ZESTAW 0

Elektromagnetyzm i Optyka FiIS-FT-1 S2 gr. 1

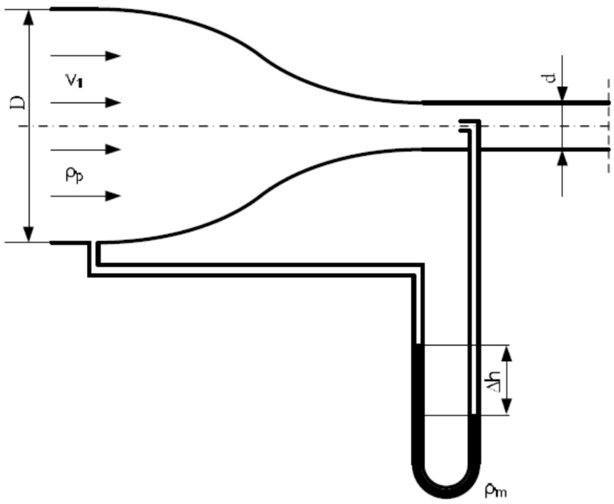
Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl
Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft
Tematyka: uzupełnienie dot. dynamiki cieczy; wprowadzenie matematyczne: operatory różniczkowe.

1. Obliczyć prędkości v_1 i v_2 przepływu powietrza o gęstości $\rho_p = 1{,}2$ kg/m^3 przez dyszę o średnicach $d = 0{,}1$ m i $D = 0{,}2$ m (patrz: rys. 1a). Manometr różnicowy, wypełniony cieczą o gęstości $\rho_m = 780$ kg/m^3, wskazuje wychylenie $\Delta h = 0{,}3$ m.

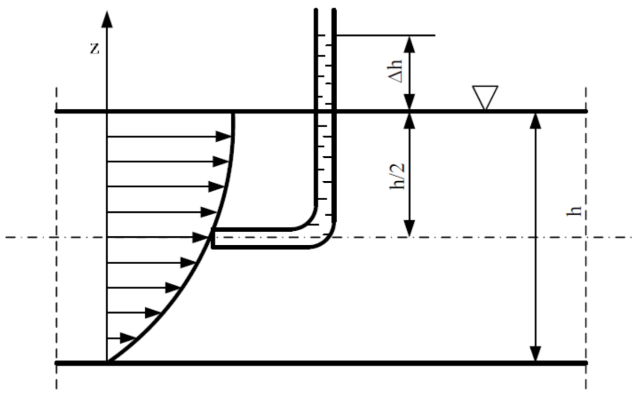
2. Kanałem prostokątnym o szerokości b i głębokości h przepływa woda. Rurka Pitota zanurzona do połowy głębokości wskazuje spiętrzenie $\Delta h = 0{,}2$ m (patrz: rys. 1b). Obliczyć średnią prędkość przepływu w przekroju kanału, przyjmując, że profil prędkości wody opisany jest równaniem $v = c \cdot z^{0,5}$, (c – stała).

3.* W jaki sposób przekrój klepsydry powinien się zmieniać wraz z wysokością, aby poziom cieczy w górnym zbiorniku malał liniowo z czasem?

4. Napisz równanie dynamiki dla kulki o promieniu r i masie m zanurzonej w cieczy lepkiej o współczynniku lepkości η. Bez rozwiązywania równania różniczkowego oblicz wartość prędkości granicznej kulki. Następnie znajdź ogólną zależność $v(t)$ dla kulki (prędkość początkowa $v_0 = 0$). Po jakim czasie kulka o masie 1 g i promieniu 1 mm poruszająca się w glicerynie o lepkości 500 mPa·s i gęstości 1250 kg/m^3 osiągnie $1/e$ prędkości granicznej? *Wskazówka 1.* Wzór Stokesa na siłę lepkości działającą na kulkę w cieczy: $F = -6\pi\eta r v$. *Wskazówka 2.* Do rozwiązania równania różniczkowego na $v(t)$ użyj metody uzmiennienia stałej - patrz: pkt. 10.



