Spis treści

Rozdział 1. Rynek finansowy . . . 1
- 1.1. Struktura rynku finansowego . . . 1
- 1.2. Uczestnicy rynku . . . 3
- 1.3. Rynek pieniężny . . . 6
- 1.4. Rynek kapitałowy . . . 7

Rozdział 2. Papiery wartościowe o stałym dochodzie . . . 11
- 2.1. Wycena ciągu płatności (wartość obligacji) . . . 11
- 2.2. Wycena obligacji . . . 16
- 2.3. Kwotowania obligacji na rynku . . . 17
- 2.4. Inne miary stopy zwrotu . . . 19
- 2.5. YTM portfela obligacji . . . 20
- 2.6. Zależność cena–stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji . . . 20
- 2.7. Zadania . . . 24

Rozdział 3. Struktura terminowa stóp procentowych . . . 27
- 3.1. Stopa spot i stopa forward . . . 27
- 3.2. Określanie krzywej 0-kuponowej . . . 30
- 3.3. Teorie struktury terminowej stopy procentowej . . . 33
- 3.4. Zadania . . . 36

Rozdział 4. Ryzyko stopy procentowej . . . 37
- 4.1. Ryzyko inwestowania w obligacje . . . 37
- 4.2. Duration obligacji . . . 41
  - 4.2.1. Duration obligacji w modelu kapitalizacji ciągłej . . . 41
  - 4.2.2. Duration obligacji w modelu kapitalizacji dyskretnej . . . 44
- 4.3. Immunizacja portfela obligacji . . . 47
- 4.4. Wypukłość obligacji . . . 50
- 4.5. Duration Fishera-Weila . . . 54
  - 4.5.1. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji ciągłej . . . 54
  - 4.5.2. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji dyskretnej . . . 55
- 4.6. Immunizacja portfela obligacji ze względu na równoległe przesunięcie krzywej dochodowości . . . 56
- 4.7. Zadania . . . 58

Rozdział 5. Analiza średnio–wariancyjna . . . 61
- 5.1. Podstawowe własności zmiennej losowej . . . 62
- 5.2. Portfel akcji . . . 63
- 5.3. Zbiór dopuszczalny . . . 67
- 5.4. Problem Markowitza . . . 68
- 5.5. Twierdzenie o rozdzielaniu . . . 72
- 5.6. Problem Markowitza z aktywem wolnym od ryzyka . . . 74

5.7. Zadania . . . 77
5.8. Załącznik. Rozwiązanie problemu Markowitza . . . 80

Rozdział 6. Model wyceny aktywów kapitałowych . . . 83
6.1. Linia rynku kapitałowego . . . 83
6.2. Model wyceny aktywów kapitałowych . . . 85
6.3. Linia rynku papieru wartościowego . . . 87
6.4. Implikacje inwestycyjne . . . 89
6.5. Efektywność rynku . . . 92
6.6. Ocena zarządzania portfelem akcji . . . 93
6.7. Zadania . . . 97

Rozdział 7. Modele i ich kalibracja . . . 99
7.1. Modele czynnikowe . . . 99
7.2. Model 1-czynnikowy . . . 99
7.3. Model wieloczynnikowy . . . 101
7.4. Model CAPM jako model czynnikowy . . . 102
7.5. Arbitrażowy model wyceny . . . 103

Bibliografia . . . 107

Skorowidz . . . 109

Rozdział 5

Analiza średnio–wariancyjna

Do tej pory zajmowaliśmy się papierami wartościowymi, które generowały deterministyczny przepływ gotówkowy. Teraz zajmiemy się instrumentami, które będą generowały losowy (stochastyczny) przepływ, czyli akcjami spółek (ryzykownych papierów wartościowych, ryzykownych walorów, assetów) notowanych na giełdach papierów wartościowych. Czyli będziemy znali kwotę, którą inwestujemy na początku, natomiast nie będziemy znali końcowej wartości naszej inwestycji.

Jeśli chcielibyśmy określić dochodowość naszej inwestycji w rozważaną akcję w pewnym horyzoncie czasowym (np. dzień, tydzień, miesiąc, rok), to stopa zwrotu r z takiej inwestycji, zdefiniowana następująco

$$\text{stopa zwrotu} = \frac{\text{wartość inwestycji na końcu okresu – wartość na początku}}{\text{wartość inwestycji na początku okresu}}$$

jest zmienną losową.

Dla dowolnej zmiennej losowej możemy policzyć wartość oczekiwaną (czyli moment pierwszego rzędu) i wariancję (moment drugiego rzędu). W naszym wypadku, dla losowej stopy zwrotu r, możemy określić:

1. oczekiwaną stopę zwrotu (inaczej: wartość oczekiwana stopy zwrotu lub wartość średnia stopy zwrotu): $E(r)$
   (będziemy oznaczać czasem: $E(r) = \overline{r}$)
2. wariancję stopy zwrotu:

   $$var(r) = \sigma_r^2 = E((r - \overline{r})^2)$$

   lub odchylenie standardowe stopy zwrotu jako pierwiastek kwadratowy z wariancji

   $$\sigma_r = \sqrt{var(r)}$$

   Ta miara odpowiada za ryzyko inwestowania w instrument o losowej stopie zwrotu.

W związku z tym, że będziemy się zajmować instrumentami o losowej stopie zwrotu przytoczymy tu pewne własności zmiennej losowej.

5.1. Podstawowe własności zmiennej losowej

Dla pełności wykładu, przypomnijmy pewne własności wartości oczekiwanej i wariancji:
— jeśli X jest deterministyczne, to $E(X) = X$,
— operator wartości oczekiwanej jest liniowy, czyli jeśli X, Y są rzeczywistymi zmiennymi losowymi, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to wtedy

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) \tag{5.1}$$

— operator wartości oczekiwanej zachowuje znak, czyli jeśli zmienna losowa $X \geqslant 0$, to $E(X) \geqslant 0$
— wariancję zmiennej losowej X można wyrazić następująco

$$\begin{aligned} var(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Załóżmy teraz, że mamy dwie zmienne losowe X oraz Y. Możemy wtedy zdefiniować zależność pomiędzy nimi poprzez ich kowariancję

$$cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \tag{5.3}$$

Zauważmy, że wariancja zmiennej losowej jest kowariancją tej zmiennej z samą sobą

$$\sigma_X^2 = \sigma_{XX} \tag{5.4}$$

Przypomnijmy sobie teraz własności warinacji i kowariancji:
— jeśli mamy dwie zmienne losowe X oraz Y to

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \tag{5.5}$$

— wariancja sumy dwóch zmiennych losowych X, Y wyraża się następująco

$$\begin{aligned} var(X+Y) &= E[(X - \overline{X} + Y - \overline{Y})^2] \\ &= E[(X - \overline{X})^2] + 2E[(X - \overline{X}) \cdot (Y - \overline{Y})] + E[(Y - \overline{Y})^2] \\ &= \sigma_X^2 + 2\sigma_{XY} + \sigma_Y^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wprowadźmy teraz definicję bardzo często stosowaną na rynku akcji.

Definicja 5.1 *Mamy dwie zmienne losowe X oraz Y.*
1) jeśli $\sigma_{XY} = 0$, to zmienne X, Y nazywamy nieskorelowanymi,
2) jeśli $\sigma_{XY} > 0$, to zmienne X, Y są dodatnio skorelowane,
3) jeśli $\sigma_{XY} < 0$, to zmienne X, Y są ujemnie skorelowane.

Zauważmy, że gdy zmienne losowe X, Y są nieskorelowane, to wtedy z zależności (5.6) otrzymujemy

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \tag{5.7}$$

Z definicji kowariancji dwóch zmiennych losowych X oraz Y dostajemy bardzo ważne szacowanie:

$$|\sigma_{XY}| \leqslant \sigma_X \sigma_Y \tag{5.8}$$

Zauważmy, że gdy $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$ to wtedy mamy idealną dodatnią korelację dwóch zmiennych losowych. Gdy $\sigma_{XY} = -\sigma_X \sigma_Y$ to mamy idealną ujemną korelację.

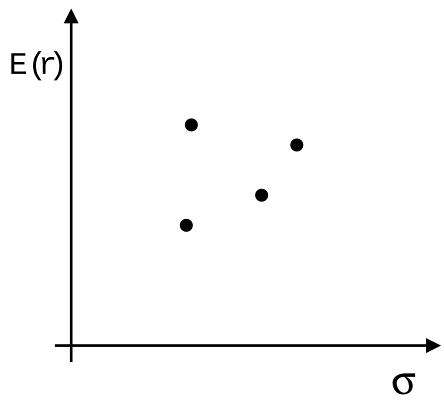
Jeśli mamy dwie zmienne losowe X oraz Y to możemy zdefinować współczynnik korelacji tych zmiennych następująco

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{5.9}$$

Z wcześniejszej zależności (5.8) o ograniczeniach na wariancję zmiennych X oraz Y widać, że $|\rho_{XY}| \leqslant 1$.

