ZESTAW 3

ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FIIS-FT-1 S2 GR. 1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl
Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft
Tematyka: teoria pola; operatory różniczkowe, tożsamości operatorowe.

1. Udowodnić tożsamości dla dowolnych pól skalarnych f i g oraz pól wektorowych $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$:
   (a) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
   (b) $\nabla \circ (\overrightarrow{A} \pm \overrightarrow{B}) = \nabla \circ \overrightarrow{A} \pm \nabla \circ \overrightarrow{B}$
   (c) $\nabla \times (\overrightarrow{A} \pm \overrightarrow{B}) = \nabla \times \overrightarrow{A} \pm \nabla \times \overrightarrow{B}$
   (d) $\nabla(fg) = f(\nabla g) \pm g(\nabla f)$
   (e) $\nabla(\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} \times (\nabla \times \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{B} \times (\nabla \times \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{A} \circ \nabla)\overrightarrow{B} + (\overrightarrow{B} \circ \nabla)\overrightarrow{A}$
   (f) $\nabla \circ (f\overrightarrow{A}) = f(\nabla \circ \overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A} \circ (\nabla f)$
   (g) $\nabla \circ (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} \circ (\nabla \times \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A} \circ (\nabla \times \overrightarrow{B})$
   (h) $\nabla \times (f\overrightarrow{A}) = f(\nabla \times \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A} \times (\nabla f)$
   (i) $\nabla \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A}(\nabla \circ \overrightarrow{B}) - \overrightarrow{B}(\nabla \circ \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{B} \circ \nabla)\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \circ \nabla)\overrightarrow{B}$
   (j) $\nabla \times (\nabla f) = 0$
   (k) $\nabla \circ (\nabla \times \overrightarrow{A}) = 0$
   (l) $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{A}) = \nabla(\nabla \circ \overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A}$
2. Policzyć gradient następujących pól skalarnych ϕ:
   (a) $\phi = |\overrightarrow{r}|^n$
   (b) $\phi = \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{A} = const$
   (c) $\phi = (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{A})^2$, $\overrightarrow{A} = const$
   (d) $\phi = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$
   (e) $\phi = x^2 + y^2$
   (f) $\phi = z$

   gdzie $\overrightarrow{r} \equiv (x, y, z)$, $|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Jaki kształt mają w każdym z powyższych przypadków powierzchnie $\phi = const$ (ekwipotencjalne)?
3. Policzyć dywergencję i rotację następujących pól wektorowych $\overrightarrow{A}$:
   (a) $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a} = const$
   (b) $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{r} = (x, y, z)$
   (c) $\overrightarrow{A} = (x + y, -x + y, -2z)$
   (d) $\overrightarrow{A} = (2y, 2x + 3z, 3z)$
   (e) $\overrightarrow{A} = (x^2 - z^2, 2, 2xz)$
4. [Hennel I.27] Zbadaj[1] własności pól wektorowych:
   (a) $\overrightarrow{K} = (y, z, 0)$
   (b) $\overrightarrow{L} = (x^3, 0, 2z)$
   (c) $\overrightarrow{M} = (2y, 2x, 0)$
   (d) $\overrightarrow{N} = (\sin x, \sin z, \sin y)$

[1] Uwaga. „Zbadaj/Scharakteryzuj” pole wektorowe oznacza - określ, czy jest wirowe/bezwirowe, źródłowe/bezźródłowe, potencjalne/niepotencjalne i ew. jaki jest kierunek wirowości, gdzie jest źródło itd.

5. [Hennel I.29] Rozkład prędkości prądu w rzece w funkcji odległości od środka rzeki dany jest wzorem: $\overrightarrow{v}(x) = \overrightarrow{v}_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$, gdzie $\overrightarrow{v}_0 = (0, v_0, 0)$, a L to połowa szerokości rzeki. Proszę scharakteryzować[1] to pole prędkości.

6. Wyprowadzić zależności na divrot, rotgrad, rotrot, używając zapisu algebraicznego z wykorzystaniem symbolu Leviego-Civity.
Wskazówki.
   (a) symbol delta Kroneckera: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
   (b) symbol (całkowicie antysymetryczny) Leviego-Civity: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ - parzysta permutacja} \\ \text{-1}, & (i,j,k) \text{ - nieparzysta permutacja} \\ 0, & (i,j,k) \text{ - nie jest permutacją} \end{cases}$
   (c) iloczyn skalarny: $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \sum_i a_i b_i = \sum_{ij} a_i b_j \delta_{ij}$
   (d) konwencja sumacyjna Einsteina (sumowanie po powtarzającym się wskaźniku): $\sum_i a_i b_i = a_i b_i$
   (e) i-ta składowa iloczynu wektorowego: $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$
   (f) przydatna tożsamość: $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}$

7. Proszę sprawdzić, że wyrażenie $\overrightarrow{B} = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}$ jest rzeczywiście spełnione, jeśli potencjał wektorowy pola magnetycznego o stałej indukcji $\overrightarrow{B}_0$ skierowanej wzdłuż osi x jest wektorem $\overrightarrow{A} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{B}_0)$.