Drgania układów ciągłych

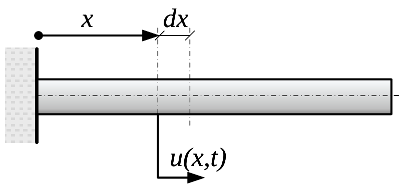
dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

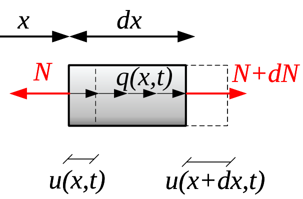
Drgania pręta

Wyprowadź równanie drgań wzdłużnych jednostronnie utwierdzonego pręta jednorodnego o długości l, polu przekroju S, gęstości ρ i module Younga E.



Rozwiązanie:

Rozpatrzmy niewielki odcinek pręta dx w dowolnym miejsc x.



Przez $u(x,t)$ oznaczamy przemieszczenie fragmentu przekroju o współrzędnej x w czasie t przez $u(x,t)$. Załóżmy ponadto, że na danym odcinku oddziałuje jakieś obciążenie ciągłe q wyrażone w $[N/m]$. Rozpiszmy teraz siły oddziałujące na badany fragment pręta. Z lewej strony oddziałuje siła normalna N, a po prawej stronie będzie działać siła o wartości N powiększoną o wartość dN. dN oznacza tutaj przyrost wartości siły N na skutek zmiany współrzędnej (miejsca) jej występowania, inaczej $\frac{\partial N}{\partial x}dx$.
Zapiszmy drugą zasadę dynamiki Newtona dla tego fragmentu:

$$dm\ddot{u} = -N + N + dN + qdx \tag{1}$$

$$\rho S dx \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x}dx + qdx \tag{2}$$

$$\rho S \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} + q \tag{3}$$

Siła normalną można wyznaczyć z prawa Hook'a dla jednoosiowego rozciągania:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{4}$$

$$\frac{N}{S} = E\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} \tag{5}$$

$$N = ES\frac{du}{dx} \tag{6}$$

Podstawiając równanie 6 do 3 otrzymujemy:

$$\rho S \ddot{u} = ESu_{xx} + q \tag{7}$$

Gdzie przez u'' oznaczamy drugą pochodną funkcji u po zmiennej x tj. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.
Rozważmy teraz drgania własne (swobodne) pręta. Wówczas w równaniu różniczkowym 3 nie wystąpi obciążenie zewnętrzne q. Po podzieleniu następnie tego równania obustronnie przez S otrzymamy:

$$\rho\ddot{u}(x,t) = Eu''(x,t) \quad \backslash : \rho \tag{8}$$

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \tag{9}$$

gdzie: $c^2 = \frac{E}{\rho}$. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Przemieszczenie przekrojów pręta u jest funkcją dwóch niezależnych zmiennych x oraz t. Skoro tak, to funkcję u można zastąpić iloczynem dwóch funkcji zależnej osobno od x oraz od t.

$$u(x,t) = U(x)T(t) \tag{10}$$

Podstawmy 10 do 9:

$$U(x)\ddot{T}(t) = c^2 U''(x)T(t) \tag{11}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{U''}{U} \tag{12}$$

Jeśli funkcja T zależy tylko od t, a funkcja W tylko od x, a zmienne te są niezależne od siebie, to równanie 12 musi być pewną stałą wartością. Nazwijmy tę wartość $-\omega^2$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{U''}{U} = -\omega^2 \tag{13}$$

Prowadzi to do dwóch równań różniczkowych z rozdzielonymi zmiennymi.

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{14}$$

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \tag{15}$$

Są to klasyczne równania oscylatora harmonicznego. Pierwsze jest w dziedzinie czasu, a drugie w dziedzinie współrzędnej x. Rozwiązaniami powyższych równań są równania:

$$T(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{16}$$

$$U(x) = C\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + D\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) \tag{17}$$

Do wyznaczenia stałych w równaniu 16 potrzebujemy warunków początkowych, natomiast do wyznaczenia stałych z równania 17 potrzebujemy zdefiniować warunki brzegowe.

