

ZESTAW 4

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft

Tematyka: UZUPEŁNIENIE DOT. DIPOLA ELEKTRYCZNEGO.

Wyprowadzenie potencjału pola $V(r)$ od dipola

Przyjmijmy, że dipol ustawiony jest pionowo z ładunkiem dodatnim $+q$ powyżej ujemnego $-q$. Odległość r od dipola mierzona jest od jego środka, a kąt θ mierzony jest od osi dipola (pionu) do wektora wodzącego \vec{r} . Rozmiar dipola (odległość między ładunkami) wynosi d , wektor \vec{d} skierowany jest od $-q$ do $+q$, zatem moment dipolowy $\vec{p} = q\vec{d}$ jest też ustawiony pionowo (patrz: Rys. 1).

Zakładamy (od razu), że odległość do pewnego punktu P na płaszczyźnie jest duża w porównaniu z rozmiarem dipola ($r \gg d$). Wtedy odległości do punktu P od ładunku dodatniego oraz ujemnego wynoszą:

$$\begin{aligned} r_+ &= r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_- &= r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Potencjał w punkcie P jest, zgodnie z zasadą superpozycji, równy:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = kq \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \theta} \right) = \frac{kqd \cos \theta}{r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \quad (2)$$

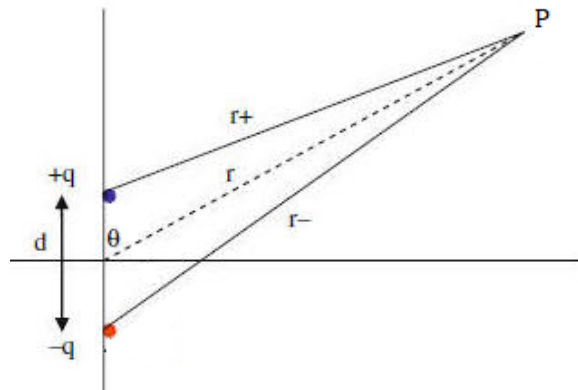
Jeszcze raz zrobmy przybliżenie $r \gg d$, które pozwala pominąć wyraz $\sim d^2$ w mianowniku. Zauważmy też od razu, że $qd = p$. Ostatecznie, dla dużych odległości od dipola, mamy wzór na potencjał:

$$\boxed{V(r) = \frac{kp \cos \theta}{r^2}} \quad (3)$$

Powyższy wzór często zapisuje się w postaci wektorowej, zauważając, że kąt wektory \vec{p} i \vec{r} tworzą kąt θ :

$$V(\vec{r}) = \frac{k\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{k\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (4)$$

Ważnym wnioskiem wynikającym z postaci wzoru (3) jest to, że potencjał od dipola maleje z kwadratem odległości (jak $1/r^2$), zasadniczo inaczej niż w przypadku ładunku punktowego (monopola). Ponadto łatwo zauważymy, że potencjał się zeruje na symetralnej dipola ($\theta = \pm 90^\circ$), natomiast dla punktów na osi dipola ($\theta = 0$ lub 180°) dany jest prostą zależnością $V = \frac{kp}{r^2}$, tzn. dla danego r potencjał jest maksymalny w punktach na osi dipola. To jednoznacznie sugeruje, że linie stałego potencjału (ekwipotencjalne) nie są okręgami, ale mają kształt okręgów spłaszczonych w kierunku osi dipola (pionowym) - patrz: Rys. 2.



Rysunek 1

Wyprowadzenie potencjału pola $V(x,y)$ od dipola trochę bardziej ogólnie

Możemy znaleźć zależność potencjału od współrzędnych x i y punktu P. Z rys. 1 zauważymy, że wektory wodzące od ładunków do punktu P mają postać:

$$\begin{aligned}\vec{r}_+ &= \vec{r} - \frac{d}{2} = \left(x, y - \frac{d}{2}\right) \\ \vec{r}_- &= \vec{r} + \frac{d}{2} = \left(x, y + \frac{d}{2}\right)\end{aligned}\quad (5)$$

Potencjał wyliczymy, stosując zasadę superpozycji:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{|\vec{r}_+|} - \frac{kq}{|\vec{r}_-|} = kq \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}} \right) = \frac{kq}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2 - yd}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2 + yd}{r^2}}} \right) \quad (6)$$

Otrzymaliśmy ogólny wzór, w którym nie ma (na razie) żadnych przybliżeń. Wzór jest dość „paskudny”, dlatego teraz znajdziemy jego przybliżoną postać dla $d \ll r$. Po pierwsze pominiemy wyrazy $\frac{d^2}{4}$. Po drugie rozwinimy pozostałe wyrażenie w nawiasie w szereg wokół $\frac{yd}{r^2} \rightarrow 0$. To rozwinięcie daje:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{yd}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{yd}{r^2}}} \approx \frac{yd}{r^2} \quad (7)$$