(a) rys. do zad. 1



(b) rys. do zad. 2

Rysunek 1

5. Funkcja wielu zmiennych to funkcja, której argumenty stanowi więcej niż jedna zmienna, np. $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, $f(r,\theta,\varphi)$. Pochodną funkcji wielu zmiennych (tzw. *pochodną cząstkową*) liczymy tak samo, jak pochodną funkcji jednej zmiennej, przy czym, różniczkując po danej zmiennej, pozostałe traktujemy jako stałe. Przykładowo, pochodna funkcji $f(x,y,z) = x^2y - z^3$ po x wynosi $2xy$ (y została potraktowana jak stała multiplikatywna, a z^3 - jak stała addytywna). Natomiast pochodna tej funkcji po z wynosi $-3z^2$. Do oznaczenia pochodnej cząstkowej używamy symbolu ∂ (czyt. *de kręcone* lub *pochodna cząstkowa*), np. pochodna funkcji f po x będzie oznaczona jako: $\frac{\partial f}{\partial x}$.
Na podstawie powyższego opisu oblicz pochodne cząstkowe funkcji: $f(x,y) = x^2 e^{xy}$, $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

6. Poniższa tabela przedstawia definicje podstawowych operatorów różniczkowych w zmiennych kartezjańskich.

Operator	*Argument*	*Wynik*	*Ozn. i def. w zmiennych x,y,z*
Nabla			$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Gradient	f. skalarna $f(x,y,z)$	f. wektorowa	$\nabla f \equiv \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
Dywergencja	f. wektorowa $\vec{A} = (A_x,A_y,A_z)$	f. skalarna	$\nabla \circ \vec{A} \equiv \text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotacja	f. wektorowa $\vec{A} = (A_x,A_y,A_z)$	f. wektorowa	$\nabla \times \vec{A} \equiv \text{rot}\vec{A} =$ $= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$
Laplasjan	f. wektorowa $\vec{A} = (A_x,A_y,A_z)$ f. skalarna $f(x,y,z)$	f. wektorowa f. skalarna	$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Na podstawie tabeli oblicz:

(a) Gradient pola skalarnego: $f(x,y,z) = \frac{a}{r^b}$ (a,b - stałe, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Na podstawie wyniku wykaż, że dla pola centralnego, czyli takiego, które zależy jedynie od odległości r od źródła, tzn. $f = f(r)$, gradient można łatwo policzyć jako zwykłą pochodną po r.

(b) Rotację pola prędkości cieczy: $\vec{v} = \vec{v}_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, gdzie $\vec{v}_{max} = (0,v_{max},0)$, a - stała.

(c) [Hennel I.7 i I.16] $\text{div}(\vec{r})$ oraz $\text{rot}(\vec{r})$, gdzie $\vec{r} = (x,y,z)$ to wektor położenia.

7. Bardziej formalnie definiuje się operatory różniczkowe przez ich związki z pochodnymi i całkami:

(a) Związek gradientu z pochodną kierunkową.
W matematyce definiuje się pochodną funkcji f wzdłuż wektora $\vec{u}$ w punkcie $\vec{r}$ (tzw. pochodną kierunkową): $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{u}} \equiv \nabla_{\vec{u}} f(\vec{r})$ (ozn.). Pochodna ta, w interpretacji, mierzy zmianę funkcji f wzdłuż wektora $\vec{u}$. Istnieje związek pochodnej kierunkowej z gradientem, który z kolei związany jest z kierunkiem największych zmian funkcji f. Związek jest następujący: $\underbrace{\nabla f(\vec{r})}_{\text{grad} f(\vec{r})} \circ \vec{u} = \nabla_{\vec{u}} f(\vec{r})$.

(b) Związek dywergencji z całką powierzchniową:

$$\text{div}\vec{A}\Big|_{\vec{r}_0} \equiv \left(\nabla \circ \vec{A}\right)\Big|_{\vec{r}_0} := \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{A} \circ \text{d}\vec{S}$$

gdzie V - objętość zamknięta powierzchnią S, po której przebiega całka powierzchniowa po powierzchni zamkniętej (stąd oznaczenie całki podwójnej z kółeczkiem); $\vec{r}_0$ - punkt znajdujący się stale (podczas wykonywania granicy) wewnątrz powierzchni S. Całkę powierzchniową w powyższym wzorze nazywamy *strumieniem pola* $\vec{A}$ (przechodzącym przez powierzchnię zamkniętą S). Możemy więc podać interpretację operatora dywergencji w pewnym punkcie jako proporcjonalnego do strumienia pola wektorowego, podzielonego przez objętość wyznaczoną przez pewną zamkniętą powierzchnię, dążącą do zera. Dywergencja „mierzy” więc źródłowość pola wektorowego w obszarze zamkniętym powierzchnią S (jeśli nie znika, to w tym obszarze jest źródło pola; źródło to może być dodatnie lub ujemne).

