

Dynamika punktu materialnego swobodnego.

1. Ruch punktu materialnego o masie m jest dany równaniem $x = b \ln \left(1 + \frac{v_0}{b} t \right) [\text{m}]$.

Wyznacz siłę wywołującą ten ruch. Wyrazić ją w funkcji czasu i w funkcji prędkości. Stała b jest wyrażona w metrach, a prędkość początkowa v_0 w m/s. (Misiak 1.1)

Rozwiązanie:

$$v = \dot{x} = \frac{b}{1 + \frac{v_0}{b} t} \frac{v_0}{b} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{b} t} \quad (1.1)$$

$$a = \ddot{x} = - \frac{v_0}{\left(1 + \frac{v_0}{b} t \right)^2} \frac{v_0}{b} = - \frac{b v_0^2}{(b + v_0 t)^2} \quad (1.2)$$

Siła przedstawiona w funkcji czasu będzie miała postać

$$P(t) = m\ddot{x} = - \frac{m b v_0^2}{(b + v_0 t)^2} \quad (1.3)$$

Po przedstawieniu czasu w funkcji prędkości z równania (1.1) otrzymamy

$$t = \frac{\frac{v_0}{v} - 1}{\frac{v_0}{b}} = b \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) \quad (1.4)$$

Podstawiając (1.4) do (1.3) otrzymamy równanie siły w funkcji prędkości

$$P(v) = -m \frac{v^2}{b} \quad (1.5)$$

2. Punkt materialny o masie m porusza się po okręgu o promieniu r zgodnie z równaniem ruchu punktu po torze $s(t) = a + r(t^2 - 2t) [m]$, gdzie stała a jest wyrażona w m. Wyprowadź równanie siły działającej na punkt materialny w funkcji czasu.

Rozwiązanie:

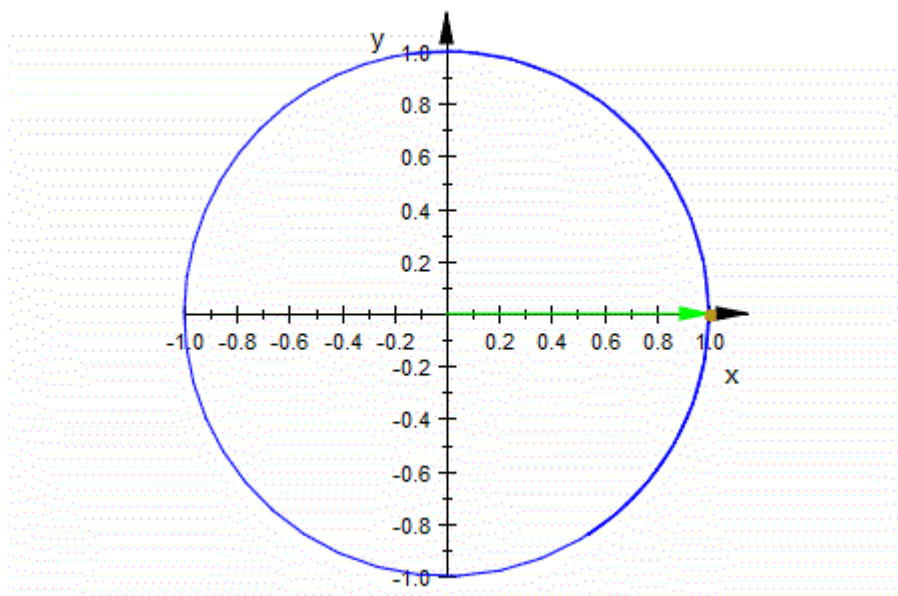
Ruch punktu jest opisany współrzędną łukową. W związku z tym składowe siły obliczamy ze wzorów

$$P_n = m \frac{\dot{s}^2}{r} = 4mr(t-1)^2 \quad (2.1)$$

$$P_\tau = m\ddot{s} = 2mr \quad (2.2)$$

Stąd

$$P = \sqrt{P_n^2 + P_\tau^2} = mr\sqrt{16(t-1)^4 + 4} \quad (2.3)$$



3. Kula o masie m opada w polu grawitacyjnym z wysokości h_0 . Na kulę tę działa siła oporu powietrza proporcjonalna do prędkości zgodnie z równaniem $R = \alpha v$. Wyznacz równanie ruchu w funkcji czasu i funkcji prędkości oraz oblicz czas t_k , po którym kula uderzy o powierzchnię ziemi.

