez takie elektrony?

Wykorzystamy wzór na relatywistyczne zwięźnienie wiązki promieniowania (10.33.), jednak wcześniej musimy wyliczyć prędkość elektronów o energii 6 GeV. Autor nie sprecyzował dokładnie, jaka to jest energia - kinetyczna czy całkowita. Zazwyczaj mamy na myśli w takich przypadkach energię kinetyczną. Zauważmy jednak, że przy energii

spoczynkowej elektronu, równej $m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, wartość $6 \text{ GeV} = 6000 \text{ MeV}$ jest wielokrotnie większa. Śmiało można by pominąć wartość m_0c^2 w obliczeniach. Skorzystajmy ze wzoru na prędkość jako funkcji energii kinetycznej (wyprowadzonego w Przykładzie 2):

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{E_k}{m_0c^2} + 1}} = 0,9999574$$

(specjalnie podajemy tyle cyfr po przecinku, żeby pokazać, jak wielka jest prędkość elektronu, choć wciąż mniejsza niż c). Największemu „zwężeniu” ulegnie wiązka fotonów emitowana prostopadle do kierunku prędkości elektronu, a więc pod kątem $\varphi' = 90^\circ$. Korzystając ze wzoru (10.33.) dla $\varphi' = 90^\circ$, obliczymy kąt rozwarcia wiązki promieniowania synchrotronowego:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'} = \left| \cos \varphi' = 0 \right| = \frac{V}{c} = 0,9999574 \Rightarrow \varphi = 0,53^\circ \Rightarrow 2\varphi' = 1,06^\circ$$

Zwężenie wiązki jest więc niemal niewyobrażalne. Promieniowanie synchrotronowe tworzy niezwykle wąską, skupioną wiązkę. Między innymi dzięki temu jest bardzo „atrakcyjne” z punktu widzenia wykorzystania eksperymentalnego w fizyce, chemii, naukach biologicznych i materiałowych.

Zadania

1. Zmierzony średni czas życia pionów naładowanych Π^+ w spoczynku wynosi $2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Średni czas życia prędkich pionów w obserwowanej wiązce promieniowania kosmicznego wynosi $1,6 \mu\text{s}$. Oblicz jaką prędkość względem Ziemi mają piony w tej wiązce.
2. Wyobraźmy sobie, że załoga zbliżającej się do Ziemi z prędkością $0,7c$ rakiety obserwuje pionowo z góry ziemskie laboratorium, w którym o ścianę oparto drabinę o długości („ziemskiej”) $2,5 \text{ m}$. Drabina tworzy z podłogą kąt 15° . Jaki kąt zanotują członkowie załogi rakiety?
3. Jaki kształt ma sfera o promieniu r umieszczona w laboratorium, obserwowana z układu primowanego, poruszającego się z prędkością $0,99c$? Oblicz procentową zmianę pola powierzchni i objętości tej bryły w układzie primowanym.
4. Akcelerator LHC rozpędza wiązkę protonów do energii 7 TeV . Oblicz prędkość protonów w takiej wiązce. (*) Jaką szerokość kątową ma wiązka emitowanego przez te protony promieniowania synchrotronowego?

10.5. Elementy dynamiki relatywistycznej*

10.5.1. Siła relatywistyczna

W podrozdziale 10.1.1. zdefiniowaliśmy pęd relatywistyczny. W STW, podobnie jak w klasycznej mechanice, wektor siły wypadkowej definiujemy jako pochodną po czasie wektora pędu (II zasada dynamiki):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 \vec{v} \right) \quad (10.34.)$$

Wektor prędkości, który mamy różniczkować w powyższym równaniu, może zależeć od czasu, lub nie. W przypadku, gdy prędkość nie zależy od czasu, to oczywiście pochodna wynosi 0 i wektor siły wypadkowej jest 0. Jeśli kierunek i zwrot wektora prędkości jest stały, a zmienia się tylko jego wartość (czyli mamy do czynienia z ruchem prostoliniowym niejednostajnym), to powiemy o składowej stycznej siły:

$$F_s = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \dots = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} \frac{dv}{dt} = \gamma^3 m_0 \frac{dv}{dt} = \gamma^3 m_0 a_s \quad (10.35.)$$

Jeśli natomiast zmienia się tylko kierunek prędkości, ale wartość pozostaje stała (np. ruch jednostajny po okręgu), $|\vec{v}| = \text{const.}$, to mówimy o składowej dośrodkowej (normalnej) siły:

$$F_d = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{R} (R - \text{promień krzywizny}) \right| = \gamma m_0 \frac{v^2}{R} = \gamma m_0 a_d \quad (10.36.)$$

Zdefiniowaliśmy dwie składowe wektora siły w ruchu krzywoliniowym z prędkością relatywistyczną, zależną od czasu. Są to:

$$\begin{aligned} \textbf{Składowa styczna} \text{ (ruch prostoliniowy, } v = v(t)\text{):} \quad & \vec{F}_s = \gamma^3 m_0 \vec{a}_s, \quad a_s = \frac{dv}{dt} \\ \textbf{Składowa dośrodkowa} \text{ (ruch po okręgu, } |\vec{v}| = \text{const.}\text{):} \quad & \vec{F}_d = \gamma m_0 \vec{a}_d, \quad a_d = \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (10.37.)$$