Zatem:

$$V(x,y) = \frac{kq}{r} \frac{yd}{r^2} = \boxed{kqd \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (8)$$

Powyższy wzór (8) dobrze odtwarza przypadki szczególne, tzn. dla $y = 0$ (na symetralnej dipola, czyli dla $\theta = 90^\circ$) potencjał wynosi 0, zaś dla $x = 0$ (na osi dipola, czyli dla $\theta = 0^\circ$) potencjał wynosi $\frac{kqd}{y^2}$. Jeśli na koniec przypomnimy sobie, że $\frac{y}{r} = \cos \theta$ (rys. 1), to zauważymy zgodność powyższego wyprowadzenia ze wzorem (3).

Wyprowadzenie natężenia pola \vec{E} od dipola w układzie kartezjańskim

Natężenie pola \vec{E} zawsze możemy policzyć jako gradient potencjału ($\vec{E} = -\text{grad}V$), jednak nie zawsze to będzie pochodna po r . Pole elektrostatyczne, choć wytwarzane przez ładunki punktowe, nie zawsze jest centralne, tzn. nie zależy tylko od odległości r , ale też od kierunku, np. kąta, a więc od całego wektora \vec{r} . W istocie, w przypadku pola wytwarzanego przez układ ładunków punktowych (superpozycja) pole wypadkowe nie będzie centralne. Zatem nie można różniczkować tylko po r . Zawsze można obliczyć gradient w zmiennych kartezjańskich. W naszym przypadku należy zatem wcześniej zauważyć zależność wektora wodzącego \vec{r} (w szczególności kąta θ od x, y). Wybierzmy układ współrzędnych, którego oś y leży wzdłuż dipola, a oś x na symetralnej odcinka d . Wtedy $\cos \theta = \frac{y}{r}$. Zatem przepisemy:

$$V(x,y) = \frac{kp}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{kpy}{r^3} \quad (9)$$

$$\vec{E}(x,y) = (E_x, E_y) = -\text{grad}V(x,y) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kpy \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -kpy \left(\frac{-3}{r^4} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{3kpy}{r^4} \cdot \frac{x}{r} = \left| \frac{x}{r} = \sin \theta \right| = \boxed{\frac{3kp \cos \theta \sin \theta}{r^3}} \quad (11)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kp \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) = -kp \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{kp}{r^3} \left(\frac{3y}{r} \cdot \frac{y}{r} - 1 \right) = \left| \frac{y}{r} = \cos \theta \right| = \boxed{\frac{kp(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}} \quad (12)$$

Wektor \vec{E} da się zapisać w bardziej zwartej postaci:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (13)$$

Wartość natężenia pola w odległości r od dipola dana jest wzorem:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{kp}{r^3} \sqrt{(3 \cos \theta \sin \theta)^2 + (3 \cos^2 \theta - 1)^2} = \boxed{\frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \quad (14)$$

Sprawdźmy szczególne przypadki, podobnie jak dla potencjału. Jeżeli patrzymy na dipol z punktu na osi dipola w odległości r od jego środka, to $\theta = 0$ lub 180° . Wtedy $\cos \theta = \pm 1$ a $\sin \theta = 0$. Zatem $E_x = 0$, $E_y = \frac{2kp}{r^3}$

oraz $E = \frac{2kp}{r^3}$. W punktach wzdłuż osi dipola pole \vec{E} jest zwrócone w górę osi y (czyli zgodnie z wektorem \vec{p}). Zauważmy, że w tym przypadku $E(r) = \frac{dV(r)}{dr}$, a to dlatego, że układ ładunków jest rozłożony wzdłuż wektora \vec{r} (nie ma zależności od kierunku/kąta).

Drugi skrajny przypadek to punkty na symetralnej dipola, czyli $\theta = \pm 90^\circ$. Wówczas $E_x = 0$, $E_y = -\frac{kp}{r^3}$ oraz $E = \frac{kp}{r^3}$. Pole \vec{E} w punktach na symetralnej dipola jest skierowane „antyrównoległe” do wektora \vec{p} (w dół osi y). Przypomnijmy, że potencjał w tych punktach był zerowy, $V(\theta = \pm 90^\circ) = 0$.

Na koniec uwaga, że (oczywiście) $E \neq -\frac{dV}{dr}$, co widać z postaci wzorów (3) i (14). Spodziewanym wnioskiem jest jednak taki, że skoro dla dipola mamy $V \sim 1/r^2$, to musi być także $E \sim 1/r^3$.