5.2. Portfel akcji

Załóżmy, że posiadamy portfel n akcji, przy czym każda akcja ma losową stopę zwrotu $r_1, r_2 \ldots, r_n$. Zatem każdej akcji możemy przypisać oczekiwaną stopę zwrotu $E(r_1) = \overline{r}_1, E(r_2) = \overline{r}_2, \ldots, E(r_n) = \overline{r}_n$ oraz wariancję stopy zwrotu $var(r_1) = \sigma^2_{r_1}, var(r_2) = \sigma^2_{r_2}, \ldots, var(r_n) = \sigma^2_{r_n}$. Jeśli mamy wariancję stopy zwrotu i-tej spółki to również mamy odchylenie standardowe stopy zwrotu i-tej społki $\sigma_{r_i} = \sqrt{var(r_i)}$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Każda ze spółek w portfelu może być reprezentowana przez punkt na płaszczyźnie ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu na rys. 5.1.



Rysunek 5.1. Płaszczyzna ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu.

Załóżmy, że każda ze spółek w portfelu ma wagę w_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy stopa zwrotu portfela

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n \tag{5.10}$$

jest zmienną losową, jako suma zmiennych losowych. Możemy zatem policzyć oczekiwaną stopę zwrotu portfela, wykorzystując liniowość operatora wartości oczekiwanej

$$E(r) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \cdots + w_n E(r_n) \tag{5.11}$$

Wariancja stopy zwrotu portfela wymaga znacznie więcej wysiłku, polegającego na przekształceniach

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(r-\overline{r})^2] \\
&= E\left[\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i\Big)^2\right] \\
&= E\left[\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \overline{r}_i)\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \overline{r}_j)\Big)\right] \\
&= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \overline{r}_i) \cdot (r_j - \overline{r}_j)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Powyższe wyrażenia znacznie lepiej wyglądają w zapisie macierzowym. Niech

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T \tag{5.13}$$

oznacza wektor wag spółek, które są w portfelu,

$$R = (E(r_1), E(r_2), \ldots, E(r_n))^T \tag{5.14}$$

wektor wartości oczekiwanej stopy zwrotu każdej spółki portfela,

$$V = \begin{pmatrix} cov(r_1, r_1) & \cdots & cov(r_1, r_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(r_n, r_1) & \cdots & cov(r_n, r_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

macierz kowariancji stóp zwrotu spółek portfela. Przypominamy, że $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, a symbol ^{T} oznacza transpozycję macierzy (wektora).
Wtedy oczekiwana stopa zwrotu portfela

$$E(r) = R^T \cdot w \tag{5.16}$$

natomiast wariancja stopy zwrotu portfela

$$\sigma^2 = w^T \cdot V \cdot w \tag{5.17}$$

Przykład 5.1 Załóżmy, że mamy portfel składający się z dwóch spółek, przy czym pierwsza spółka ma oczekiwaną stopę zwrotu $E(r_1) = 12\%$ i odchylenie standardowe stopy zwrotu $\sigma_1 = 20\%$, a druga odpowiednio $E(r_2) = 15\%$, $\sigma_2 = 18\%$. Kowariancja stóp zwrotu tych spółek wynosi $\sigma_{12} = 0{,}01$. Akcje mają następujące wagi w portfelu: $w_1 = 0{,}25$, $w_2 = 0{,}75$. Zatem oczekiwana stopa zwrotu portfela wynosi

$$E(r) = 0{,}25 \cdot 0{,}12 + 075 \cdot 0{,}15 = 0{,}1425 = 14{,}25\%$$

a wariancja stopy zwrotu portfela

$$\sigma^2 = 0{,}25^2 \cdot 0{,}20^2 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}01 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}75^2 \cdot 0{,}18^2 = 0{,}0245$$

Stąd odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela wynosi

$$\sigma = 0{,}1564 = 15{,}64\%.$$

□

Portfele składające się tylko z kilku spółek mogą posiadać duże ryzyko wyrażone dużą wartością wariancji stopy zwrotu portfela[1]. Ryzyko portfela może być zredukowane poprzez dywersyfikację, czyli odpowiednie zwiększenie liczby akcji w portfelu.

Zobaczmy w jaki sposób zwiększenie liczby akcji w portfelu wpływa na ryzyko tego portfela. Z zależności (5.15) wynika, że w macierzy kowarinacji stóp zwrotu mamy n wariancji stóp zwrotu spółek będących w portfelu oraz $n\cdot(n-1)$ kowariancji stóp zwrotu. Załóżmy, że wagi aktywów będących w portfelu są równe, czyli $w_i = w_j = 1ń$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Wtedy wariancja stopy zwrotu portfela

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ii} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sigma_{ij} \tag{5.18}$$

Oznaczmy największą wariancję w pierwszej sumie przez L, czyli

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sigma_{ii} = L$$

Wtedy mamy szacowanie

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ii} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} L = \frac{L \cdot n}{n^2} = \frac{L}{n} \longrightarrow 0$$

gdy z liczbą akcji n w portfelu dążymy do nieskończoności. Zatem część wariancji stopy zwrotu portfela akcji, wnoszona przez wariancje stóp zwrotu poszczególnych spółek, znika jeśli mamy odpowiednio dużo spółek w portfelu.

Oszacujmy teraz drugą sumę w wyrażeniu (5.18) na wariancję stopy zwrotu portfela. Oznaczmy przez $\overline{\sigma}_{ij}$ średnią kowariancję stóp zwrotu. Wtedy

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2}(n^2 - n)\overline{\sigma}_{ij} = \frac{n^2}{n^2}\overline{\sigma}_{ij} - \frac{n}{n^2}\overline{\sigma}_{ij} \longrightarrow \overline{\sigma}_{ij}$$

[1] Stare giełdowe przysłowie mówi: *don't put all your eggs in one basket*, czyli nie stawiaj wszystkiego na jedną kartę – nie inwestuj wszystkich swoich aktywów w jedną spółkę.

Zatem część wariancji stopy zwrotu portfela związana z kowariancjami stóp zwrotu spółek (leżącymi poza przekątną macierzy wariancji) nie znika nawet przy zwiększaniu liczby spółek w portfelu w nieskończoność. Ta część macierzy kowariancji stóp zwrotu stanowi o ryzyku portfela.

Czyli podsumowując: ryzyko portfela akcji mierzone wariancją stóp zwrotu szybko zbiega do granicy, która jest w przybliżeniu równa średniej kowariancji wszystkich ryzykownych aktywów w portfelu. Tą granicę nazywamy ryzykiem rynkowym (systematycznym). Czyli dobrze zdywersyfikowany portfel ma tylko ryzyko rynkowe, natomiast nie posiada ryzyka niesystematycznego, wnoszonego przez poszczególne spółki. Ta obserwacja jest też poparta wynikiem empirycznym podanym przez E. Fama.

Zobaczmy jak wygląda efekt dywersyfikacji portfela na przykładzie.

Przykład 5.2 Przypuśćmy, że w portfelu mamy n spółek, każda o oczekiwanej stopie zwrotu $\overline{r}$ i o wariancji stopy zwrotu σ. Kowariancja stopy zwrotu każdej pary spółek w portfelu wynosi $cov(r_i, r_j) = 0{,}4\sigma^2$ dla $i \neq j$. Wagi spółek w portfelu są równe i wynoszą 1ń. W tym przypadku, ryzyko portfela mierzone wariancją stopy zwrotu wynosi

$$\begin{aligned}
var(r) &= E\Big[(r-\overline{r})^2\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(r_i-\overline{r})\Big]^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{n^2}\Big[\sum_{i=j}^{n}\sigma_{ij}+\sum_{i\neq j}^{n}\sigma_{ij}\Big] \\
&= \frac{1}{n^2}[n\sigma^2+0{,}4(n^2-n)\sigma^2] \\
&= \frac{\sigma^2}{n}+0{,}4\sigma^2(1-\frac{1}{n}) \\
&= \frac{0{,}6\sigma^2}{n}+0{,}4\sigma^2
\end{aligned}$$

W rozważanym przypadku, niemożliwym jest zredukowanie warinacji stopy zwrotu portfela poniżej wartości $0{,}4\sigma^2$ bez względu na to jak duże będzie n, czyli bez względu na to ile będziemy mieć spółek w portfelu. □

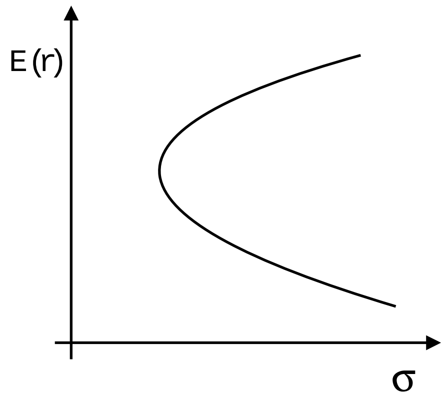
Na podstawie tego przykładu możemy dojść do następujących wniosków. Jeśli stopy zwrotu są nieskorelowane (mamy małą wartość $cov(r_i, r_j)$), to dywersyfikacja prowadzi do małego ryzyka portfela. Natomiast, gdy stopy zwrotu są dodatnio skorelowane, to znacznie trudniej jest ograniczyć ryzyko portfela.

