

Rozdział 7

Funkcje użyteczności

7.1. Rozważ model dwumianowy z cenami akcji

$$\begin{aligned} S(0) &\in \mathbb{R} \\ S(1) &= \begin{cases} S^U = S(0)(1 + U) & \text{z prawdopodobieństwem } p \\ S^D = S(0)(1 + D) & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p. \end{cases} \end{aligned}$$

oraz walorem wolnym od ryzyka $A(0) = 1$, $A(1) = 1 + r$. Zakładając funkcję użyteczności $u(x) = -e^{-x}$ oraz wielkość kapitału początkowego W , znajdź portfel maksymalizujący oczekiwaną użyteczność przez bezpośrednie obliczenie maksimum z $E(V_{\mathbf{x}}(1))$.

7.2. Rozwiąż problem z zadania 7.1 stosując Twierdzenie 7.16.

7.3. Rozważ model dwumianowy z $S(0) = 100$, $U = 0.1$, $D = -0.05$, $p = \frac{3}{4}$ oraz $r = 0.05$. Stosując wzory z rozwiązania zadania 7.1 znajdź w Excelu optymalną strategię maksymalizującą oczekiwaną użyteczność wypłaty dla $u(x) = -e^{-x}$ oraz $W = 100$.

7.4. Rozważ model dwumianowy zadania 7.3. Stosując wzory z rozwiązania zadania 7.2 znajdź w Excelu optymalną strategię maksymalizującą oczekiwaną użyteczność wypłaty dla $u(x) = -e^{-x}$. Porównaj wyniki z rozwiązaniem zadania 7.3.

7.5. Rozważ model dwumianowy z zadania 7.1. Zakładając funkcję użyteczności $u(x) = \ln(x)$ oraz wielkość kapitału początkowego W , znajdź portfel maksymalizujący oczekiwaną użyteczność przez bezpośrednie obliczenie maksimum z $E(V_{\mathbf{x}}(1))$.

- 7.6. Rozwiąż problem z zadania 7.5 stosując Twierdzenie 7.16.
- 7.7. Rozważ model dwumianowy z $S(0) = 100$, $U = 0.2$, $D = -0.1$, $p = \frac{3}{5}$ oraz $r = 0.05$. Stosując wzory z rozwiązania zadania 7.5 znajdź w Excelu optymalną strategię maksymalizującą oczekiwaną użyteczność wypłaty dla $u(x) = \ln(x)$ oraz $W = 200$.
- 7.8. Rozważ model dwumianowy zadania 7.7. Stosując wzory z rozwiązania zadania 7.6 znajdź w Excelu optymalną strategię maksymalizującą oczekiwaną użyteczność wypłaty dla $u(x) = \ln(x)$. Porównaj wyniki z rozwiązaniem zadania 7.7.
- 7.9. Rozważ walor o cenie dzisiejszej $S_1(0) = 94$ i przyszłych cenach

$$S_1(1) = \begin{cases} 130 & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ 120 & \text{z prawdopodobieństwem } 0.1 \\ 100 & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ 95 & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ 90 & \text{z prawdopodobieństwem } 0.3, \end{cases}$$

razem z walorem wolnym od ryzyka o cenach $S_0(0) = 1$ oraz $S_0(1) = 1.05$. W arkuszu kalkulacyjnym Excela wyznacz optymalną strategię inwestycyjną dla funkcji użyteczności

$$u(x) = \ln x.$$

- 7.10. Przyjmując dane z zadania 7.9, na podstawie wyliczonej w zadaniu 7.9 optymalnej strategii, znajdź w Excelu miarę wolną od ryzyka.
- 7.11. Na podstawie rozwiązania zadania 7.10 sprawdź własność martyngału dla S_1 i znajdź w Excelu ceny Arrowa-Debreu.
- 7.12. Rozważ model z czterema walorami ryzykownymi S_1 , S_2 , S_3 oraz S_4 . Załóżmy że ceny dzisiejsze są równe $S_1(0) = 94$, $S_2(0) = 76$, $S_3(0) = 39$, $S_4(0) = 37$ a przyszłe ceny kształtować się będą na poziomie

$$\begin{aligned} & (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1)) \\ = & \begin{cases} (130, 70, 40, 40) & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ (120, 60, 50, 20) & \text{z prawdopodobieństwem } 0.1 \\ (100, 70, 60, 60) & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ (95, 80, 40, 40) & \text{z prawdopodobieństwem } 0.2 \\ (90, 110, 30, 50) & \text{z prawdopodobieństwem } 0.3. \end{cases} \end{aligned}$$

Założmy że cena dzisiejsza waloru wolnego od ryzyka wynosi $S_0(0) = 100$ oraz że $S_0(1) = 105$. Znajdź miarę martyngałową.

