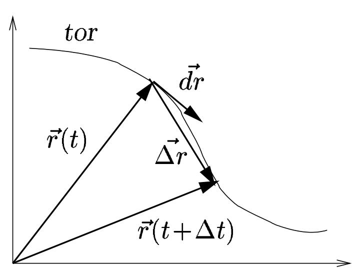
ABC matematyki dla początkujących fizyków.

Układy współrzędnych

■ wektor wodzący ■ układy płaskie: kartezjański, biegunowy ■ układy trójwymiarowe: kartezjański, sferyczny, cylindryczny ■ wektory bazowe

1 Wektor wodzący

Wektorem wodzącym $\vec{r}$ nazywamy wektor określający położenie punktu w przestrzeni względem wybranego układu współrzędnych. Jego początek leży w początku układu współrzędnych, a koniec w rozpatrywanym punkcie.

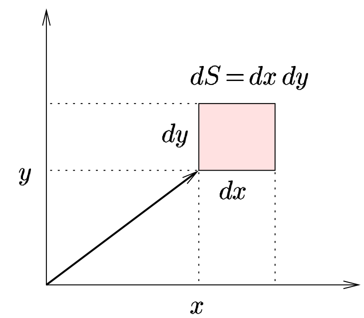


Ogólnie, jest to funkcja wektorowa zależna od współrzędnych przestrzennych, ale może też zależeć od czasu. W tym ostatnim przypadku będziemy się nim zwykle posługiwać do opisu ruchu wybranego punktu: koniec wektora wodzącego zakreśla tor poruszającego sie punktu.
Przyrost wektora wodzącego $\vec{dr}$, który następuje w czasie dt jest wektorem stycznym do toru. Dzieląc $\vec{dr}$ przez dt otrzymujemy wektor prędkości $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

2 Układy płaskie

2.1 Układ kartezjański

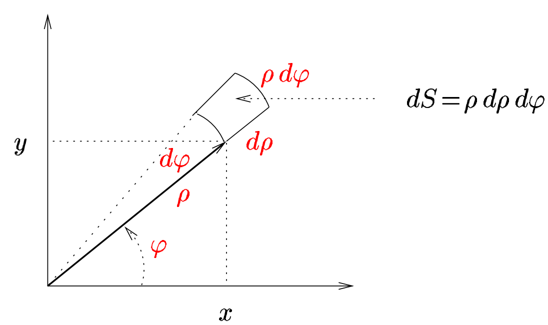
Rysunek wystarczająco objaśnia dwuwymiarowy układ kartezjański (x, y). Różniczkowe przyrosty zmiennych dx i dy tworzą nieskończenie małą (mówimy: elementarną) powierzchnię $dS = dx \cdot dy$. Powierzchnia dS jest miejscem geometrycznym punktów, których współrzędna x należy do przedziału $[x, x + dx]$, a współrzędna y do przedziału $[y, y + dy]$.



2.2 Układ biegunowy

W tym układzie położenie punktu na płaszczyźnie określone jest współrzędnymi (ρ, φ) gdzie ρ jest odległością punktu od początku układu, kąt φ mierzony jest od osi x przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Zakresy zmienności: $0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.
Przejście z układu biegunowego do kartezjańskiego:

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi.$$



Nieskończenie małe odcinki (łuki) związane z różniczkowymi przyrostami współrzędnych (ρ, φ) wynoszą odpowiednio $d\rho$ i $\rho\, d\varphi$ i tworzą nieskończenie małą powierzchnię $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$.
Przyykład 1. Wzór na powierzchnię koła: $S = \pi R^2$ – jak go uzasadnić?
Symetria problemu sugeruje, że najlepiej nadaje się do tego obliczenia układ biegunowy (a nie kartezjański). Weźmy zatem wycinek powierzchni koła, umiejscowiony w punkcie