Szczególnym przypadkiem jest portfel składający się tylko z dwóch spółek $n = 2$. W tym przypadku widać wyraźnie w jaki sposób współczynnik korelacji wpływa na ryzyko portfela. Ten wpływ współczynnika korelacji na ryzyko portfela można prześledzić w arkuszu.

5.3. Zbiór dopuszczalny

Przypuśćmy, że mamy n spółek w portfelu. Możemy je narysować jako punkty na diagramie ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu. Następnie tworzymy dowolne kombinacje portfeli z tych n spółek, zmieniając wagi, aby tylko był zachowany warunek $\sum_{i=1}^{n} w_1 = 1$. Zbiór wszystkich możliwych portfeli nazywamy **zbiorem dopuszczalnym** (*feasible set*).
Zbiór dopuszczalny ma dwie ważne własności.

1. Jeśli w portfelu mamy przynajmniej 3 spółki nieskorelowane idealnie i o różnych wartościach średnich, to zbiór dopuszczalny będzie dwuwymiarowym obszarem, którego wnętrze będzie wypełnione portfelami.
2. Zbiór dopuszczalny jest wypukły z lewej strony.
   To oznacza, że dla dwóch dowolnych punktów zbioru dopuszczalnego, odcinek łączący je, nie przecina lewego brzegu zbioru dopuszczalnego.



Rysunek 5.2. Zbiór dopuszczalny.

Lewy brzeg zbioru dopuszczalnego nazywamy **zbiorem minimalnowariancyjnym** (*minimum-variance set*) i będziemy oznaczać MV. Widzimy, że dla ustalonej oczekiwanej stopy zwrotu punkt leżący na zbiorze minimalnowariancyjnym ma najmniejszą wariancję. Zbiór minimalnowariancyjny ma charakterystyczny kształt pocisku, zwanego pociskiem Markowitza, jak pokazano na rys. 5.2. Spośród wszystkich punktów minimalnowarincyjnych, jeden z nich ma szczególne znaczenie, mianowicie ten, który ma najmniejszą wariancję. Nazywamy go **punktem minimalnowariancyjnym** (*minimum-variance point*) (czasem też jest nazywany globalnym portfelem minimalnowariancyjnym) i będziemy oznaczać MVP.

Przypuśćmy, że wybór portfela przez inwestora jest ograniczony do punktów dopuszczalnych na danej prostej poziomej na płaszczyźnie ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu σ-$E(r)$. Wszystkie portfele na tej prostej mają tą samą oczekiwaną stopę zwrotu, ale różne odchylenia stóp zwrotu. Większość inwestorów będzie preferowała portfele o najmniejszym odchyleniu standarowym stóp zwrotu. O takich inwestorach mówimy, że mają **awersję do ryzyka** (*risk averse*). O inwestorach, którzy wybiorą inny portfel niż ten o minimalnym odchyleniu standardowym stopy zwrotu dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu mówimy, że **preferują ryzyko** (*risk preferring*).

Rozważmy teraz portfele, leżące na prostej pionowej, czyli portfele o danym ryzyku, mierzonym odchyleniem standardowym, a zmieniającej się oczekiwanej stopie zwrotu. Większość inwestorów wybierze na takiej prostej portfele odpowiadające najwyższej oczekiwanej stopie zwrotu.

Te argumenty powodują, że tylko częścią zbioru minimalnowariancyjnego będą zainteresowani inwestorzy, a mianowicie górną częścią (górną gałęzią) zbioru minimalnowariancyjnego, którą nazywamy **granicą efektywną** (*efficient frontier*). Dlatego nasze rozważania ograniczymy do tego zbioru. Poniższe rozważania pokażą nam jak wyznaczyć punkty granicy efektywnej.

5.4. Problem Markowitza

Możemy teraz formalnie zapisać problem, który doprowadzi nas do portfeli minimalnowariancyjnych. Przypuśćmy, że mamy n spółek w portfelu. Oczekiwane stopy zwrotu każdej ze spółek $\overline{r}_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz kowariancje stóp zwrotu σ_{ij}, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ są dane. Portfel jest określony przez podanie wagi w_i każdej ze spółek, przy czym $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Dopuszczamy krótką sprzedaż, co oznacza, że wagi w_i mogą być ujemne. Aby znaleźć portfel minimalnowariancyjny, ustalimy oczekiwaną stopę zwrotu portfela na pewnym, arbitralnie wybranym poziomie μ. Następnie znajdziemy dopuszczalny portfel o minimalnej wariancji, który będzie miał oczekiwaną stopę zwrotu μ.
Zatem problem Markowitza[2] możemy sformułować następująco:
zminimalizuj ryzyko portela

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{5.19}$$

przy założonej oczekiwanej stopie zwrotu portfela μ

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i = \mu \tag{5.20}$$

oraz ograniczeniach budżetowych

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{5.21}$$

Czynnik 1/2 w wyrażeniu na wariancję portfela ma znaczenie czysto techniczne. Rozwiązanie problemu minimalnowariancyjnego będzie miało przyjemniejszą postać. Problem Markowitza pokazuje relację pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją stopy zwrotu portfela akcji.

[2] W roku 1991 Szwedzka Akademia Nauk doceniła wkład Harrego Markowitza w rozwój teorii finansów i przyznała mu nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii.

Problem Markowitza możemy zapisać też w języku macierzowym:
zminimalizuj ryzyko portela

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} w^T V w \tag{5.22}$$

przy założonej oczekiwanej stopie zwrotu portfela μ

$$R^T w = \mu \tag{5.23}$$

i ograniczeniach budżetowych

$$\mathbb{1}^T w = 1 \tag{5.24}$$

gdzie:
$\mathbb{1}^T = (1, 1, \cdots, 1)$ oznacza wektor jedynek.
Zakładamy, że symetryczna macierz kowariancji V jest dodatnio określona, $x^T V x > 0$ dla dowolnego $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. To założenie implikuje odwacalność macierzy V, które wykorzystamy w wyprowadzeniu rozwiązania problemu Markowitza. Założenie o dodatniej określonności macierzy kowariancji V gwarantuje, że żaden papier wartościowy nie jest 'nadmiarowy', co oznacza, że stopa zwrotu danego papieru wartościowego nie jest kombinacją liniową stóp zwrotu pozostałych papierów.
Rozwiązanie problemu Markowitza podamy na przykładzie numerycznym dla n=3. Zainteresowanych wyprowadzeniem rozwiązania dla dowolnego n odsyłamy do załącznika 5.8 na końcu tego rozdziału.