- 7.13. Rozpatrz dane z zadania 7.12. Znajdź optymalną oczekiwaną użyteczność oraz optymalną wypłatę dla $u = \ln(x)$ przy wartości początkowej inwestycji $W = 1000$. Żeby uzyskać ostateczny liczbowy wynik, obliczenia przeprowadź w Excelu.

Podpowiedź: Wyprowadzenie jest analogiczne do rozwiązania zadania 7.6.

- 7.14. Na bazie rozwiązania zadania 7.13 oblicz w Excelu optymalną strategię.
- 7.15. Na bazie rozwiązania zadania 7.13 oblicz w Excelu ceny Arrowa-Debreu oraz optymalną oczekiwaną użyteczność.

7.1 Rozwiązania

7.1 Wiemy że

$$x_0 A(0) + x_1 S(0) = W.$$

Przyjmując oznaczenia $x = x_1$ mamy

$$x_0 = \frac{W - x_1 S(0)}{A(0)} = W - x S(0).$$

Oczekiwana użyteczność wynosi

$$\begin{aligned} f(x) &= E(V_x(1)) \\ &= pu \left(x_0 A(1) + x_1 S^U \right) + (1-p) u \left(x_0 A(1) + x_1 S^D \right) \\ &= -p e^{-(x_0 A(1) + x_1 S^U)} - (1-p) e^{-(x_0 A(1) + x_1 S^D)} \\ &= -p e^{-(x_0(1+r) + x_1 S(0)(1+U))} - (1-p) e^{-(x_0(1+r) + x_1 S(0)(1+D))} \\ &= -p e^{-((1+r)(W - x S(0)) + x S(0)(1+U))} - (1-p) e^{-((1+r)(W - x S(0)) + x S(0)(1+D))} \\ &= -p e^{-((1+r)W + x S(0)(U-r))} - (1-p) e^{-((1+r)W + x S(0)(D-r))} \end{aligned}$$

Szukamy maksimum f .

$$f'(x) = S(0) (U - r) p e^{-((1+r)W + x S(0)(U-r))} + S(0) (D - r) (1 - p) e^{-((1+r)W + x S(0)(D-r))}.$$

Mamy

$$f'(x) = 0$$

gdy

$$(U - r) p e^{-((1+r)W + xS(0)(U-r))} = -(D - r)(1 - p) e^{-((1+r)W + xS(0)(D-r))}$$

Logarytmując i upraszczając dostajemy

$$\ln((U - r)p) - xS(0)(U - r) = \ln(-(D - r)(1 - p)) - xS(0)(D - r)$$

czyli

$$x = \frac{\ln((r - D)(1 - p)) - \ln((U - r)p)}{S(0)(D - U)}.$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ln((r - D)(1 - p)) - \ln((U - r)p)}{S(0)(D - U)} \\ x_0 &= W - x_1 S(0). \end{aligned}$$

7.2 Znajdujemy miarę martyngałową

$$\begin{aligned} q_1 &= p^* = \frac{r - D}{U - D}, \\ q_2 &= 1 - p^*. \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 7.16 wiemy że

$$\begin{aligned} X^*(1) &= (u')^{-1} \left(\frac{q_1}{\lambda(1 + R)p} \right), \\ X^*(2) &= (u')^{-1} \left(\frac{q_2}{\lambda(1 + R)(1 - p)} \right), \\ W &= \frac{1}{1 + R} (q_1 X^*(1) + q_2 X^*(2)). \end{aligned}$$

Skoro $u'(x) = e^{-x}$ dostajemy $(u')^{-1}(x) = -\ln x$ (ponieważ wtedy $(u')^{-1}(u(x)) = -\ln(e^{-x}) = x$) i nasz układ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} X^*(1) &= \ln \lambda - \ln \left(\frac{q_1}{(1 + R)p} \right), \\ X^*(2) &= \ln \lambda - \ln \left(\frac{q_2}{(1 + R)(1 - p)} \right), \\ W &= \frac{1}{1 + R} (q_1 X^*(1) + q_2 X^*(2)). \end{aligned}$$