(ρ, φ), o powierzchni elementarnej $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$ i zsumujmy wszystkie takie wycinki (czyli dla wszystkich możliwych ρ i φ) aby wypełnić nimi całe koło i otrzymać szukane S. Wymaga to zmieniania ρ od zera do R, a kąta φ w granicach od zera do 2π. Takie sumowanie to całkowanie w zadanych granicach. W naszym przypadku całkowanie należy przeprowadzić po obu zmiennych, przy czym kolejność jest dowolna. Na przykład taka:

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho\, d\rho \right) d\varphi.$$

Jeśli przeprowadzimy całkowanie w nawiasie to uzyskamy wynik $\frac{1}{2}R^2$. Pozostaje dokończyć:

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{1}{2}R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}R^2 \varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

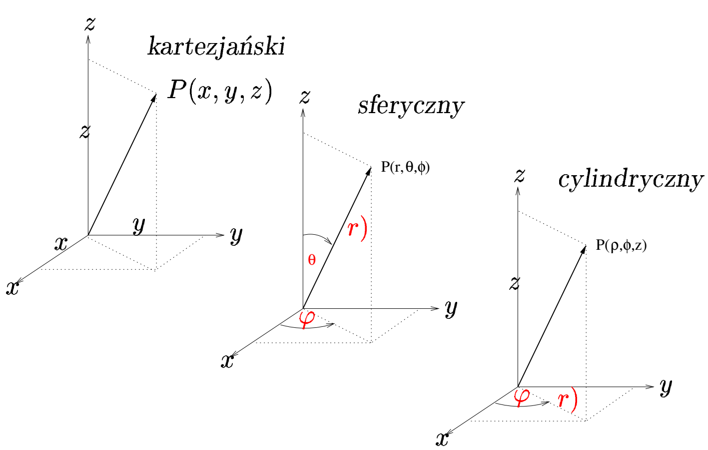
Dodatkowo, na powyższym przykładzie można było poćwiczyć obliczanie całki podwójnej

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dx dy.$$

3 Układy współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej

Położenie punktu P w przestrzeni trójwymiarowej określają jednoznacznie trzy współrzędne:

- (x, y, z) – w układzie kartezjańskim,
- (r, θ, ϕ) – w układzie sferycznym
- (ρ, ϕ, z) – w układzie cylindrycznym.



W zasadzie wszystko jedno jest którego z tych układów użyć, decyduje wygoda. Często mamy do czynienia z opisem obiektów mających określoną symetrię, wtedy do tej symetrii dopasujemy wybór układu.
Np. powierzchnię kuli najprościej opisać w układzie sferycznym. Równanie powierzchni kuli o promieniu R wygląda w tym układzie współrzędnych tak:

$$r = R$$

(zakładamy, że początek układu umieszczony jest w środku kuli). Wystarcza ta jedna współrzędna, pozostałe dwie (kąty θ i ϕ) są dowolne. W układzie kartezjańskim musielibyśmy użyć wszystkich trzech współrzędnych: $x^2+y^2+z^2 = R^2$.
Podobnie, obiekty o symetrii walcowej wygodnie opisywać w układzie cylindrycznym.

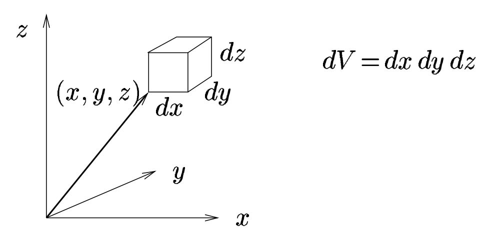
3.1 Układ kartezjański

(Patrz pierwszy z rysunków powyżej.)
Umawiamy się, że układ jest prawoskrętny.

Zakres zmienności współrzędnych:
$-\infty < x < \infty$
$-\infty < y < \infty$
$-\infty < z < \infty$.