Przykład 5.3 Pokażemy rozwiązanie problemu Markowitza dla portfela 3 spółek, które mają nieskorelowane stopy zwrotu. Załóżmy, że oczekiwane stopy zwrotu tych spółek wynoszą odpowiednio $E(r_1) = 1$, $E(r_2) = 2$, $E(r_3) = 3$. Natomiast wariancje stopy zwrotu spełniają warunek $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$.
Mamy zatem następującą macierz kowariancji V stóp zwrotu

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Musimy znaleźć portfel

$$w = (w_1, w_2, w_3)^T$$

tak, aby wagi spółek w_i w portfelu spełniały warunek

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

Oczekiwana stopa zwrotu portfela akcji wynosi

$$E(r_1)w_1 + E(r_2)w_2 + E(r_3)w_3 = 1w_1 + 2w_2 + 3w_3 \tag{5.26}$$

a wariancja stopy zwrotu portfela

$$V = (w_1, w_2, w_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \tag{5.27}$$

Przypuśćmy teraz, że oczekujemy, aby stopa zwrotu z portfela wynosiła μ, przy możliwie najmniejszym ryzyku mierzonym wariancją stopy zwrotu portfela. To prowadzi do następującego problemu:
zminimalizuj ryzyko portela

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \tag{5.28}$$

przy założonej oczekiwanej stopie zwrotu portfela μ

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \mu \tag{5.29}$$

i ograniczeniach budżetowych

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \tag{5.30}$$

Czyli mamy problem optymalizacji (minimaliacji funkcji) przy warunkach ograniczających. Problem ten możemy rozwiązać metodą mnożników Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a będzie miała postać

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + \lambda(1 - w_1 - w - 2 - w_3) + \gamma(\mu - w_1 - 2w_2 - 3w_3) \tag{5.31}$$

Warunek konieczny na istnienie ekstremum funkcji Lagrange'a (zerowanie się pochodnych funkcji Lagrange'a względem wag portfela w_1, w_2, w_3) prowadzi do układu równań

$$\begin{aligned} w_1 - \lambda - \gamma &= 0 \\ w_2 - \lambda - 2\gamma &= 0 \\ w_3 - \lambda - 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Wyznaczamy z pierwszego równania w_1, drugiego w_2, trzeciego w_3

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda + \gamma\mu \\ w_2 &= \lambda + 2\gamma \\ w_3 &= \lambda + 3\gamma\mu \end{aligned}$$

i podstawiamy te wielkości do równań na warunki ograniczające

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 6\gamma + 3\lambda = && 1 \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 &= 14\gamma + 6\lambda = && \mu \end{aligned}$$

Mamy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych. Rozwiązanie tego układu równań wynosi

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\mu - 2}{2} \\ \lambda &= 2\frac{1}{3} - \mu \end{aligned}$$

i pozwala wyznaczyć wagi spółek w portfelu minimalnowariancyjnym (dla zadanej stopy zwrotu μ tego portfela)

$$\begin{aligned} w_1^* = &\quad \lambda + \gamma &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\mu \\ w_2^* = &\quad \lambda + 2\gamma &= \frac{1}{3} \\ w_3^* = &\quad \lambda + 3\gamma &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mu \end{aligned}$$

Zobaczmy jak wyglądają wagi spółek w portfelu dla wybranych wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela μ. Gdy $\mu = 1$, to wtedy

$$\begin{aligned} w_1^* = &\quad \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2}1 &= \frac{5}{6} \\ w_2^* = && = \frac{1}{3} \\ w_3^* = &\quad = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}1 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Gdy $\mu = 3$, to wtedy

$$\begin{aligned} w_1^* = &\quad \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2}3 &= -\frac{1}{6} \\ w_2^* = && = \frac{1}{3} \\ w_3^* = &\quad = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Zauważmy, że w obu przypadkach musimy dokonać krótkiej sprzedaży spółki z naszego portfela.

Policzmy ryzyko portfela minimalnowariancyjnego

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= w^{*T} V w^* \\ &= (w_1^*, w_2^*, w_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ w_3^* \end{pmatrix} \\ &= w_1^{*2} + w_2^{*2} + w_3^{*2} \\ &= \frac{1}{2}\mu^2 - 2\mu + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Zatem odchylenie standardowe portfela minimalnowariancyjnego dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu μ wynosi

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\mu^2 - 2\mu + \frac{7}{3}}$$

Możemy teraz wyznaczyć punkt minimalnowariancyjny

$$\frac{d\sigma^2}{d\mu} = \mu - 2$$

Zatem dla $\mu_g = 2$ mamy punkt minimalnowariancyjny. Odchylenie standardowe punktu minimalnowariancyjnego wynosi $\sigma_g = \sqrt{3}/3$, a wagi takiego portfela wynoszą $w_g = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. □

Powyżej zakładaliśmy, że dopuszczamy krótką sprzedaż, czyli nie nakładaliśmy żadnych ograniczeń na znak wagi w_i, $i = 1, 2, , \ldots, n$ poszczególnych spółek w portfelu. Gdy szukamy portfela minimalnowariancyjnego bez krótkiej sprzedaży to musimy nałożyć dodatkowe więzy na problem. Sformułowanie problemu Markowitza bez krótkiej sprzedaży będzie miało postać: zminimalizuj ryzyko portfela

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{5.32}$$

przy założonej oczekiwanej stopie zwrotu portfela μ

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \mu \tag{5.33}$$

ograniczeniach budżetowych

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{5.34}$$

oraz ograniczeniach na wagi spółek portfela

$$w_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{5.35}$$

Problem Markowitza bez krótkiej sprzedaży nie można rozwiązać jako układu równań liniowych, ponieważ ograniczeniami wag spółek są nierówności. Do rozwiązania takiego problemu stosuje się programowanie kwadratowe. Analityczne rozwiązania problemu nie są łatwe, szczególnie gdy w portfelu jest więcej spółek. Na szczęście istnieje wiele pakietów specjalistycznych, które umożliwiają rozwiązanie problemu numerycznie.

Zasadnicza różnica pomiędzy możliwością krótkiej sprzedaży i jej brakiem występuje przy rozwiązaniu problemu Markowitza. W przypadku możliwości krótkiej sprzedaży wszystkie (lub prawie wszystkie) aktywa portfela mają wagę niezerową (ujemną bądź dodatnią). W przeciwieństwie do sytuacji, gdy nie mamy możliwości krótkiej sprzedaży, tylko niektóre wagi są niezerowe, natomiast pozostałe nie wpływają na skład portfela.

5.5. Twierdzenie o rozdzielaniu

Powyżej rozwiązaliśmy problem Markowitza i znaleźliśmy wagi portfela minialnowariancyjnego. Więcej, pokazaliśmy jak wyznaczać cały zbiór minimalnowariancyjny. Zbiór minimalnowariancyjny ma jednak pewną bardzo ważną własność, która zdecydowanie upraszcza obliczenia.

Pokazaliśmy, że wagi portfela minimalnowariancyjnego można wyrazić następująco (szczegóły w załączniku 5.8)

$$w^* = \lambda V^{-1}1\!\!1 + \gamma V^{-1}R \tag{5.36}$$

Z tej zależności widać, że portfel minimalnowariancyjny jest kombinacją liniową tylko dwóch (!!) portfeli, bo:

⇒ pierwszy składnik wyrażenia odpowiada za globalny portfel minimalnowariancyjny (pamiętamy, że dla globalnego portfela minimalnowariancyjnego mieliśmy $\lambda = 1/A$, $\gamma = 0$)

⇒ jeśli drugi składnik wyrażenia (5.36) wybierzemy następująco: niech $B \neq 0$, definiujemy drugi portfel minimalnowariancyjny, którego wagi dane są

$$w_d = V^{-1}R/B \tag{5.37}$$

To dowolny portfel minimalnowariancyjny w^* jest kombinacją liniową globalnego portfela minimalnowariancyjnego w_g oraz wybranego przez nas szczególnego portfela minimalnowariancyjnego w_d

$$w^* = (\lambda A)w_g + (\gamma B)w_d \tag{5.38}$$

bo widzimy, że zachodzi relacja pomiędzy wagami tego porfela

$$\lambda A + \gamma B = 1 \tag{5.39}$$

To był szczególny przypadek, bo drugi portfel był wybrany w pewine specyficzny sposób .

Rozważmy ogólną sytuację. Weźmy dwa dowolne portfele minimalnowariancyjne w_a oraz w_b. Z powyższej konstrukcji można je zapisać następująco

$$w_a = (1-a)w_g + aw_d, \qquad w_b = (1-b)w_g + bw_d$$

gdzie a, b to dowolne liczby rzeczywiste. Wyznaczając stąd w_g oraz w_d otrzymujemy

$$w_g = \frac{w_a b - w_b a}{b-a}, \quad w_d = \frac{w_b - w_a + bw_a - aw_b}{b-a}$$

Możemy teraz podstawić te zależności do wyrażenia (5.38), czyli uniezależniamy się od szczególnych portfeli w_g oraz w_d, a wyrażamy dowolny portfel minimalnowariancyjny jako kombinację liniową dwóch innych portfeli minimalnowariancyjnych w_a oraz w_b

$$w^* = \frac{\lambda A + b - 1}{b-a} w_a + \frac{1 - a - \lambda A}{b-a} w_b \tag{5.40}$$

Suma wag tego portfela dwuskładnikowego

$$\frac{\lambda A + b - 1}{b-a} + \frac{1 - a - \lambda A}{b-a} = 1$$

Nasze rozważania zestawmy w twierdzeniu o rozdzielaniu (*seperation theorem*) lub twierdzeniu o dwóch funduszach (*two-fund theorem*)

Twierdzenie 5.1 (o rozdzielaniu) *Portfel minimalnowariancyjny (w szczególności portfel efektywny) może być utworzony przez kombinację liniową dowolnych dwóch różnych portfeli minimalnowariancyjnych. Innymi słowy, dla inwestorów poszukujących portfela (funduszu) efektywnego wystarczy, że inwestują w kombinację liniową dwóch różnych portfeli (funduszy) efektywnych.*

Twierdzenie to ma poważne konsekwencje. Zamiast inwestować bezpośrednio na rynku akcji inwestorzy mogą kupować (sprzedawać na krótko) jednostki udziałowe dwóch funduszy inwestycyjnych. Oczywiście zakładając, że fundusze te zarządzają portfelami minimalnowariancyjnymi.