Stosując oznaczenie $a_1 = -\ln\left(\frac{q_1}{(1+R)p}\right)$, $a_2 = -\ln\left(\frac{q_2}{(1+R)(1-p)}\right)$

$$X^*(1) = \ln \lambda + a_1,$$

$$X^*(2) = \ln \lambda + a_2,$$

$$W = \frac{1}{1+R} ((q_1 + q_2) \ln \lambda + q_1 a_1 + q_2 a_2) = \frac{1}{1+R} (\ln \lambda + q_1 a_1 + q_2 a_2)$$

Z trzeciego równania dostajemy

$$\ln \lambda = W(1+R) - q_1 a_1 - q_2 a_2$$

Ponieważ potrafimy wyliczyć zarówno a_1, a_2 jak i $\ln \lambda$ to wzory

$$X^*(1) = \ln \lambda + a_1,$$

$$X^*(2) = \ln \lambda + a_2,$$

dają nam optymalną wypłatę. Rozwiązaniem jest więc

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{S}^{-1} X^*.$$

7.3 Rozwiązanie w pliku [Zadanie-7-03.xls](#)

7.4 Rozwiązanie w pliku [Zadanie-7-04.xls](#)

7.5 Wiemy że

$$x_0 A(0) + x_1 S(0) = W.$$

Przyjmując oznaczenia $x = x_1$ mamy

$$x_0 = \frac{W - x_1 S(0)}{A(0)} = W - x S(0).$$

Oczekiwana użyteczność wynosi

$$\begin{aligned} f(x) &= E(V_x(1)) \\ &= pu(x_0 A(1) + x_1 S^U) + (1-p)u(x_0 A(1) + x_1 S^D) \\ &= p \ln(x_0 A(1) + x_1 S^U) + (1-p) \ln(x_0 A(1) + x_1 S^D) \\ &= p \ln((1+r)W + x S(0)(U-r)) + (1-p) \ln((1+r)W + x S(0)(D-r)) \end{aligned}$$

Szukamy maksimum f .

$$f'(x) = \frac{pS(0)(U-r)}{(1+r)W + xS(0)(U-r)} + \frac{(1-p)S(0)(D-r)}{(1+r)W + xS(0)(D-r)}.$$

Rozwiązujemy

$$f'(x) = 0$$

po elementarnych przekształceniach dostając

$$x = \frac{(1+r)W(r - (1-p)D - pU)}{S(0)(D-r)(U-r)}.$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(1+r)W(r - (1-p)D - pU)}{S(0)(D-r)(U-r)} \\ x_0 &= W - x_1S(0). \end{aligned}$$

7.6 Znajdujemy miarę martyngałową

$$\begin{aligned} q_1 &= p^* = \frac{r-D}{U-D}, \\ q_2 &= 1 - p^*. \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 7.16 wiemy że

$$\begin{aligned} X^*(1) &= (u')^{-1} \left(\frac{q_1}{\lambda(1+R)p} \right), \\ X^*(2) &= (u')^{-1} \left(\frac{q_2}{\lambda(1+R)(1-p)} \right), \\ W &= \frac{1}{1+R} (q_1X^*(1) + q_2X^*(2)). \end{aligned}$$

Skoro $u'(x) = \frac{1}{x}$ dostajemy $(u')^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ (ponieważ wtedy $(u')^{-1}(u(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$) i nasz układ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} X^*(1) &= \lambda \frac{(1+R)p}{q_1}, \\ X^*(2) &= \lambda \frac{(1+R)(1-p)}{q_2}, \\ W &= \frac{1}{1+R} (q_1X^*(1) + q_2X^*(2)). \end{aligned}$$

Stosując oznaczenie $a_1 = \frac{(1+R)p}{q_1}$, $a_2 = \frac{(1+R)(1-p)}{q_2}$

$$\begin{aligned} X^*(1) &= \lambda a_1, \\ X^*(2) &= \lambda a_2, \\ W &= \frac{1}{1+R} (q_1 \lambda a_1 + q_2 \lambda a_2) \end{aligned}$$

Z trzeciego równania dostajemy

$$\lambda = \frac{W(1+R)}{q_1 a_1 + q_2 a_2} = W,$$

czyli optymalna wypłata to

$$\begin{aligned} X^*(1) &= W \frac{(1+R)p}{q_1}, \\ X^*(2) &= W \frac{(1+R)(1-p)}{q_2}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest więc

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{S}^{-1} X^*.$$

[7.7 Rozwiązanie w pliku Zadanie-7-07.xls](#)

[7.8 Rozwiązanie w pliku Zadanie-7-08.xls](#)

