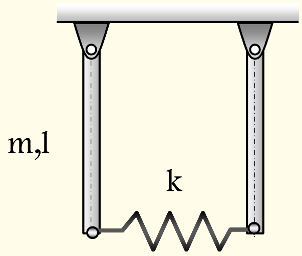
Drgania swobodne nietłumione

dr inż. Sebastian Pakuła

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Mechaniki i Wibroakustyki

e-mail: spakula@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~spakula/

Przykład:
Wyprowadź różniczkowe równania ruchu wahadła połączonego sprężynami jak na rysunku, korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju. Wyznacz częstości drgań własnych, formy drgań oraz równanie ruchu dla przyjętych warunków początkowych $\varphi_1(0) = \varphi_{01}, \varphi_2(0) = \varphi_{02}, \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Załóż niewielkie wychylenia (tj. $\sin\varphi = \varphi$).

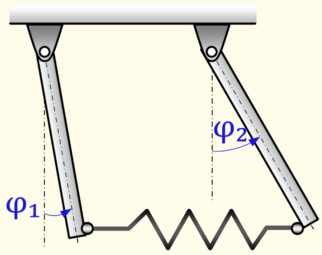


- **Dane:** $m, l, k, \varphi_{01}, \varphi_{02}$

  Szukane: różniczkowe równanie,

  formy drgań, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

Rozwiązanie:



Oznaczam współrzędne opisujące ruch wahadeł. Nie istnieją więzy kinematyczne między φ_1 i φ_2. Zatem mamy dwa stopnie swobody $q = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Definiuję **energie kinetyczną**:

$$E = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}(\dot{\varphi_1}^2 + \dot{\varphi_2}^2)$$

Energia potencjalna:

$$U = \frac{1}{2}kl^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}mgl(\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2))$$

Następnie obliczamy pochodne zgodne z równaniami Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_1 \qquad \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}mgl\sin\varphi_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_2 \qquad \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}mgl\sin\varphi_2$$

Dokonajmy linearyzacji funkcji sinus, z uwagi na niewielkie kąty. Ostatecznie równania Lagrange'a II rodzaju przedstawiają się następująco:

$$\begin{cases} \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_1 + kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}mgl\varphi_1 & = & 0 \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_2 - kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}mgl\varphi_2 & = & 0 \end{cases}$$

Zapiszmy to w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie to jest postaci $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$, gdzie $\mathbf{M}$ - to macierz mas, $\mathbf{K}$ - macierz sztywności, $\mathbf{q}$ - wektor współrzędnych uogólnionych. Charakteryzuje więc układ drgający przypominający typowy oscylator harmoniczny (masa-sprężynka). Do rozwiązania tego układu posłużymy się metodą przewidywań. Załóżmy więc rozwiązanie w postaci:

$$\varphi_1(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)\varphi_2(t) = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \tag{1}$$

Różniczkując równania dwukrotnie otrzymamy:

$$\ddot{\varphi}_1(t) = -A_1\omega^2 \sin(\omega t) - B_1\omega^2 \cos(\omega t)\ddot{\varphi}_2(t) = -A_2\omega^2 \sin(\omega t) - B_2\omega^2 \cos(\omega t)$$

Zauważmy że: $\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$. Podstawmy to do równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{ml^2\omega^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyłączmy wektor współrzędnych φ_1, φ_2 za macierz:

$$\begin{bmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dokonajmy podstawienia φ_1 i φ_2:

$$\begin{bmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) \\ A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funkcje sinus i cosinus są ortogonalne. Oznacza to, że gdy $\sin\omega t = 0$ to $\cos\omega t = 1$ i vice versa. Skoro równanie ruchu musi być spełnione dla każdej chwili czasu t, możemy wyróżnić dwie z nich: gdy $\sin\omega t = 1, \cos\omega t = 0$ oraz $\sin\omega t = 0, \cos\omega t = 1$. Dzięki temu uzyskamy cztery równania przedstawione za pomocą dwóch równań macierzowych:

$$\begin{bmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Równania te przyjmują nietrywialne rozwiązania (tj. $A \neq 0, B \neq 0$) gdy wyznacznik macierzy współczynników jest równy zero tj.:

$$W = \begin{vmatrix} -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \end{vmatrix} = (-\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl)^2 - (kl^2)^2 = 0$$

Możemy to rozwiązać w prosty sposób przenosząc $-(kl^2)^2$ na prawą stronę oraz pierwiastkując obustronnie. Otrzymamy:

$$\left| -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl \right| = \left| kl^2 \right|$$

Daje to więc dwa rozwiązania:

$$-\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl = kl^2 \qquad -\frac{ml^2}{3}\omega^2 + kl^2 + \frac{1}{2}mgl = -kl^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\frac{k}{m}}$$

Obliczone parametry ω_1 oraz ω_2 to częstości drgań własnych. Numeruje się w porządku rosnącym. Jeśli układ ma możliwość poruszać się bez udziału sił zewnętrznych to będzie poruszał się ruchem drgającym tylko z takimi częstościami. Z którą z nich? Najczęściej z obiema naraz. Jest to związane z formami drgań i zależy od warunków początkowych.