Warunki brzegowe:

Pręt jest z jednej strony utwierdzony, a z drugiej strony znajduje się wolny (nieobciążony) koniec pręta. W takim wypadku na końcu pęta siła normalna musi wynieść 0.

$$u(0,t) = 0 \tag{18}$$

$$N(l) = 0 \rightarrow u'(l,t) = 0 \tag{19}$$

Ostatni z warunków wynika wprost z równania 6. Z warunków tych policzymy stałe występujące w funkcji U.

$$D = 0 \tag{20}$$

$$C\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) = 0 \tag{21}$$

Rozwiązanie jest nietrywialne gdy $C \neq 0$. W związku z tym $\cos(\omega l/c) = 0$, a więc:

$$\frac{\omega_n l}{c} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \tag{22}$$

Więc funkcja $U(x)$ może przyjąć nieskończenie wiele postaci dla dowolnego $n \in N$, dla których ω przyjmuje następujące wartości:

$$\omega_n = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi c}{l} \tag{23}$$

Nazywamy je *wartościami własnymi*. Każdej wartości własnej odpowiada funkcja własna U

$$U_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right) \tag{24}$$

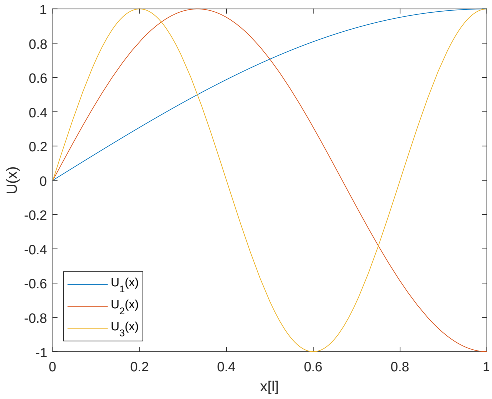
Pierwsze trzy funkcje własne przedstawiają się następująco:

$$U_1(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \tag{25}$$

$$U_2(x) = C_2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\frac{x}{l}\right) \tag{26}$$

$$U_3(x) = C_3 \sin\left(\frac{5}{2}\pi\frac{x}{l}\right) \tag{27}$$

Funkcje własne określają tzw. postacie (lub formy) drgań, które zwizualizowano na wykresie poniżej przyjmując $C_1 = C_2 = C_3 = 1$.



Warto zauważyć, że wszystkie te funkcje spełniają warunki brzegowe 18 i 19. Dla każdej postaci drgań możemy wyróżnić miejsce, które stale stale będzie miało wartość równą 0 (nie licząc utwierdzenia). Takie miejsca nazywamy *węzłami drgań* i ich liczba jest zależna od numeru postaci drgań $l_w = n-1$. Funkcje U_n stanowią rozwiązanie szczególne zagadnienia brzegowego. Na ogólne rozwiązanie składa się nieskończona suma rozwiązań szczególnych lecz zwykle przyjmuje się kilka pierwszych form. Oznacza to, że postacie drgań mogą się nakładać na siebie i pręt może drgać jednocześnie z pierwszą formą jak i drugą. Udział tych form jest zależny od amplitudy C_n tej formy. Przejdźmy teraz do rozwiązania równania różniczkowego 15. Rozwiązaniem jest funkcja 16. Jednak istnieje nieskończenie wiele wartości własnych ω_n. Rozwiązanie funkcji T dla wartości własnej ω_n ma postać:

$$T_n(t) = A_n \sin(\omega t) + B_n \cos(\omega t) \tag{28}$$

gdzie A_n oraz B_n to dowolne stałe. Ostateczne rozwiązanie szczególne równania drgań podłużnych 15 odpowiadające n-tej wartości własnej ω_n przedstawia się następująco:

$$u_n(x,t) = \left(A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)\right) C_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \tag{29}$$

Iloczyny A_nC_n oraz B_nC_n to także jakieś stałe. W związku z tym, przyjmijmy że $C_n = 1$. Rozwiązaniem ogólnym równania drgań będzie zatem suma szczególnych rozwiązań ostatecznych $u_n(x,t)$.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)\right) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \tag{30}$$

Na koniec zostaje do wyznaczenia $2n$ stałych A_n oraz B_n z warunków początkowych.

Warunki początkowe:

W chwili początkowej pręt miał jakieś pole przemieszczeń $u_0(x)$ oraz prędkości początkowe $\dot{u}_0(x)$.

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{31}$$
$$\dot{u}(x,0) = v_0(x) \tag{32}$$

Podstawiając te warunki do równania 30 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n(x) = u_0(x) \tag{33}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n U_n(x) = v_0(x) \tag{34}$$

Przedstawmy prawe strony powyższego równania jako szeregi nieskończonych sum funkcji własnych:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x) \tag{35}$$
$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_n(x) \tag{36}$$

Oznacza to, że chcemy przedstawić funkcje początkowego położenia przekrojów pręta jako kombinacje liniową form drgań $U_n(x)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x) \tag{37}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_n(x) \tag{38}$$

Formy drgań U_n są funkcjami ortogonalnymi . Wykorzystamy ten warunek do obliczenia współczynników A_n i B_n. O ortogonalności form możemy się przekonać analizując dwa poniższe równania różniczkowe 15 dla dwóch dowolnych form drgań.