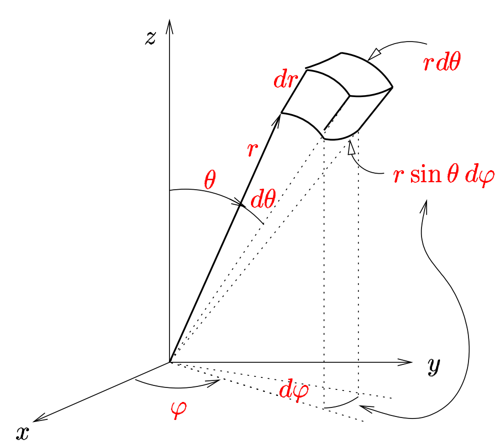
Różniczkowy element objętości dV.

Iloczyn trzech przyrostów $dx \cdot dy \cdot dz$ tworzy objętość prostopadłościanu o bokach dx, dy, dz. Tę objętość $dV = dx\, dy\, dz$ nazywamy różniczkowym elementem objętości (czasem mówimy po prostu – element objętości lub elementarna objętość). W języku matematyki dV jest różniczką zmiennej V.



3.2 Układ sferyczny

Położenie punktu określają zmienne: r – odległość od początku układu, θ – kąt między osią z linią radialną mierzony od osi z, φ – kąt między osią x a rzutem linii radialnej na płaszczyznę xy, mierzony od osi x.



Zakres zmienności współrzędnych:

$$0 \leqslant r < \infty$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Zwróć uwagę, że kąt θ zmienia się do π (dlaczego?).

Transformacja do ukladu kartezjańskiego.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Elementy różniczkowe: objętości dV, powierzchni sfery dS i kąta bryłowego $d\Omega$.

Jeśli przy ustalonym r zwiększymy θ o $d\theta$, a φ o $d\varphi$ to uzyskamy wycinek sfery o elementarnej powierzchni

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(traktujemy ten wycinek jak prostokąt o bokach $rd\theta$ i $r\sin\theta d\varphi$ – patrz rysunek). Jeśli następnie zwiększymy r o dr to uzyskujemy nieskończenie mały prostopadłościan o wysokości dr i polu podstawy dS. Stanowi on elementarną objętość dV w układzie sferycznym:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Jeśli chcemy operować pojęciem kąta bryłowego to użyjmy jego definicji, która mówi, że kąt bryłowy Ω jest stosunkiem powierzchni S, który ten kąt wycina ze sfery o promieniu r do kwadratu promienia: $\Omega = S/r^2$. Na podstawie tej definicji elementarny kąt bryłowy $d\Omega$ wyraża się następująco:

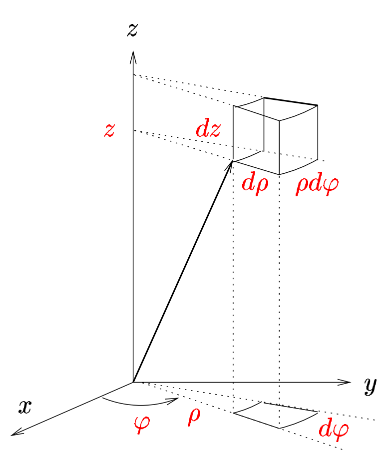
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

3.3 Układ cylindryczny

Do układu biegunowego (ρ, φ) dołączmy oś z i uzyskujemy układ przestrzenny, wygodny do opisu obiektów o symetrii walcowej.

Zakres zmienności współrzędnych:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\ \rho < \infty \\ 0 \leqslant &\ \varphi \leqslant 2\pi \\ -\infty < &\ z < +\infty. \end{aligned}$$



Z rysunku widać, że różniczkowy element objętości dV w układzie cylindrycznym jest równy:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

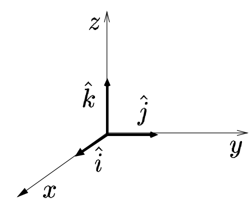
Zadanie do samodzielnego wykonania: Uzasadnij obliczeniem wzór na objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Wskazówka: zastosuj $V = \int dV$ w dogodnym układzie.