(c) Związek rotacji z całką krzywoliniową:

$$\text{rot}\vec{A} \circ \hat{n} \equiv (\nabla \times \vec{A}) \circ \hat{n} := \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_\Gamma \vec{A} \circ \text{d}\vec{r}$$

gdzie S - powierzchnia ograniczona krzywą Γ, po której przebiega całka krzywoliniowa (całka ta jest po krzywej zamkniętej - stąd oznaczenie z kółeczkiem); $\hat{n}$ - wersor normalny do powierzchni S. Całkę krzywoliniową w powyższym związku nazywa się *krążeniem wektora/pola* $\vec{A}$ i zgodnie z umową krzywa Γ jest skierowana zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej; także zwrot wersora $\hat{n}$ jest z nią zgodny. Możemy więc podać interpretację rotacji, że jest ona proporcjonalna do całki krzywoliniowej po krzywej zamkniętej, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do wektora rotacji i podzielonej przez

pole powierzchni zamkniętej tą krzywą, zmierzające do zera. W tym sensie rozumiemy rotację jako operator „mierzący” wirowość pola wektorowego.
Komentarz. Pamiętamy jedną z definicji pola sił zachowawczych: praca (czyli całka krzywoliniowa) po krzywej zamkniętej znika. Równoważnie możemy powiedzieć, że dla pól sił zachowawczych (czy precyzyjniej: pól sił potencjalnych) znika rotacja, co uważa się za warunek konieczny potencjalności pola. Pole zachowawcze jest bezwirowe.

8. Na podstawie zad. 7 rozwiąż następujące zadania:
   (a) [Hennel III.4.] Czy siła $\vec{F} = (2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2)$ jest siłą zachowawczą? Jeżeli tak, to znaleźć odpowiadającą jej energię potencjalną.
   (b) Ustal, w którą stronę tworzą się wiry w rzece w zad. 6b.
   (c) Wykaż, że pole centralne $\vec{F} = \vec{F}(|\vec{r}|)$ (inna postać pola centralnego: $\vec{r}f(r)$) jest zawsze bezwirowe.
   (d) Pokaż, że w przypadku cieczy nieściśliwej ($\rho = const(\vec{r},t)$) równanie ciągłości cieczy: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$ ($\vec{j} = \rho\vec{v}$ jest wektorem prądu cieczy) upraszcza się do postaci równania ciągłości strugi: $v_1S_1 = v_2S_2$.

9. Oblicz całki krzywoliniowe:
   (a) z funkcji $\vec{F} = 6\hat{x} + yz^2\hat{y} + (3y + z)\hat{z}$ po trójkącie w płaszczyźnie xy rozpiętym przez punkty (0,0) (1,0) (0,2) i zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara;
   (b) z funkcji $\vec{v} = ay\hat{x} + bx\hat{y}$ (a, b - stałe) po krzywej w kształcie okręgu o promieniu R i środku w punkcie (0,0).

10. Komentarz do zad. 4

Równania różniczkowe zwyczajne liniowe **niejednorodne** (RN) można rozwiązać metodą *uzmiennienia (wariacji) stałej*. Rozważmy dla przykładu równanie 1. rzędu postaci:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)\,, \tag{1}$$

w którym $y(x)$ jest szukaną funkcją, $p(x)$ pewną funkcją (może być stałą - wtedy równanie ma stałe współczynniki), a funkcja $q(x)$ stanowi niejednorodność, w najprostszym przypadku może to być po prostu stała. W metodzie uzmiennienia stałej w pierwszej kolejności rozwiązujemy równanie jednorodne (RJ):

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0\,, \tag{2}$$

czyli znajdujemy całkę ogólną równania jednorodnego (CORJ). W naszym prostym przypadku (równanie 1. rzędu) rozwiązanie (CORJ) będzie

$$y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\,, \tag{3}$$

gdzie C jest stałą całkowania. Całkę ogólną równania niejednorodnego (CORN) znajdujemy *uzmienniając* stałą C, a więc zapisując rozwiązanie (3) w postaci:

$$y(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\,. \tag{4}$$

Takie CORJ (czyli rozwiązanie RJ) wstawiamy do RN (1) i otrzymujemy równanie różniczkowe na niewiadomą funkcję $C(x)$:

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x)\,. \tag{5}$$

Uwaga. Wyraz z $C(x)$ (zerową pochodną) zawsze się w tej metodzie upraszcza - jeśli tak się nie stało, oznacza to nasz błąd. W naszym prostym przypadku (równanie 1. rzędu) rozwiązanie jest następujące:

$$C(x) = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1\,, \tag{6}$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania równania na $C(x)$ (ta stała już pozostaje i jest do ustalenia np. na podstawie warunków początkowych). W przypadku RN wyższych rzędów, równanie różniczkowe na $C(x)$ będzie też odpowiednio wyższego rzędu.

Zatem CORN ma postać (wstawiamy $C(x)$ w postaci (6) do CORJ danego przez (3)):

$$y(x) = \left(\int q(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1\right) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\,. \tag{7}$$