Formy drgań

Z każdą częstością drgań własnych jest powiązana forma (lub inaczej "postać", "mod") drgań. Postacie drgań określają zależności pomiędzy ruchami poszczególnych punktów w układzie. Ruch jest opisany dwiema współrzędnymi φ_1 oraz φ_2, które z kolei zamieniają się wg funkcji harmonicznych z amplitudami odpowiednio A_1, B_1 oraz A_2, B_2. Przy założeniu, że wyznacznik główny W jest równy 0, równania (2) i (3) są liniowo zależne. W związku z tym wybierzmy jedno z równań z tej macierzy (np. pierwsze) i określmy zależności między amplitudami A_1/A_2 (B_1/B_2).

I Forma drgań

Postawmy za ω pierwszą częstość drgań własnych ω_1 do pierwszego równania z równania macierzowego (2). Aby oznaczyć, że chodzi o pierwszą formę drgań do amplitud A i B dołóżmy drugi indeks oznaczający numer formy drgań.

$$\left(-\frac{ml^2}{3}\frac{3}{2}\frac{g}{l} + kl^2 + \frac{1}{2}mgl\right)A_{11} - kl^2 A_{21} = 0$$

$$kl^2 A_{11} = kl^2 A_{22}$$

$$X_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = 1$$

gdzie X_1 - to współczynnik pierwszej formy drgań. Współczynnik równy 1 mówi o tym, że oba pręty będą drgały z jednakową amplitudą i poruszały się w tym samym kierunku (tj. zgodnym z założonym układem współrzędnych φ_1 i φ_2. Warto zauważyć, że pierwsza forma drgań jest związana z synchronicznym ruchem wahadeł. Podczas takiego ruchu, sprężyna w ogóle się nie odkształca. Wynika z tego również fakt, że ω_1 nie zależy od współczynnika sprężystości k.

II Forma drgań

Wykorzystajmy to samo równanie co poprzednio, tym razem jednak za ω podstawmy ω_2.

$$\left(-\frac{ml^2}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 6\frac{k}{m}\right) + kl^2 + \frac{1}{2}mgl\right)A_{12} - kl^2 A_{21} = 0$$

$$\left(-2kl^2 + kl^2\right)A_{12} = kl^2 A_{22}$$

$$X_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -1$$

gdzie X_2 - to współczynnik drugiej formy drgań. Ujemny współczynnik formy drgań -1 oznacza, że wahadła będą się stale poruszać przeciwnie do siebie z taką samą amplitudą. Jeśli wahadło pierwsze będzie obracać się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, do wahadło drugie przeciwnie (i vice versa). W przypadku współczynników B będzie identycznie, a więc: $X_1 = \frac{B_{21}}{B_{11}}, X_2 = \frac{B_{22}}{B_{12}}$.

Rozwiązanie ogólne:
Rozwiązaniem ogólnym jest suma rozwiązań (1) dla każdej z form tj.:

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{n=2} A_{ij}\sin(\omega_j t) + B_{ij}\cos(\omega_j t) \tag{4}$$

a więc:

$$\varphi_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t) + B_{11}\cos(\omega_1 t) + A_{12}\sin(\omega_2 t) + B_{12}\cos(\omega_2 t)$$
$$\varphi_2(t) = A_{21}\sin(\omega_1 t) + B_{21}\cos(\omega_1 t) + A_{22}\sin(\omega_2 t) + B_{22}\cos(\omega_2 t)$$

Do wyznaczenia kompletnych równań ruchy potrzebujemy wyznaczyć 8 stałych. W tym momencie uwzględnimy formy drgań przyjmując $A_{2i} = A_{1i}X_i$ oraz $B_{2i} = B_{1i}X_i$, redukując liczbę niewiadomych do 4.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & A_{11}\sin(\omega_1 t) + B_{11}\cos(\omega_1 t) + A_{12}\sin(\omega_2 t) + B_{12}\cos(\omega_2 t) \\ \varphi_2(t) & = & X_1A_{11}\sin(\omega_1 t) + X_1B_{11}\cos(\omega_1 t) + X_2A_{12}\sin(\omega_2 t) + X_2B_{12}\cos(\omega_2 t) \end{array}$$

