

ZESTAW 11

ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FIIS-FT-1 S2 GR. 1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft

Tematyka: Równania Maxwella, prąd przesunięcia; fale elektromagnetyczne, wektor Poyntinga; falowody; fale w materii; transformacje Lorentza pól E i B .

- Proszę zapisać równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej (dokonać odpowiedniego przejścia między tymi postaciami).
 - Na podstawie zasady zachowania ładunku oraz równań Maxwella proszę wyprowadzić równanie ciągłości (ładunku).
- [Hennel IV.57] Załóżmy, że indukcja pola magnetycznego wewnątrz długiego cylindrycznego przewodnika o promieniu a wzrasta proporcjonalnie do czasu: $B = \beta t$, natomiast na zewnątrz $B = 0$. Zakładamy, że pole \vec{B} wewnątrz przewodnika jest jednorodne i równoległe do jego osi. Jakie pole elektryczne powstanie wewnątrz i na zewnątrz cylindra?
- [Hennel IV.58] Pomiędzy dwiema okrągłymi płytami o promieniu a , ustawionymi współosiowo i równoległe, natężenie pola \vec{E} wzrasta proporcjonalnie do czasu: $E = \alpha t$. Na zewnątrz tego kondensatora płaskiego pole $E = 0$. Zakładając, że pole \vec{E} wewnątrz kondensatora jest jednorodne i prostopadłe do płyt, znaleźć pole \vec{B} wewnątrz i na zewnątrz kondensatora.
- Proszę zapisać równania Maxwella dla próżni (bez ładunku i prądów) oraz na ich podstawie wyprowadzić równania falowe fali elektromagnetycznej (dla składowej \vec{E} i \vec{B}).
 - Dla płaskiej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w kierunku z składowa elektryczna ma postać $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}$. Na podstawie (4a) proszę znaleźć postać rozwiązania dla składowej magnetycznej tej fali.
- Zakładając rozwiązania równań falowych dla pól \vec{E} i \vec{B} w postaci fali płaskiej $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ wykazać, że z równań Maxwella wynika:
 - związek między wektorami \vec{E} i \vec{B} w postaci $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$,
 - poprzeczność fali e-m: $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$.
- [por. Griffiths R8.1.2] Sformułować zasadę zachowania energii w formie równania ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0,$$

gdzie gęstość energii pola e-m: $u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$, wektor Poyntinga: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$.

- Proszę obliczyć wektor Poyntinga dla biegnącej fali płaskiej $\vec{E} = (0, 0, E_0 \cos(ky - \omega t))$.
 - Policzyć średnią wielkość wektora Poyntinga i na tej podstawie wielkość natężenia fali e-m i ciśnienia promieniowania, jakie wywiera fala na powierzchnię pochłaniającą.
- [openstax.pl 16.67] Mikroskopijna kulista cząstka kurzu o promieniu $2 \mu\text{m}$ i masie $10 \mu\text{g}$ porusza się w przestrzeni kosmicznej ze stałą prędkością 30 cm/s . Fala świetlna biegnąca w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu cząsteczki kurzu pada na nią i zostaje zaabsorbowana. Zakładając, że do chwili zatrzymania cząstka porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym w czasie 1 s , oblicz średnią wartość amplitudy pola elektrycznego tej fali.
 - Określić jakie warunki muszą spełniać parametry składowych $E_x = E_{0x} \cos(\tau + \varphi_{0x})$ i $E_y = E_{0y} \cos(\tau + \varphi_{0y})$ monochromatycznej płaskiej fali elektromagnetycznej, aby fala była spolaryzowana (i) liniowo, (ii) kołowo prawoskrętnie, (iii) kołowo lewoskrętnie, (iv) eliptycznie.
 - [por. Griffiths 9.5.2] Dany jest falowód prostokątny o wymiarach poprzecznych a i b ($a < b$), rozciągający się w kierunku osi z (bok a jest równoległy do osi x , zaś bok b do osi y). Do falowodu wpuszczamy falę elektromagnetyczną, dla której pole \vec{E} ma tylko składową y . Ze względu na fakt, że składowa styczna pola \vec{E} musi znikać na powierzchni metalu musimy narzucić warunki brzegowe: $E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0$. Najprostsze rozwiązanie równania falowego dla fali biegnącej, spełniające te warunki, ma postać:

$$E_y(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)]$$

- (a) Wstawiając takie rozwiązanie do równania falowego, znaleźć zależność, jaką muszą spełniać wielkości k i ω , aby to rozwiązanie było poprawne.
 - (b) Narysować wykres $\omega(k)$, czyli tzw. relację dyspersji. Ustalić wartość częstości granicznej i skomentować fakt braku rozwiązań dla częstości niższych.
 - (c) Obliczyć prędkość fazową i prędkość grupową dla takiej relacji dyspersji.
10. [por. Griffiths 9.4] Fala płaska rozchodząca się w dodatnim kierunku x spolaryzowana jest tak, że pole \vec{E} ma tylko składową z , zaś pole \vec{B} ma tylko składową y . Fala ta pada na ścianę metalu o przewodnictwie właściwym σ , rozciągającą się dla $x > 0$.
- (a) Korzystając z równań Maxwella w postaci różniczkowej (bez prądu przesunięcia) oraz z mikroskopowego prawa Ohma wyprowadzić równanie, jakie spełnia ta fala w metalu (poprzez analogię do wyprowadzenia równania falowego).
 - (b) Założyć rozwiązanie tego równania w postaci $\vec{E} = E_0 e^{i\lambda x} e^{i\omega t} \hat{z}$ i znaleźć takie (zespolone) λ , aby równanie było spełnione.
 - (c) Następnie wybrać tylko taką wartość λ , która może być realizowana fizycznie. Jak należy interpretować zależność przestrzenną amplitudy fali w postaci zespolonej eksponenty?
- 11.*[Hennel IV.62] Transformacje Lorentza pól elektrycznego i magnetycznego przyjmują postać (podobną jak dla x, t , $1/\gamma^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$):

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} \right), & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp} \right), \end{aligned}$$

gdzie ' \parallel ' oraz ' \perp ' oznaczają składowe, odpowiednio, równoległe i prostopadłe do wektora prędkości układu primowanego \vec{v} . Udowodnić, że wielkości $\vec{E} \cdot \vec{B}$ oraz $E^2 - c^2 B^2$ są niezmiennikami transformacji Lorentza.