Dwie składowe przyspieszenia, $\vec{a}_s$ i $\vec{a}_d$, dają w sumie wektor przyspieszenia całkowitego: $\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_d$, jak w każdym ruchu krzywoliniowym (por. Rozdział 2.1.). Podobnie dwie składowe siły, zdefiniowane jako (10.37.), sumują się do wektora całkowitej siły wypadkowej: $\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_d$. Zauważmy natomiast, że w STW nie jest prawdziwa definicja siły wypadkowej w ujęciu: $\vec{F} = m_0 \vec{a}$. W mechanice relatywistycznej mamy:

$$\vec{F} = \gamma m_0 (\gamma^2 \vec{a}_s + \vec{a}_d) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \nparallel \vec{a} \quad (10.38.)$$

Zauważmy, że przy prędkościach skrajnie relatywistycznych ($v \rightarrow c$) siła wypadkowa osiąga wartość nieskończoną. Aby zmienić wektor prędkości cząstki tak bardzo relatywistycznej, należałoby użyć ogromnej siły. Sytuacja ta dotyczy cząstek materialnych ($m_0 \neq 0$). Przykładowo do zakrzywienia toru ruchu protonów w eksperymencie LHC należy użyć magnesów zakrzywiających o dużej mocy (wytwarzających silne pole magnetyczne, a więc i dużą siłę magnetyczną Lorentza). Inaczej jest w przypadku cząstek niematerialnych (np. bezmasowy foton). Zmiana kierunku prędkości (lub pędu) fotonu nie jest zadaniem trudnym, bo nie wymaga użycia dużej siły (wystarczy zwykłe lustro, aby odbić światło).

10.5.2. Relatywistyczna energia kinetyczna

Pamiętamy, że zmiana energii kinetycznej jest równa pracy siły wypadkowej (dyskusja w Rozdziale 4.1.). Dla uproszczenia rachunków założmy, że wektor siły $\vec{F}$ skierowany jest równolegle do wektora przemieszczenia $d\vec{s}$ oraz że pod wpływem siły $\vec{F}$ ciało rozpędza się

od prędkości 0 do $\vec{v}$. Energię kinetyczną obliczymy więc jako:

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^v F ds = \int_0^v \frac{dp}{dt} ds = \int_0^v \frac{ds}{dt} dp = \int_0^v v dp = \left\| \begin{array}{l} \text{na podst. wzoru (1.21.)} \\ \text{(całkowanie przez części)} \end{array} \right\| = \\ &= vp - \int_0^v p dv = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv \end{aligned} \quad (10.39.)$$

Ostatnia całka nie jest bardzo prosta, obliczenie jej zostawiamy Czytelnikowi jako świetne ćwiczenie z analizy matematycznej (należy zrobić „sprytne podstawienie”). Wynik całki nieoznaczonej to: $-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Energia kinetyczna wynosi ostatecznie:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]_0^v = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) = \\ &= \dots = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\gamma - 1) \end{aligned} \quad (10.40.)$$

co jest wynikiem, który poznaliśmy już w Rozdziale 10.2. (wzór (10.6.) na relatywistyczną energię kinetyczną).

Zadania

1. Wyprowadź wzór na prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym (ze stałym przyspieszeniem A) prostoliniowym bez prędkości początkowej. *Wskazówka.* Zauważ, że na podstawie (10.37.) możemy podać wzór na transformację składowej stycznej przyspieszenia: $a'_s = \gamma^3 a_s = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$. W zadaniu znamy $a'_s = A = \text{const.}$. *Rozwiązanie.* $v(t) = \frac{At}{\sqrt{1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}}}$.

Bibliografia

- [1] Janusz Wolny, Materiały do wykładu dla I roku geodezji i kartografii WGGiIŚ, <http://www.ftj.agh.edu.pl/~wolny/>.
- [2] Andrzej Baczmański, Materiały do wykładu dla I roku technologii chemicznej WIMiC, <http://www.ftj.agh.edu.pl/~baczman/>.
- [3] Zbigniew Kąkol, *Wykłady z fizyki*, skrypt dostępny online http://home.agh.edu.pl/~kakol/wyklady/Fizyka_2016.pdf.
- [4] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006 (lub nowsze).
- [5] Janusz Wolny, *Podstawy fizyki*, Wydawnictwo JAK, Kraków 2013 (lub inne).
- [6] Janusz Wolny, Łucjan Pytlik, *Ogólnopolska Olimpiada o Diamentowy Indeks AGH. Fizyka. Rozwiązania zadań z lat 2007/08-2014/15*, Wydawnictwo JAK, Kraków 2015.
- [7] I.E. Irodow, I.W. Sawieljew, I.O. Zamsza, *Zbiór zadań z fizyki*, PWN, Warszawa 1976.