Zastanówmy, się teraz nad innymi własnościami portfeli minimalnowariancyjnych.

Własności portfeli MV

1. Kowariancja portfela g z dowolnym innym portfelem p jest stała i równa wariancji globalnego portfela minimalnowariancyjnego, bo:

$$\begin{aligned} cov(r_g, r_p) &= w_g^T \cdot V \cdot w_p \\ &= \frac{(V^{-1} \cdot 1\!\!1)^T}{A} V \cdot w_p \\ &= \frac{1\!\!1^T \cdot (V^{-1})^T \cdot V \cdot w_p}{A} = \frac{1}{A} = \sigma_g^2 \end{aligned} \tag{5.41}$$

2. Dla dowolnego portfela minimalnowariancyjnego tak nie jest:
niech

$$w_a = (1-a)w_g + aw_d, \qquad w_b = (1-b)w_g + bw_d$$

wtedy

$$cov(r_a, r_b) = \frac{1}{A} + \frac{a \cdot b \cdot \Delta}{A \cdot B^2} \tag{5.42}$$

Aby wyprowadzić te zależności należy zobaczyć rozumowanie w Załączniku 5.8.

5.6. Problem Markowitza z aktywem wolnym od ryzyka

Do tej pory zakładaliśmy, że w naszym portfelu mamy tylko aktywa ryzykowne, to znaczy takie, dla których odchylenie standardowe stopy zwrotu każdego z nich było większe od 0. Wprowadźmy do naszego portfela instrument wolny od ryzyka, czyli taki, którego stopa zwrotu jest deterministyczna, czyli odchylenie standardowe stopy zwrotu takiego instrumentu jest równe 0, $\sigma = 0$. Takimi instrumentami są aktywa oparte o stopę procentową, czyli papiery dłużne (oczywiście nie uwzględniamy tutaj ryzyka niewypłacalności emitenta).

Włączenie instrumentu wolnego od ryzyka do portfela instrumentów ryzykownych oznacza, że inwestor może lokować bądź pożyczać po stopie wolnej od ryzyka. Inwestycję, czyli lokatę, w instrument wolny od ryzyka będziemy oznaczać ze znakiem plus, natomiast pożyczkę będziemy oznaczać ze znakiem minus.

Załóżmy, że instrument wolny od ryzyka ma następujące parametry:
– (deterministyczną) stopę zwrotu r_f,
– oczekiwaną stopę zwrotu $\overline{r}_f = r_f$,
– wariancję stopy zwrotu $\sigma_f = 0$.

Załóżmy, że mamy również instrument ryzykowny – portfel akcji (w szczególności w portfelu możemy mieć tylko jedną spółkę), który ma następujące parametry:
- stopę zwrotu r_p,
- oczekiwaną stopę zwrotu $\overline{r}_p$,
- wariancję stopy zwrotu σ_p.

Mamy zatem dwa aktywa – instrument wolny od ryzyka oraz instrument ryzykowny. Utworzymy z tych aktywów portfel, przy czym przez w oznaczymy wagę instrumentu ryzykownego w tym portfelu.

Obliczmy teraz stopę zwrotu tego dwuskładnikowego portfela

$$r = (1 - w) \cdot r_f + w \cdot r_p \tag{5.43}$$

oczekiwaną stopę zwrotu

$$\overline{r} = E[(1 - w) \cdot r_f + w \cdot r_p] = (1 - w) \cdot r_f + w \cdot \overline{r}_p \tag{5.44}$$

oraz ryzyko portfela

$$\sigma^2 = (1 - w)^2 \cdot \sigma_f^2 + w^2 \cdot \sigma_p^2 + 2w \cdot (1 - w) \cdot \sigma_p \cdot \sigma_f \cdot \rho_{fp} \tag{5.45}$$

gdzie ρ_{fp} jest współczynnikiem korelacji pomiędzy stopą zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka i instrumentu ryzykownego.

Z racji tej, że $\sigma_f = 0$, to dwa ostatnie składniki tej sumy są równe 0. Zatem odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela dwuskładnikowego

$$\sigma = w \cdot \sigma_p \tag{5.46}$$

stąd możemy wyznaczyć wagę instrumentu ryzykownego w tym portfelu

$$w = \frac{\sigma}{\sigma_p}$$

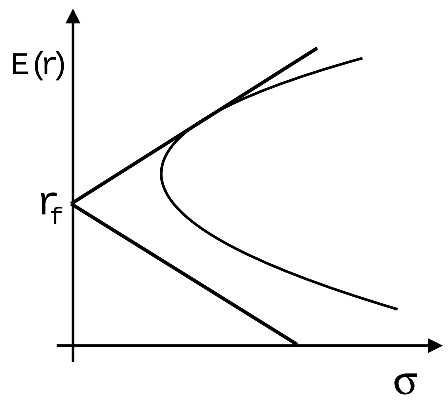
i podstawić do zależności (5.44)

$$\overline{r} = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_p})r_f + \frac{\sigma}{\sigma_p}\overline{r}_p = r_f + \frac{\overline{r}_p - r_f}{\sigma_p}\sigma \tag{5.47}$$

Otrzymaliśmy liniową zależność pomiędzy ryzykiem portfela dwuskładnikowego σ a oczekiwaną stopą zwrotu tego portfela $\overline{r}$. Oznacza to, że wprowadzenie instrumentu wolnego od ryzyka powoduje, że zmienia się zbiór dopuszczalny, zbiór minimalnowariancyjny a także granica efektywna.

Zobaczmy jak wyglądają teraz te zbiory. Najpierw skonstruujmy zbiór dopuszczalny określony przez n spółek (ryzykownych aktywów). Następnie dla każdego portfela dopuszczalnego stwórzmy portfel dwuskładnikowy, gdzie tym drugim składnikiem będzie instrument wolny od ryzyka. Otrzymamy pęk półprostych wychodzących z punktu $(0, r_f)$. Pęk półprostych wyznaczy nam nowy zbiór efektywny. Zbiorem minimalnowariancyjnym będą dwie graniczne półproste wychodzące z punktu $(0, r_f)$, a zbiorem efektywnym – górna półprosta (6.2). Wprowadzenie instrumentu wolnego od ryzyka dramatycznie powiększyło zbiór dopuszczalny.

Kiedy mamy możliwość lokowania i pożyczania po stopie wolnej od ryzyka, granica efektywna jest prostą wychodzącą z punktu $(0, r_f)$ i styczną do oryginalnej granicy efektywnej gdy nie było instrumentu wolnego od ryzyka.



Rysunek 5.3. Zbiór efektywny gdy dostępny jest instrument wolny od ryzyka na rynku.

Zatem dowolny portfel efektywny, dowolny punkt na granicy (prostej) efektywnej, jest kombinacją liniową instrumentu wolnego od ryzyka i portfela ryzykownego leżącego w punkcie styczności tej prostej F. Możemy otrzymać różne portfele (punkty) efektywne zmieniając wagę w instrumentu ryzykownego, a tym samym zmieniając wagę $1 - w$ instrumentu wolnego od ryzyka. O tym mówi twierdzenie o jednym funduszu (*one-fund theorem*).

Twierdzenie 5.2 (o jednym funduszu) *Istnieje dokładnie jeden portfel (fundusz) F, taki że dowolny portfel efektywny może być skonstruowany jako ważona kombinacja liniowa portfela stycznego F i instrumentu wolnego od ryzyka.*

Ten jedyny portfel F można wyznaczyć z zależności

$$w_F = \frac{V^{-1} \cdot (R - r_f \cdot \mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \cdot V^{-1}(R - \mathbb{1} \cdot r_f)} \tag{5.48}$$

Aby wyprowadzić zależność (5.48) należy skorzystać z załącznika 5.8.

