ZESTAW 5

ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FiIS-FT-1 S2 GR. 2

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl
Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft
Tematyka: ciągły rozkład ładunku; strumień pola; prawo Gaussa; równanie Poissona.

1. Znaleźć siłę, jaką odcinek o długości L naładowany ładunkiem $+Q$ przyciąga ładunek $-q$ umieszczony w dwóch miejscach:
   (a) centralnie na symetralnej tego odcinka w odległości a od jego środka,
   (b) wzdłuż tego odcinka w odległości a od jednego z jego końców

2. [Hennel III.18] Dany jest płaski pierścień o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 umieszczony na płaszczyźnie xy i środku w początku układu. Pierścień naładowany jest ładunkiem o gęstości powierzchniowej $+\sigma$, jednorodnie rozmieszczonym na całej powierzchni. Wyznacz potencjał i natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez pierścień w punkcie P leżącym na osi z w odległości a od środka tego pierścienia. Następnie rozważ przypadki graniczne (zakładając stałą gęstość powierzchniową σ):
   (a) $R_1 \to 0$ przy $R_2 = const$ (naładowane koło),
   (b) $R_1 \to 0, R_2 \to \infty$ (naładowana płaszczyzna)
   (c) $R_2 \to \infty$ przy $R_1 = const$ (płaszczyzna z otworem kołowym)

3. Dla pręta z zad. 1 ustal zależność natężenia pola oraz potencjału od odległości a. Następnie, przechodząc w granicy $L \to \infty$, pokaż, jak zmienią się wyniki dla pręta nieskończonego (rozciągającego się do nieskończoności w obie strony) w podpunkcie (a) oraz „półnieskończonego” (rozciągającego się do nieskończoności w jedną stronę) w podpunkcie (b); przyjmij wtedy stałą gęstość liniową ładunku λ.

4. [openstax.pl 6.72 i 6.73] Pole wektorowe $\overrightarrow{E}$ (niekoniecznie jest to pole elektryczne; sprawdź jednostki!) dane jest wyrażeniem $\overrightarrow{E} = 3x^2\widehat{k}$. Oblicz strumień tego pola przez powierzchnię kwadratu o boku a rozpiętego w płaszczyźnie xy (rys. 1a). Jaki będzie strumień przez ten kwadrat dla pola $\overrightarrow{E}' = 2x\widehat{i} + 3x^2\widehat{k}$?

5. [Hennel III.5] W jednym z naroży sześcianu znajduje się punktowy ładunek Q. Ile wynosi strumień pola elektrycznego (całka powierzchniowa z natężenia pola elektrycznego $\overrightarrow{E}$ po powierzchni) przez ścianę:
   (a) leżącą naprzeciw tego ładunku (czyli niestykającą się z nim),
   (b) stykającą się z tym ładunkiem?
   Następnie sprawdź, czy wynik całkowania jest zgodny z wynikiem zastosowania prawa Gaussa.

6. Wynik z zad. 3 (natężenie pola od nieskończonego pręta naładowanego ładunkiem λ w odległości a) potwierdzić przy pomocy prawa Gaussa.

7. Korzystając z prawa Gaussa oraz związku $\overrightarrow{E} = -\mathrm{grad}V$, wyznacz natężenie oraz potencjał pola elektrycznego w dowolnej odległości r od środka kuli o promieniu R:
   (a) jednorodnie naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej ρ_0;
   (b) jednorodnie naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej ρ_0 z wydrążeniem (pustką) o promieniu $R_1 < R$ środkowo symetrycznie ulokowanym wewnątrz kuli;
   (c) naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej zależnej od odległości jak $\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{r}{R}$;
   (d) naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej zależnej od odległości jak $\rho(r) = \rho_0 \cdot \exp\left[-\frac{r}{R}\right]$.
   (e) Jakie jest natężenie i potencjał od powłoki sferycznej o promieniu R z ładunkiem powierzchniowym σ w punktach wewnątrz i na zewnątrz powłoki?

8. [por. Griffiths 2.9] Przypuśćmy, że w pewnym obszarze stwierdzono, że wektor natężenia pola elektrycznego jest równy (we współrzędnych sferycznych): $\overrightarrow{E} = kr^2\widehat{r}$, gdzie k jest pewną stałą. Proszę:
   (a) zapisać wektor $\overrightarrow{E}$ w zmiennych kartezjańskich
   (b) pokazać, że pole to jest bezwirowe;
   (c) znaleźć gęstość ładunku objętościowego (*Wskazówka. Użyć różniczkowej postaci prawa Gaussa*);
   (d) znaleźć całkowity ładunek zawarty w kuli o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych (wykonać to na dwa sposoby: całkując gęstość ładunku i z prawa Gaussa w wersji całkowej).

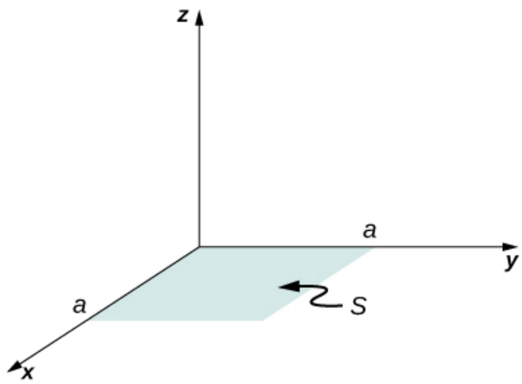
9. W lampie elektronowej znajdują się dwie płaskie elektrody, odległe o D (odległość D jest dużo mniejsza w porównaniu do rozmiarów elektrod). Wiadomo, że potencjał w obszarze między elektrodami dany jest wzorem $V(x) = V_0 \left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{4}{3}}$. Jakie jest natężenie pola między elektrodami? Jaki jest rozkład gęstości ładunku między elektrodami? Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na każdej z elektrod?

10. Jaki powinien być przestrzenny rozkład ładunku, aby wytwarzane przez niego pole elektryczne było radialnie symetryczne, a wartość natężenia pola nie zależała od odległości od centrum (połączenie cech pola centralnego i jednorodnego)? Czy jest możliwe zbudowanie takiego rozkładu ładunku w praktyce?

*11. [Griffiths Przykład 3.3] Znaleźć rozkład potencjału w obszarze między dwiema nieskończonymi uziemionymi metalowymi płytami umieszczonymi równolegle do płaszczyzny xy tak, że dla jednej $y = 0$, a dla drugiej $y = a$, jeśli krawędzie płyt $x = 0$ są połączone paskiem (odizolowanym od płyt), na którym utrzymywany jest stały potencjał V_0. *Wskazówka.* Rozwiąż 2-wymiarowe równanie Laplace'a metodą separacji zmiennych.

12. Sprawdź, że rozkład potencjału $V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi} \cdot \text{arctg}\left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)}\right)$ spełnia równanie Laplace'a z warunkami brzegowymi jak w zad. 11.

*13. Proszę znaleźć rozkład gęstości ładunku wytwarzający pole o potencjale $\varphi(r) = \frac{q}{r}\mathrm{e}^{-ar}$ (a - stała). *Wskazówka.* Użyj laplasjanu w zmiennych sferycznych.



(a) rys. do zad. 4

Rysunek 1