$$U_n''(x) + \frac{\omega_n^2}{c^2} U_n(x) = 0 \tag{39}$$
$$U_m''(x) + \frac{\omega_m^2}{c^2} U_m(x) = 0 \tag{40}$$

Pomnóżmy te równania przez odpowiednio funkcję $U_m(x)$ oraz $U_n(x)$, odejmijmy stronami i scałkujmy względem x w granicach od 0 do l.

$$\frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{c^2} \int_0^l U_n(x)U_m(x)dx + \int_0^l U_n''(x)U_m(x)dx - \int_0^l U_m''(x)U_n(x)dx = 0 \tag{41}$$

Wykorzystajmy całkowanie przez części wykorzystując poniższą tożsamość:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U_n'(x)U_m(x)\right) = U_n''(x)U_m(x) + U_n'(x)U_m'(x) \tag{42}$$
$$U_n''(x)U_m(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(U_n'(x)U_m(x)\right) - U_n'(x)U_m'(x) \tag{43}$$

Podstawiając 43 do 41 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{c^2} \int_0^l U_n(x)U_m(x)dx + \left(U_n'(x)U_m(x)\right)|_{x=0}^{x=l} + \\ &- \int_0^l U_n'(x)U_m'(x)dx - \left(U_m'(x)U_n(x)\right)|_{x=0}^{x=l} + \\ &+ \int_0^l U_m'(x)U_n'(x)dx = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Po zredukowaniu całek z wyrazami $U'_m(x)U'_n(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_n(x)U_m(x)dx + U'_n(l)U_m(l) - U'_n(0)U_m(0)+\\ - U'_m(l)U_n(l) + U'_m(0)U_n(0) = 0\end{aligned} \tag{45}$$

Z jednorodnych warunków brzegowych 18 i 19 wynika, że $U'_n(l) = U'_m(l) = 0$ oraz $U_n(0) = U_m(0) = 0$. Zatem:

$$\frac{\omega_n^2-\omega_m^2}{c^2}\int_0^l U_n(x)U_m(x)dx = 0 \tag{46}$$

Jeśli $n \neq m$ to $\omega_n^2 - \omega_m^2 \neq 0$ i całka w powyższym wzorze musi być równa 0.

$$\int_0^l U_n(x)U_m(x)dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \int_0^l U_m^2(x)dx & , n = m \end{cases} \tag{47}$$

Aby obliczyć stałe całkowania pomnóżmy równania 34 oraz 33 przez $U_m(x)$ oraz scałkujmy w granicach od 0 do l.

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^l U_n(x)U_m(x)dx = \int_0^l u_0(x)U_m(x)dx \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\omega_n \int_0^l U_n(x)U_m(x)dx = \int_0^l v_0(x)U_m(x)dx \tag{49}$$

Tylko całki iloczynów funkcji U_n i U_m dla jednakowych indeksów $n = m$ są niezerowe. W związku z tym, z nieskończonej sumy zostaje tylko jeden wyraz dla $m = n$. Wówczas możemy obliczyć stałe całkowania B_n i A_n wg równań:

$$B_n = \frac{\int_0^l u_0(x)U_n(x)dx}{\int_0^l U_n^2(x)dx} \tag{50}$$

$$A_n = \frac{\int_0^l v_0(x)U_n(x)dx}{\omega_n\int_0^l U_n^2(x)dx} \tag{51}$$

Przykład:

Załóżmy, że pręt jest rozciągany stałą siłą F, a następnie jest zwolnione obciążenie. Wyznaczmy równanie ruchu poszczególnych przekrojów pręta. Zacznijmy od warunków początkowych. Jeśli cały pręt jest rozciągany jednakową siłą osiową F, to przemieszczenia przekrojów będą dane funkcją:

$$u_0(x) = \frac{Fx}{ES} \tag{52}$$

W momencie odciążenia pręta wszystkie przekroje miały prędkości równe 0, a więc $v_0(x) = 0$. Obliczmy współczynniki A i B ze wzorów 51 i 50.

$$A_n = 0 \tag{53}$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\frac{8Fl}{ES\pi^2} \tag{54}$$

Ostateczne rozwiązanie 30 wygląda następująco:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8Fl}{ES\pi^2(2n-1)^2}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi c\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}t\right) \tag{55}$$

Suma pierwszych trzech elementów powyższego szeregu przedstawia się następująco:

$$u(x,t) \approx \frac{8Fl}{ES\pi^2}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{2l}\right) - \frac{\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{3\pi ct}{2l}\right)}{9} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{5\pi ct}{2l}\right)}{25}\right) \tag{56}$$