5.7. Zadania

Zadanie 5.1. Akcje spółek A oraz B charakteryzują się nastęującymi parametrami:

Spółka	Oczekiwana stopa zwrotu	Odchylenie standardowe stopy zwrotu
A	20%	10%
B	10%	6%

Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu tych spółek $\rho_{AB} = -1$. Tworzymy portfel składający się z tych spółek, którego ryzyko mierzone odchyleniem standardowym wynosi 0. Wyznacz:
i) wagi takiego portfela;
ii) oczekiwaną stopę zwrotu takiego portfela.

Zadanie 5.2. Mamy 3 spółki A, B, C. Inwestycja w akcje tych spółek może przynieść następujące stopy zwrotu:

prawdopodobieństwo	A	B	C
0,25	16%	4%	20%
0,50	12%	6%	14%
0,25	8%	8%	8%

Oblicz:
i) oczekiwaną stopę zwrotu dla każdej ze spółek;
ii) odchylenie standardowe stopy zwrotu dla każdej ze spółek;
iii) kowariancję stóp zwrotu dla każdej pary spółek;
iv) współczynnik korelacji stóp zwrotu dla każdej pary spółek.

Zadanie 5.3. Oblicz oczekiwaną stopę zwrotu i odchylenie standardowe portfeli podanych w tabeli (charakterystyka spółek jak w zadaniu 5.2):

	wagi poszczególnych spółek w portfelu		
portfel	A	B	C
P1	0,5	0,5	0
P2	0,5	0	0,5
P3	0	0,5	0,5
P4	0,3333(3)	0,3333(3)	0,3333(3)
P5	0,5	0,25	0,25
P6	0,25	0,5	0,25
P7	0,25	0,25	0,5

Zaznacz te portfele na płaszczyźnie ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu.

Zadanie 5.4. Jakie powinny być wagi spółek A, B, C (charakterystyka spółek jak w zadaniu 5.2) w portfelu, aby uzyskać:

i) przy minimalnym ryzyku portfela:
  a) stopę zwrotu portfela 13% (bez krótkiej sprzedaży)
  b) stopę zwrotu portfela 9% (bez krótkiej sprzedaży)
  c) stopę zwrotu portfela 15% (z krótką sprzedażą)
  d) stopę zwrotu portfela 17% (z krótką sprzedażą)

ii) przy maksymalnej stopie zwrotu portfela:
  a) ryzyko portfela 3% (bez krótkiej sprzedaży)
  b) ryzyko portfela 4% (bez krótkiej sprzedaży)
  c) ryzyko portfela 2% (z krótką sprzedażą)
  d) ryzyko portfela 1% (z krótką sprzedażą).

Zadanie 5.5. Mając do zainwestowania 1 mln zł jak będzie wyglądała alokacja aktywów pomiędzy akcje spółek A, B, C z zadania 5.4 gdy ma być spełniony warunek: i)a), i)c), ii)b), ii)d) .

Zadanie 5.6. Dwa portfela I i II znajdują się w zbiorze minimalnego ryzyka wyznaczonego w oparciu o dane trzech spółek A, B, C. Wagi spółek w portfelach I i II podane są w tabeli (dopuszcza się krótką sprzedaż):

	w_a	w_b	w_c
portfel I	0,24	0,52	0,24
portfel II	-0,36	0,72	0,64

i) ile wynoszą wagi spółek A,B, C w portfelu będącym połączeniem portfeli I i II, jeżeli w portfel I zainwestowano 20 tys. zł, a w portfel II zainwestowano 20 tys. zł,

ii) zaznacz usytuowanie portfeli I i II oraz połączonego portfela powstałego w wyniku ich połączenia na wykresie o współrzędnych w_A i w_B.

iii) załóżmy, że z posiadanych 30 tys. zł, 15 tys. zł jest przeznaczone na zakup akcji spółki A. W jaki sposób powinny być ulokowane pozostałe aktywa pieniężne pomiędzy akcje spółki B i C, aby portfel był w zbiorze minimalnego ryzyka?

Zadanie 5.7. Mamy dwie akcje o następującej charakterystyce:

	oczekiwana stopa zwrotu	odchylenie standardowe
spółka A	0,10	0,05
spółka B	0,04	0,02

Narysuj wszystkie możliwe portfele składające się z akcji tych spółek na płaszczyźnie ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu. Załóż że współczynnik korelacji ρ_{AB} między akcjami wynosi: 1, 0, -1. Dla każdego z tych przypadków oblicz wagi spółek, aby otrzymać portfel minimalnowariancyjny i ile wynosi to minimum. Załóżmy, że nie ma krótkiej sprzedaży.

Zadanie 5.8. W zadaniu 5.7 załóżmy, że stopa wolna od ryzyka r_f wynosi 8%. Jak wygląda optymalny portfel?

Zadanie 5.9. Mamy dwie spółki o następującej charakterystyce:

	$E(r)$	σ^2
spółka A	0,14	0,36
spółka B	0,18	0,49

Współczynnik korelacji stóp zwrotu z akcji A i B wynosi 0,7. Stopa wolna od ryzyka wynosi 0,10. Kupujesz za 5 tys. zł akcje spółki A, a za 2,5 tys. zł akcje spółki B. Aby sfinansować swoją strategię pożyczasz 2,5 tys. zł. Oblicz:

i) wagi poszczególnych składników swojego portfela
ii) oczekiwaną stopę zwrotu swojego portfela (w % i w wartości bezwzględnej)
iii) wariancję portfela.

Zadanie 5.10. Spółka A ma duży potencjał wzrostowy - jej oczekiwana stopa zwrotu wynosi 24%. Oczekiwana stopa zwrotu spółki B wynosi tylko 5%. Posiadasz 10 tys. zł i tworzysz portfel: sprzedając krótko akcje spółki B w wysokości 40 tys. zł i kupując za posiadane środki (własne i z krótkiej sprzedaży) akcje spółki A. Zakładając, że nie ma depozytu zabezpieczającego przy krótkiej sprzedaży oblicz oczekiwaną stopę zwrotu swojego portfela.

Zadanie 5.11. Mamy 4 spółki o następującej charakterystyce:

	$E(r)$	σ^2
spółka A	0,05	0,20
spółka B	0,10	0,10
spółka C	0,20	0,15
spółka D	0,15	0,30

ρ_{AB}=-0,2; ρ_{AC}=0,3; ρ_{AD}=0,5; ρ_{BC}=0,2; ρ_{BD}=-0,5; ρ_{CD}=0,0.
Portfel składa się z:
akcji spółki A o wartości 20 tys. zł,
akcji spółki B o wartości 30 tys. zł,
akcji spółki C o wartości 20 tys. zł,
akcji spółki D o wartości 30 tys. zł.
Portfel jest finansowany środkami własnymi w wysokości 20 tys. zł i kredytem w wysokości 80 tys. zł, oprocentowanym wg stopy wolnej od ryzyka równej 5%.
Oblicz:

i) wagi poszczególnych spółek w portfelu,
ii) oczekiwaną stopę zwrotu portfela (w % i w wartości bezwzględnej)
iii) odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela.

5.8. Załącznik. Rozwiązanie problemu Markowitza

Rozwiązanie problemu Markowitza – metoda mnożników Lagrange'a
Problem Markowitza jest problemem szukania eksteremum przy nałożonych ograniczeniach. Najlepszą metodą rozwiązywania takich problemów jest metoda mnożników Lagrange'a.
Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}$ następująco

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda(1 - \mathbb{1}^T w) + \gamma(\mu - R^T w) \tag{5.49}$$

gdzie λ i γ są mnożnikami Lagrange'a. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji jednej zmiennej jest znikanie pierwszej pochodnej, czyli różniczkujmy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}$ względem wag w i przyrównajmy do 0

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = V w - \lambda \mathbb{1} - \gamma R = 0 \tag{5.50}$$

Zatem rozwiązanie problemu $w^\star$

$$w^* = \lambda V^{-1} \mathbb{1} + \gamma V^{-1} R \tag{5.51}$$

Rozwiązanie zależy od współczynników λ i γ, które mogą być wyznaczone z warunków ograniczających (5.24), (5.23)

$$1 = \mathbb{1}^T w^* = \lambda \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1} + \gamma \mathbb{1}^T V^{-1} R \tag{5.52}$$

$$\mu = R^T w^* = \lambda R^T V^{-1} \mathbb{1} + \gamma R^T V^{-1} R \tag{5.53}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$A = \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}$$
$$B = \mathbb{1}^T V^{-1} R$$
$$C = R^T V^{-1} R$$

Zauważmy, że A, B oraz C są liczbami rzeczywistymi. Zależności (5.52) oraz (5.53) możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda A + \gamma B \\ \mu &= \lambda B + \gamma C \end{aligned}$$

czyli mamy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych λ i γ, którego rozwiązanie można łatwo wyznaczyć

$$\lambda = \frac{C - \mu B}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{\mu A - B}{\Delta} \tag{5.54}$$

gdzie

$$\Delta = AC - B^2$$

Zauważmy, że $\Delta \neq 0$, co wynika z własności macierzy kowariancji V.