[7.9](#) Chcemy dobrać optymalną strategię x_0, x_1 . Musimy zmaksymalizować

$$\begin{aligned} E(u(V_x(1))) &= \sum_{i=1}^5 p_i \ln(V_x(1, i)) \\ &= \sum_{i=1}^5 p_i \ln(x_0 S_0(1) + x_1 S_1(1, i)) \end{aligned}$$

przy ograniczeniu

$$\begin{aligned} V_x(1, i) &= x_0 S_0(1) + x_1 S_1(1, i) \geq 0, \\ V_x(0) &= x_0 S_0(0) + x_1 S_1(0) = W. \end{aligned}$$

W rozwiązaniu [Zadanie-7-09.xls](#) wartość $E(u(V_x(1)))$ znajduje się w komórce G13, a warunki ograniczające $V_x(1, i) \geq 0$ są w F8:F12.

7.10 Po wyznaczeniu optymalnej strategii x^* znamy również optymalną wypłatę $V_{x^*}(1)$. Wiemy też że

$$u'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Miara martyngałowa jest wyznaczona wzorem

$$q_i = \frac{p_i u'(V_{x^*}(1, i))}{E(u'(V_{x^*}(1)))} = \frac{p_i \frac{1}{V_{x^*}(1, i)}}{\sum p_k \frac{1}{V_{x^*}(1, k)}}.$$

Rozwiązanie w pliku [Zadanie-7-10.xls](#).

7.11 Musimy sprawdzić czy

$$\frac{1}{1+R} \sum_{i=1}^5 q_i S_1(1, i) = S_1(0).$$

Ceny Arrowa-Debreu są zadane wzorem

$$\pi_i = \frac{q_i}{1+R}.$$

Rozwiązanie w pliku [Zadanie-7-11.xls](#).

7.12 Musi być spełniona własność

$$(1+R) S_k(0) = \sum_{i=1}^5 q_i S_k(1, i) \quad \text{dla } k = 1, \dots, 4,$$

co w notacji macierzowej oznacza że dla $\mathbf{S} = S_{ik} = (S_k(1, i))$ zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{q} &= (1+R) s_0, \\ \mathbf{q} &= (1+R) (\mathbf{S}^T)^{-1} s_0, \end{aligned}$$

dla

$$s_0 = \begin{pmatrix} S_0(0) \\ \vdots \\ S_4(0) \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie w pliku [Zadanie-7-12.xls](#)

7.13 Żeby znaleźć optymalną wypłatę, rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} X^*(i) &= (u')^{-1} \left(\frac{q_i}{\lambda(1+R)p_i} \right), \\ W &= \frac{1}{1+R} \sum q_i (u')^{-1} \left(\frac{q_i}{\lambda(1+R)p_i} \right). \end{aligned}$$

Skoro $u'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$, dostajemy funkcję odwrotną $(u')(x) = \frac{1}{x}$ (ponieważ $(u')^{-1} \circ (u')(x) = x$). Nasze równania są więc równoważne

$$\begin{aligned} X^*(i) &= \frac{\lambda(1+R)p_i}{q_i}, \\ W &= \frac{1}{1+R} \sum q_i \frac{\lambda(1+R)p_i}{q_i} = \lambda, \end{aligned}$$

czyli skoro znamy $\lambda = W$, p_i , R oraz mamy obliczone z rozwiązania zadania 7.12

$$\mathbf{q} = (1+R) (\mathbf{S}^T)^{-1} s_0$$

dostajemy wzór na X^* postaci

$$X^*(i) = \frac{\lambda(1+R)p_i}{q_i} = \frac{W p_i}{\left((\mathbf{S}^T)^{-1} s_0 \right)_i}.$$

Rozwiązanie numeryczne w pliku [Zadanie-7-13.xls](#)

7.14 Ponieważ $\mathbf{S}$ jest odwracalna, optymalna strategia $\mathbf{x}^*$ zadana jest wzorem

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{S}^{-1} X^*$$

Rozwiązanie numeryczne w pliku [Zadanie-7-14.xls](#)

7.15 Ceny Arrowa-Debreu liczymy ze wzoru

$$\pi_i = \frac{1}{1+R} q_i.$$

Optymalna użyteczność jest wyznaczona wzorem

$$E(u(X^*)) = \sum p_i u(X^*(i)) = \sum p_i \ln(X^*(i)).$$

Rozwiązanie numeryczne w pliku [Zadanie-7-15.xls](#)