Rozwiązanie:

$$m\ddot{y} = mg - R$$

$$\ddot{y} = g - \frac{\alpha}{m} \dot{y} \quad (3.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

gdzie $k = \frac{\alpha}{m}$

Po przekształceniach

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{g - kv} &= \int dt \\
-\frac{1}{k} \ln|g - kv| &= t + C_1 \\
\ln|g - kv| &= -kt + C_2
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Zakładając, że w chwili początkowej ciało o masie m zostało opuszczone bez prędkości początkowej, można wyznaczyć stałą całkowania C_2 .

$$\begin{aligned}
v(0) &= 0 \\
\ln g &= C_2
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Równanie prędkości w funkcji czasu przyjmie postać

$$\begin{aligned}
\ln|g - kv| &= -kt + \ln g \\
\ln\left|\frac{g - kv}{g}\right| &= -kt \\
\frac{g - kv}{g} &= e^{-kt} \\
v &= \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Aby znaleźć równanie ruchu w funkcji czasu należy scałkować równanie (3.4)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \\
y &= \frac{g}{k} \int (1 - e^{-kt}) dt \\
y &= \frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) + C_3
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Układ współrzędnych przyjęto w miejscu położenia kulki przed opuszczeniem. Zatem $y(0) = 0$. Warunek ten wykorzystamy do wyznaczenia stałej C_3 w ostatnim z równań (3.5).

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{g}{k^2} + C_3 \\
C_3 &= -\frac{g}{k^2}
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

Równanie ruchu w funkcji czasu ostatecznie zostanie wyrażone jako

$$y(t) = \frac{g}{k^2} (kt + e^{-kt} - 1)
\tag{3.7}$$

Aby wyznaczyć czas do upadku kulki t_k , skorzystamy z zależności, że $y(t_k) = h_0$

$$\frac{k^2}{g} h_0 + 1 = kt_k + e^{-kt_k} \quad (3.8)$$

Dokonajmy podstawienia: $A = \frac{k^2}{g} h_0 + 1$; $x = kt_k$. Równanie (3.8) przedstawimy w formie

$$A - x = e^{-x} \quad (3.9)$$

Trudno wyznaczyć analitycznie pierwiastki równania (3.9). Rozwiązanie znajdziemy stosując metodą graficzną lub numerycznie. Zakładając następujące dane:

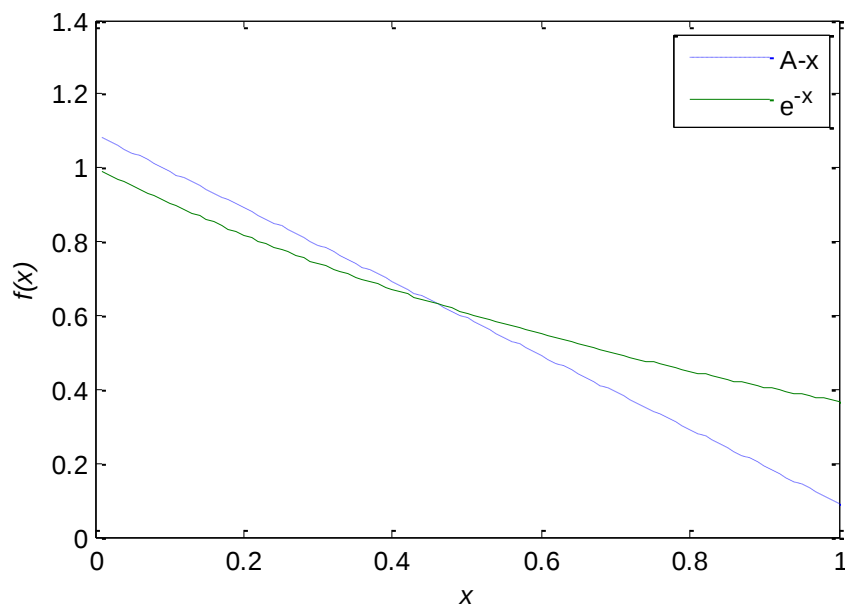
$$m = 1\text{kg}$$

$$\alpha = 0,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$h_0 = 10\text{m}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

otrzymamy $A=1,0917$. Poszukujemy miejsca przecięcia funkcji po lewej i prawej stronie równania (3.9). Graficzną reprezentację tych funkcji pokazano na rysunku Rys. 1.



Rys. 1 Graficzna reprezentacja funkcji

Po odczytaniu z wykresu miejsce przecięcia tych funkcji $x = 0,4612$ obliczymy czas lotu kuli

$$t_k = \frac{x \cdot m}{\alpha} = \frac{0,4612}{0,3} = 1,537\text{s} \quad (3.10)$$

4. Punkt materialny o masie m porusza się po prostej poziomej. W chwili początkowej punkt ma prędkość v_0 . Znaleźć prędkość punktu jako funkcję czasu oraz jego równanie ruchu jeżeli na punkt działa siła oporu $R = kmv^2$. Czy punkt pod działaniem siły może się zatrzymać? (N.10.27)

Rozwiązanie:

$$m\ddot{x} = -kmv^2 \quad (4.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\int k dt - C$$

$$\frac{1}{v} = kt + C$$

Z warunków początkowych mamy $v(0) = v_0$, zatem

$$\frac{1}{v_0} = C \quad (4.2)$$

Równanie prędkości w funkcji czasu ma postać

$$v(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} = \frac{v_0}{kv_0 t + 1} \quad (4.3)$$

W miarę upływu czasu prędkość będzie zmierzała do zera. Nigdy natomiast tej wartości nie osiągnie, ponieważ $v \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$