Zatem wariancja stopy zwrotu portfela minimalnowariancyjnego MV

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= w^{*T} V w^* \\ &= w^{*T} V(\lambda V^{-1} 1\!\!1 + \gamma V^{-1} R) \\ &= \lambda w^{*T} 1\!\!1 + \gamma w^{\star T} R \\ &= \lambda + \gamma\mu \\ &= \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \end{aligned} \tag{5.55}$$

jest parabolą ze względu na μ. Natomiast na płaszczyźnie $\sigma - E(r)$ to jest hiperbola.

Znajdziemy teraz punkt minimlnowariancyjny MVP różniczkując wariancję stopy zwrotu portfela względem zadanej oczekiwanej stopy zwrotu μ

$$0 = \frac{d\sigma^2}{d\mu} = \frac{2A\mu - 2B}{\Delta} \tag{5.56}$$

Stąd oczekiwana stopa zwrotu punktu minimalnowariancyjnego

$$\mu_g = \frac{B}{A} \tag{5.57}$$

i wariancja stopy zwrotu tego portfela

$$\sigma_g^2 = \frac{A\mu_g^2 - 2B\mu_g + C}{\Delta} = \frac{A\frac{B^2}{A^2} - 2B\frac{B}{A} + C}{\Delta} = \frac{-B^2 + AC}{A\Delta} = \frac{1}{A} \tag{5.58}$$

Porównując z wcześniej wyprowadzoną zależnością $\sigma^2 = \lambda + \gamma\mu$ uzyskujemy

$$\lambda = 1/A, \qquad \gamma = 0 \tag{5.59}$$

Zatem punkt minimalnowariancyjny MVP wyraża się zależnością

$$\begin{aligned} w_g &= \lambda V^{-1} 1\!\!1 + \gamma V^{-1} R \\ &= \frac{1}{A} V^{-1} 1\!\!1 \\ &= \frac{V^{-1} 1\!\!1}{1\!\!1^T V^{-1} 1\!\!1} \end{aligned} \tag{5.60}$$

Twierdzenie 5.3 *Portfel leży w zbiorze minimalnowariancyjnym wtedy i tylko wtedy gdy jego oczekiwana stopa zwrotu μ oraz wariancja stopy zwrotu σ^2 spełniają zależność*

$$\sigma^2 = \frac{A}{\Delta}(\mu - \mu_g)^2 + \sigma_g^2 \tag{5.61}$$

Granica efektywna zawiera te minimalnowariancyjne portfele, dla których oczekiwana stopa zwrotu wynosi conajmniej μ_g.

Pokazanie dowodu tego twierdzenia stanowi proste przeliczenie.

Rozdział 6

Model wyceny aktywów kapitałowych

6.1. Linia rynku kapitałowego

Załóżmy, że każdy inwestor działający na rynku zna teorię Markowitza i stosuje ją w praktyce. Przyjmijmy, poza tym, że
⇒ inwestorzy określają tak samo parametry aktywów,
⇒ istnieje stopa r_f, według której inwestorzy lokują bądź pożyczają instrumenty wolne od ryzyka,
⇒ na rynku nie ma kosztów transakcji.
Z twierdzenia o 1-funduszu wiemy, że każdy racjonalny inwestor będzie zajmował pozycję w ryzykownym funduszu oraz pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka. Ponieważ każdy używa tych samych wartości średnich, wariancji i kowariancji, zatem każdy wybierze ten sam ryzykowny fundusz. Zatem twierdzenie o jednym funduszu mówi, że będzie to jedyny ryzykowny fundusz F, w którym inwestor powinien zajmować pozycję. Co więcej, tym funduszem F będzie **portfel rynkowy**, czyli portfel będący sumą ważoną wszystkich spółek notowanych na giełdzie. Czyli portfel wszystkich spółek na rynku ważony kapitalizacją.

Ten portfel rynkowy, który jest portfelem optymalnym można znaleźć nie mając nawet danych giełdowych i nie obliczając ich nawet. Otóż, portfel rynkowy będzie wynikał z równowagi pomiędzy podażą a popytem na dane aktywa ryzykowne.

Stopa zwrotu na aktywach zależy od ceny po której otwiera się pozycję i ceny po której zamyka się pozycję. Inwestorzy rozwiązując problem Markowitza używają tych samych estymat parametrów i generują zlecenia kupna bądź sprzedaży aktywów, tak aby posiadać portfel optymalny wynikający z obliczeń. Jeśli zlecenia kupna/sprzedaży nie spotkają się z odpowiednią podażą/popytem to muszą spowodować zmianę cen aktywów. Duży popyt na aktywa spowoduje wzrost ceny, a duża podaż aktywów spowoduje spadek ceny. Zmiany cen spowodują z kolei zmianę parametrów modelu, a to z kolei doprowadzi do nowych obliczeń i poszukiwania nowego portfela optymalnego. Proces jest kontynuowany, aż do osiągnięcia poziomu równowagi.

Ciągłe dostosowywanie się cen aktywów prowadzi do efektywności rynku. Zatem wnioskiem z twierdzenia o jednym funduszu jest to, że istnieje dokładnie jeden portfel optymalny, zwany portfelem rynkowym. Będziemy go odtąd oznaczać M (*market*), czyli $M = F$.

W takiej sytuacji, gdy inwestujemy w portfel rynkowy M i instrument wolny od ryzyka, przy czym waga instrumentu ryzykownego wynosi w, mamy zależność

$$\sigma = w \cdot \sigma_M \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{\sigma}{\sigma_M} \tag{6.1}$$

Podstawiając do (5.44) uzyskujemy

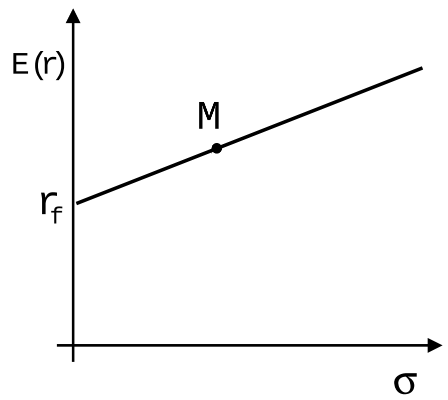
$$\overline{r} = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_M}) \cdot r_f + \frac{\sigma}{\sigma_M} \cdot \overline{r}_M \tag{6.2}$$

i porządkując, otrzymamy

$$\overline{r} = r_f + \frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma \tag{6.3}$$

gdzie:
r_f stopa wolna od ryzyka,
$\overline{r}_M$ to oczekiwana zwrotu rynku,
σ_M odchylenie standardowe stopy zwrotu z rynku,
$\overline{r}$ oczekiwana stopa zwrotu dowolnego efektywnego aktywa,
σ odchylenie standardowe stopy zwrotu tego aktywa.

Prosta, którą uzyskaliśmy to **linia rynku kapitałowego** (*capital market line*). Pokazuje ona relację pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu aktywa od ryzyka stopy zwrotu, mierzonego odchyleniem standardowym dla aktywów leżących na granicy efektywnej. Relacja ta mówi, że jeśli ryzyko rośnie to odpowiadająca mu oczekiwana stopa zwrotu też musi rosnąć.



Rysunek 6.1. Linia rynku kapitałowego.

Linię rynku kapitałowego możemy też próbować interpretować geometrycznie

$$\overline{r} = \underbrace{r_f}_{\text{cena czasu}} + \underbrace{\frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M}}_{\text{cena jednostki ryzyka}} \sigma \tag{6.4}$$

Czyli możemy powiedzieć, że rynkowa cena ryzyka to nadwyżka nad stopą wolną od ryzyka na jednostkę ryzyka rynkowego.