4 Wektory bazowe

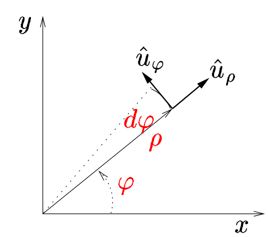
Trójka wektorów jednostkowych $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ określa położenie osi układu kartezjańskiego w przestrzeni. Wektory te są wzajemnie prostopadłe (czasem mówimy – ortogonalne [1]).



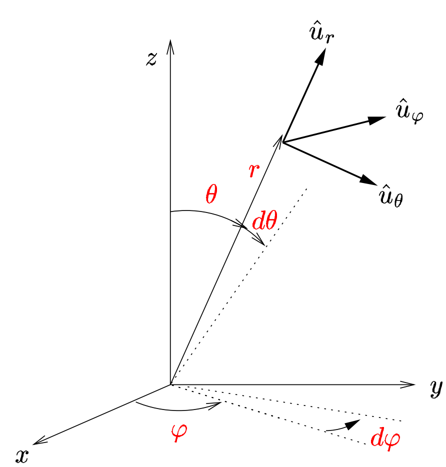
Podobnie, takie wektory bazowe możemy wprowadzić dla pozostałych układów współrzędnych.

Zasada jest taka: dowolny punkt określony poprzez współrzędne danego układu zmieni położenie jeśli określonej współrzędnej nadamy niewielki przyrost; patrzymy w jakim kierunku przesunie się punkt i stycznie do tej linii umiejscowiamy wektor bazowy, określający daną oś układu.

W układzie biegunowym wektorami bazowymi są $\hat{u}_\rho, \hat{u}_\varphi$:



Układ sferyczny, $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi$:



[1] w języku matematyki: dwa wektory są ortogonalne jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero

Układ cylindryczny: $\hat{u}_\rho, \hat{u}_\varphi, \hat{u}_z$ (wykonaj samodzielnie rysunek).

Wszystkie wymienione układy są ortogonalne, tzn. ich wektory bazowe są wzajemnie prostopadłe.

Dowolny wektor jest przedstawiany w danym układzie przez składowe. Należy rozumieć to tak: przykładowo, w układzie sferycznym zapis wektora $\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_\varphi)$ oznacza, że a_r jest rzutem $\vec{a}$ na oś $\hat{u}_r$ (czyli na kierunek wyznaczony przez wektor bazowy $\hat{u}_r$), a_θ – na oś $\hat{u}_\theta$, a_φ – na oś $\hat{u}_\varphi$. Dla tego przykładu możemy też napisać:

$$\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_\theta\hat{u}_\theta + a_\varphi\hat{u}_\varphi.$$

W szczególności, wektor wodzący $\vec{r}$ ma składowe następujące w poszczególnych układach:
u. kartezjański: $\vec{r} = (x, y, z)$,
u. biegunowy: $\vec{r} = (\rho, 0)$,
u. sferyczny: $\vec{r} = (r, 0, 0)$,
u. cylindryczny: $\vec{r} = (\rho, 0, z)$.

Przykład. Rozpatrzmy ruch jednostajny po okręgu o promieniu R z prędkością kątową ω. W jakim układzie współrzędnych najkorzystniej przedstawiać siłę dośrodkową $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$?
Ruch jest płaski, wystarczą dwie osie, więc do dyspozycji mamy układ kartezjański lub biegunowy.
Układ kartezjański:
$\vec{F} = (F_x, F_y) = (-m\omega^2 R\cos\omega t, -m\omega^2 R\sin\omega t) = -m\omega^2 R\,(\cos\omega t, \sin\omega t)$.
Układ biegunowy:
$\vec{F} = (F_\rho, F_\varphi) = (-m\omega^2 R, 0) = -m\omega^2 R\,(1, 0)$.
Wybór jest prosty: układ biegunowy – w nim obie składowe $\vec{F}$ są stałe. Opis wektora $\vec{F}$ w układzie kartezjańskim jest oczywiście poprawny, ale bardziej skomplikowany, bo obie składowe F_x, F_y są zmienne w czasie.