Podstawiając obliczone wcześniej współczynniki form drgań X_1 oraz X_2 otrzymujemy równania w ruchu wahadeł.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & A_{11}\sin(\omega_1 t) + B_{11}\cos(\omega_1 t) + A_{12}\sin(\omega_2 t) + B_{12}\cos(\omega_2 t) \\ \varphi_2(t) & = & A_{11}\sin(\omega_1 t) + B_{11}\cos(\omega_1 t) - A_{12}\sin(\omega_2 t) - B_{12}\cos(\omega_2 t) \end{array} \tag{5}$$

Aby uzyskać równania prędkości zróżniczkujmy równania (5).

$$\begin{array}{rcl} \dot{\varphi}_1(t) & = & A_{11}\omega_1\cos(\omega_1 t) - B_{11}\omega_1\sin(\omega_1 t) + A_{12}\omega_2\cos(\omega_2 t) - B_{12}\omega_2\sin(\omega_2 t) \\ \dot{\varphi}_2(t) & = & A_{11}\omega_1\cos(\omega_1 t) - B_{11}\omega_1\sin(\omega_1 t) - A_{12}\omega_2\cos(\omega_2 t) + B_{12}\omega_2\sin(\omega_2 t) \end{array} \tag{6}$$

Pozostaje teraz wyznaczyć 4 stałe $A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12}$ korzystając z 4 warunków początkowych $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0)$. Podstawmy je do równań (5) i (6) za czas wstawiając zero $t = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_{01} & = & B_{11} + B_{12} \\ \varphi_{02} & = & B_{11} - B_{12} \\ 0 & = & A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 \\ 0 & = & A_{11}\omega_1 - A_{12}\omega_2 \end{array} \right. \tag{7}$$

Z powyższego układu równań otrzymujemy poszukiwane stałe:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_{11} & = & \frac{1}{2}(\varphi_{01} + \varphi_{02}) \\ B_{12} & = & \frac{1}{2}(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \\ A_{11} & = & 0 \\ A_{12} & = & 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Podstawiając wyznaczone stałe do równań (5) otrzymujemy ostateczne równania ruchu:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & \frac{1}{2}(\varphi_{01} + \varphi_{02})\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}(\varphi_{01} - \varphi_{02})\cos(\omega_2 t) \\ \varphi_2(t) & = & \frac{1}{2}(\varphi_{01} + \varphi_{02})\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2}(\varphi_{01} - \varphi_{02})\cos(\omega_2 t) \end{array} \tag{9}$$

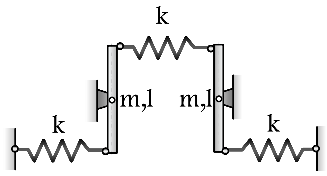
Tak więc ruch wahadeł zależy od warunków początkowych. Na koniec warto zauważyć, że jeśli oba wahadła wychylimy jednakowo tj. $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ to układ będzie poruszał się tylko pierwszą formą. A jeśli oba wahadła wychylimy przeciwnie o tę samą wartość tj. $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$ to układ będzie drgał wyłącznie drugą formą (i nieco szybciej bo $\omega_2 > \omega_1$).

1 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania układu, określ częstości drgań własnych oraz formy drgań.

Dane: m, k

Szukane: ω_{01}, ω_{02}, postacie drgań

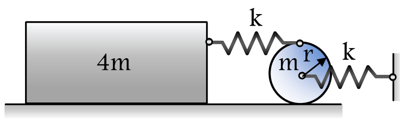


2 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania układu, określ częstości drgań własnych oraz formy drgań. Przyjąć, że krążek o masie$m$ toczy się bez poślizgu.

Dane: m, k, r

Szukane: ω_{01}, ω_{02}, postacie drgań

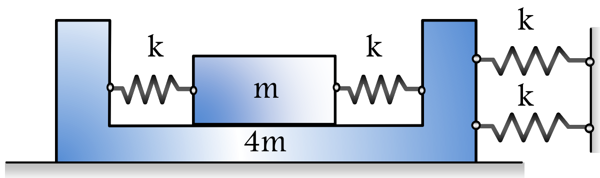


3 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu oraz rozwiąż je przyjmując, że klocek o masie m przesunięty wytrącony z położenia równowagi o $x_1(0) = x_{01}$. Pozostałe warunki brzegowe są zerowe tj. $x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(0) = 0$.

Dane: m, k

Szukane: $x_1(t), x_2(t)$



4 Zadanie

Wyznacz różniczkowe równania ruchu układu oraz wyznacz jakie warunki początkowe należy nadać układowi aby poruszał się tylko pierwszą formą drgań. Większy z krążków o masie $4m$ porusza się ruchem obrotowym, a mniejszy o masie m toczy się bez poślizgu.

Dane: m, k

Szukane: $x_{01}, x_{02}, \dot{x}_{01}, \dot{x}_{02}$