

Rozdział 5

Optymalizacja – przypadek ogólny

- 5.1. Rozważ dwa walory z parametrami $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.15$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$ oraz $\rho = -0.5$. Korzystając z notacji macierzowej oblicz oczekiwany zwrot i wariancję portfela $\mathbf{w} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.
- 5.2. Rozwiąż zadanie 5.1 przez skonstruowanie arkusza kalkulacyjnego w Excelu do obliczeń oczekiwanych zwrotów i wariancji dla dowolnego portfela o zadanym μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 oraz ρ .
- 5.3. Dla danych z zadania 5.1, używając notacji macierzowej, znajdź portfel o minimalnej wariancji, jego oczekiwany zwrot oraz odchylenie standardowe.
- 5.4. Rozwiąż zadanie 5.3 przez skonstruowanie arkusza kalkulacyjnego w Excelu do obliczeń portfela o minimalnej wariancji, jego oczekiwanego zwrotu i odchylenia standardowego, dla dowolnych μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 oraz ρ .
- 5.5. Używając danych z zadania 5.1 oblicz za pomocą notacji macierzowej wagi portfela rynkowego, jego oczekiwany zwrot oraz odchylenie standardowe dla przypadku gdy $r = 5\%$.
- 5.6. Rozwiąż zadanie 5.5 przez skonstruowanie arkusza kalkulacyjnego w Excelu do obliczeń portfela rynkowego, jego oczekiwanego zwrotu i odchylenia standardowego, dla dowolnych μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , ρ oraz r .

5.7. Rozwiń arkusz z rozwiązaniem zadania 5.6 dodając do niego wykres na płaszczyźnie (σ, μ) zawierający:

- (a) krzywą portfeli osiągalnych,
- (b) poszczególne walory,
- (c) walor wolny od ryzyka,
- (d) portfel rynkowy,
- (e) linie rynku kapitałowego (CML).

5.8. Jak znając macierz korelacji $\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ oraz wektor odchyłeń $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ obliczyć macierz kowariancji $C = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, gdzie $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$? W rozwiązaniu chodzi o podanie macierzowego wzoru, a nie o ręczne liczenie współczynników macierzy C jeden po drugim.

5.9. Zastosuj rozwiązanie zadania 5.8 do obliczenia macierzy C w excelu dla $n = 4$.

5.10. Jak znając macierz kowariancji $C = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ obliczyć (macierzowo) macierz korelacji $\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$?

5.11. Zastosuj rozwiązanie zadania 5.10 do obliczenia macierzy ρ w Excelu dla $n = 4$.

5.12. Inwestujemy zgodnie z wektorem wag $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{2}\right)$ gdzie waga w_1 to inwestycja w walor wolny od ryzyka. Oblicz oczekiwany zwrot z inwestycji zakładając że $\mu = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.15 \end{pmatrix}$ oraz że stopa wolna od ryzyka $r = 5\%$.

5.13. Niech $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{2}\right)$ będzie tak jak w zadaniu 5.12. Znajdź wariancję i odchylenie standardowe portfela zakładając że

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

5.14. Rozważmy macierz kowariancji stóp zwrotu

$$C = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.03 \end{pmatrix}.$$

Znajdź portfel o minimalnej wariancji.

- 5.15. Rozważ macierz kowariancji z zadania 5.14. Zakładając że portfel $\hat{\mathbf{w}} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ leży na krzywej o minimalnej wariancji znajdź portfel $\mathbf{w}$ leżący na krzywej o minimalnej wariancji dla którego $\sigma_{\mathbf{w}} = \frac{1}{10}$.
- 5.16. W Excelu, skonstruuj arkusz kalkulacyjny do wyznaczania portfela o minimalnej wariancji dla modelu o sześciu walorach. Jak dane wejściowe przyjmij wektor oczekiwanych zwrotów z walorów $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)$, macierz korelacji, oraz odchylenia standardowe zwrotów z walorów $\sigma_1, \dots, \sigma_6$. Oblicz oczekiwany zwrot i odchylenie standardowe portfela o minimalnej wariancji.
- 5.17. Uogólnij arkusz z zadania 5.16 do wyznaczania portfela rynkowego. Wyznacz jego oczekiwany zwrot i odchylenie standardowe zwrotu.
- 5.18. Za pomocą arkuszy z zadań 5.16 oraz 5.17 wykonaj wykres krzywej o minimalnej wariancji. Dodaj do wykresu portfel rynkowy, portfel o minimalnej wariancji oraz poszczególne walory.
- 5.19. Do wykresu z zadania 5.18 dodaj walor wolny od ryzyka oraz linię rynku kapitałowego.
- 5.20. Pokaż że dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$ zachodzi

$$\text{cov}(K_{\mathbf{w}}, K_{\mathbf{w}_{\min}}) = \sigma_{\mathbf{w}_{\min}}^2.$$

- 5.21. Zakładamy że mamy n walorów o stopach zwrotów $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$, i macierzy kowariancji zwrotów $C = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Niech $\mathbf{w}_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,n})$ oraz $\mathbf{w}_2 = (w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,n})$ będą dwoma portfelami. Niech $K_{\mathbf{w}_1} = \mathbf{w}_1^T \mathbf{K}$ oraz $K_{\mathbf{w}_2} = \mathbf{w}_2^T \mathbf{K}$ oznaczają zwroty z portfeli odpowiednio $\mathbf{w}_1$ oraz $\mathbf{w}_2$. Udowodnij że

$$\text{cov}(K_{\mathbf{w}_1}, K_{\mathbf{w}_2}) = \mathbf{w}_1^T C \mathbf{w}_2.$$