Wyprowadzenie natężenia pola \vec{E} od dipola w zmiennych biegunowych

Gradient na płaszczyźnie możemy też wyliczyć w zmiennych biegunowych (tak jak chyba było to na wykładzie). Należy wtedy zapisać operator nabra w zmiennych (r, φ) układu biegunowego (wyprowadzenie jego postaci jest zadaniem samym w sobie, pomińmy je teraz):

$$\nabla_{r,\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (15)$$

Przypomnijmy, że zmienne r i φ są w układzie biegunowym niezależne oraz, że kąt φ jest mierzony od osi x (umowa). W naszym wyprowadzeniu wzoru (3) przyjęliśmy inną konwencję: kąt θ jest mierzony od osi dipola, z którą związaliśmy oś y układu kartezjańskiego. Zatem $\theta = 90^\circ - \varphi$. Wróćmy do postaci (3) wzoru na potencjał, ale zapiszmy ją przy pomocy zmiennej φ :

$$V(r, \theta) = \frac{kp \cos \theta}{r^2} \quad \rightarrow \quad V(r, \varphi) = \frac{kp \sin \varphi}{r^2} \quad (16)$$

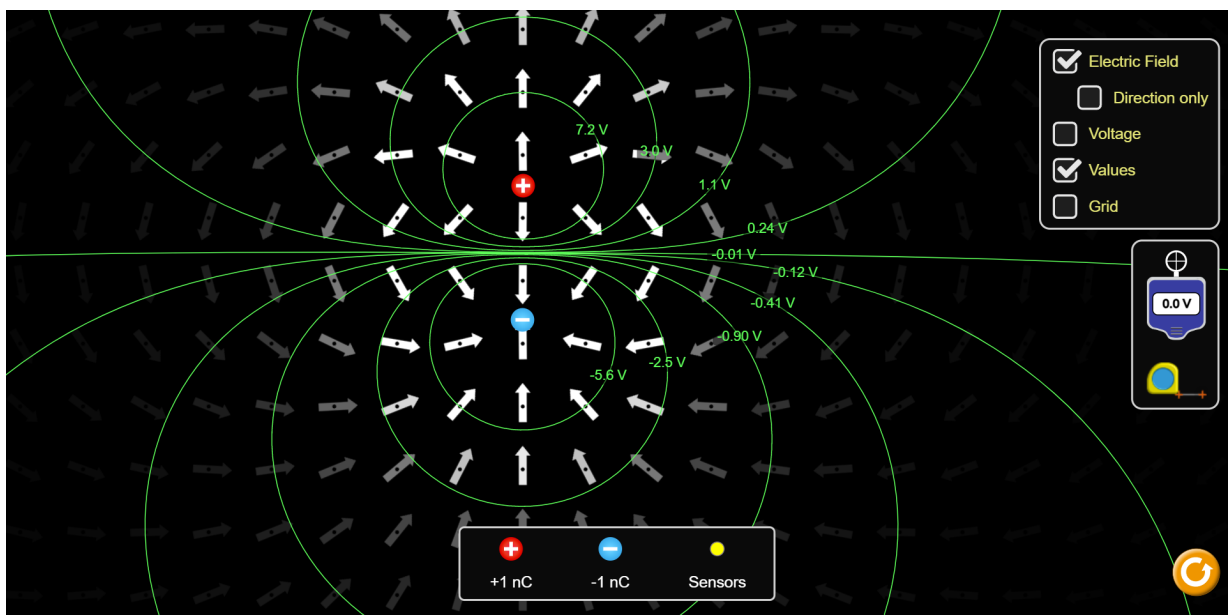
Obliczmy gradient potencjału:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla_{r,\varphi} V(r, \varphi) &= - \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = -kp \left(\sin \varphi \cdot \frac{-2}{r^3}, \frac{1}{r^3} \cdot \cos \varphi \right) = \frac{kp}{r^3} (2 \sin \varphi, -\cos \varphi) \\ &= \boxed{\frac{kp}{r^3} (2 \cos \theta, -\sin \theta)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \sin^2 \varphi + 1} = \boxed{\frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \quad (18)$$

Zauważmy, że współrzędne wektora \vec{E} są (oczywiście) inne niż we wzorach (11) i (12), ale długość wektora jest (oczywiście) taka sama. Podobnie, w pozycjach $\theta = 0$ lub 180° lub $\pm 90^\circ$ wektor jest skierowany także wzdłuż pionowej osi (transwersalnej $\equiv y$).

Pole elektryczne wytwarzane przez dipol może być zobrazowane za pomocą linii pola (wektory \vec{E}) oraz linii ekwipotencjalnych ($V = \text{const}$). Poniżej na Rys. 2 obraz pola od dipola uzyskany przy pomocy apletu Uniwersytetu Colorado ([link](#)).



Charges and Fields



Rysunek 2