6.2. Model wyceny aktywów kapitałowych

Linia rynku kapitałowego pokazuje relację pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu portfela efektywnego a odchyleniem standardowym stopy zwrotu tego portfela. Jednak ta relacja nie pokazuje jak oczekiwana stopa zwrotu dowolnego aktywa (dowolnej akcji spółki notowanej na giełdzie) jest związana z ryzykiem tego aktywa. Czyli możemy zapytać jaka jest relacja pomiędzy tymi wielkościami dla pojedynczych akcji, które nie są efektywne z natury. Odpowiedź na to pytanie daje **Model Wyceny Aktywów Kapitałowych** (*Capital Asset Pricing Model* CAPM)

Możemy przyjąć, że inwestorzy będą nagrodzeni za ryzyko, którego nie da się zdywersyfikować, ale nie będą za ryzyko dywersyfikowalne. Ogólnie ryzyko na rynku możemy podzielić na ryzyko rynkowe i specyficzne. Czyli

$$\begin{aligned} \text{ryzyko} &= \text{rynkowe + specyficzne} \\ &= \text{skorelowane z rynkiem + nieskorelowane z rynkiem} \\ &= \text{niedywersyfikowalne + dywersyfikowalne} \\ &= \text{występujące w portfelach efektywnych} \\ &\qquad\quad + \text{nie występujące w portfelach efektywnych} \end{aligned}$$

Zobaczmy zatem jaka jest korelacja stopy zwrotu i-tej spółki ze stpou zwrotu rynku M

$$cov(r_i, r_M) = cov(r_i, \sum_{j=1}^{n} w_j^M r_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j^M \sigma_{ij} = \frac{\overline{r}_i - r_f}{\sum_{j=1}^{n}(\overline{r}_j - r_f)}$$

przy czym w_j^M jest wagą j-tej spółki w portfelu rynkowym M.
Ostatnia równość wynika z twierdzenia o jednym funduszu i ze wzoru na wagi w portfelu rynkowym (5.48).
Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} cov(r_M, r_M) &= cov(\sum_{i=1}^{n} w_i^M r_i, r_M) = \sum_{i=1}^{n} w_i^M cov(r_i, r_M) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^M \frac{\overline{r}_i - r_f}{\sum_{j=1}^{n}(\overline{r}_j - r_f)} = \frac{\overline{r}_M - r_f}{\sum_{j=1}^{n}(\overline{r}_j - r_f)} \end{aligned}$$

Gdy zestawimy te dwie zależności to otrzymamy

$$\frac{\overline{r}_i - r_f}{\overline{r}_M - r_f} = \frac{cov(r_i, r_M)}{var(r_M)}$$

i po pomnożeniu stronami przez $\overline{r}_M - r_f$ otrzymamy zależność określającą model CAPM

$$\overline{r}_i - r_f = \frac{cov(r_i, r_M)}{var(r_M)} \cdot (\overline{r}_M - r_f) = \beta_i \cdot (\overline{r}_M - r_f) \tag{6.5}$$

gdzie

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_M)}{var(r_M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

jest współczynnikiem β i-tej spółki. Współczynnik β mierzy kowariancję stopy zwrotu tego aktywa (tej spółki) ze stopą zwrotu rynku M. Aby określić ryzyko danego aktywa wystarczy podać jego współczynnik β. .

Różnica $\overline{r}_i - r_f$ jest nazywana oczekiwaną nadwyżką stopy zwrotu i-tego aktywa nad stopą wolną od ryzyka r_f. To jest wielkość, o jaką oczekuje się, że stopa zwrotu aktywa ryzykownego przewyższy stopę zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka. Podobnie, $\overline{r}_M - r_f$ jest oczekiwaną nadwyżką stopy zwrotu portfela rynkowego nad stopą wolną od ryzyka r_f. Zatem, model CAPM mówi, że oczekiwana nadwyżka stopy zwrotu z aktywa jest proporcjonalna do oczekiwanej nadwyżki stopy zwrotu z rynku. A współczynnikiem proporcjonalności jest właśnie współczynnik β.

Jeśli popatrzymy na współczynnik β jak na znormalizowaną wersję kowariancji aktywa z portfelem rynkowym, to model CAPM mówi, że oczekiwana nadwyżka stopy zwrotu aktywa jest wprost proporcjonalna do jego kowariancji z portfelem rynkowym.

Współczynnik β może przyjmować różne wartości:

$\beta_i < 0$,

$\beta_i = 0$, to papier wolny od ryzyka,

$\beta_i < 1$, to papier defensywny,

$\beta_i = 1$, to rynek,

$\beta_i > 1$, to papier ofensywny.

Współczynnik β obliczamy najczęściej na dwa sposoby:

$\Rightarrow$ korzystając wprost z definicji podanej powyżej,

$\Rightarrow$ wyznaczając prostą regresji liniowej w oparciu o dane historyczne.

Zwykle do wyznaczenia współczynnika β stosuje się dzienne, tygodniowe lub miesięczne stopy zwrotu biorąc jako historyczne okno czasowe 6 do 18 miesięcy. Przykładowe obliczenia z zastosowaniem prostej regresji liniowej można znaleźć w arkuszu.

Rozważmy dwa szczególne przypadki. Przypuśćmy na początku, że papier wartościowy jest nieskorelowany z rynkiem, czyli jego współczynnik $\beta = 0$. Zatem zgodnie z modelem CAPM mamy $\overline{r} = r_f$. Co oznacza, że nawet jeśli papier wartościowy jest bardzo ryzykowny (o dużym σ), oczekiwana stopa zwrotu tego aktywa będzie równa stopie wolnej od ryzyka. Zatem nie mamy tutaj żadnej premii za podjęcie dużego ryzyka wyrażonego odchyleniem standardowym stopy zwrotu σ. Przyczyną takiej sytuacji jest to, że ryzyko aktywa, które nie jest skorelowane z rynkiem może być zdywersyfikowane.

Załóżmy teraz, że mamy papier wartościowy o współczynniku $\beta < 0$. W tym przypadku $\overline{r} < r_f$, co oznacza, że choć papier wartościowy może mieć nawet bardzo wysokie ryzyko mierzone wpółczynnikiem σ, to jego oczekiwna stopa zwrotu może być nawet mniejsza niż stopa wolna od ryzyka.

Model CAPM zmienia punkt widzenia na problem ryzyka, szczególnie gdy chodzi o ryzyko pojedynczego papieru wartościowego.

Podajmy teraz przykładową ilustrację obliczania oczekiwanej stopy zwrotu z modelu CAPM.

Przykład 6.1 Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka $r_f = 5\%$. Przypuśćmy, że oczekiwana stopa zwrotu z rynku wynosi $\overline{r}_M = 15\%$, a odchylenie standardowe stopy zwrotu z rynku $\sigma_M = 20\%$. Rozważmy papier wartościowy, który ma kowariancję stopy zwrotu ze stopą rynkową $cov(r, r_M) = 0{,}03$. Zatem współczynnik β takiego papieru wynosi

$$\beta = \frac{cov(r, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0{,}03}{0{,}2^2} = 0{,}75$$

Oczekiwana stopa zwrotu tego aktywa wynosi

$$\overline{r} = 0{,}05 + 0{,}75 \cdot (0{,}15 - 0{,}05) = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

□

Współczynnik beta portfela
Przypuśćmy, że mamy portfel n spółek z wagami $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Stopa zwrotu z portfela akcji wynosi

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

zatem kowariancja stopy zwrotu portfela i rynku

$$cov(r_p, r_M) = \sum_{i=1}^{n} cov(r_i, r_M)$$

to oznacza, że

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

Współczynnik β portfela jest średnią ważoną współczynników β poszczególnych spółek będących w portfelu.

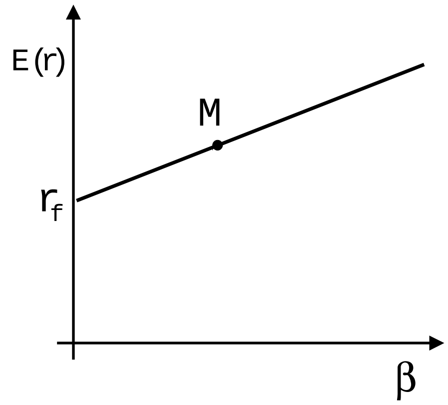
6.3. Linia rynku papieru wartościowego

Model CAPM możemy wyrazić w postaci graficznej. Ta zależność nazywana jest **linią rynku papieru wartościowgo** (*Security Market Line* SML) i wyraża relację pomiędzy ryzykiem a nagrodą, w postaci oczekiwanej stopy zwrotu. Co więcej, podkreśla, że ryzyko papieru wartościowego jest funkcją jego kowariancji z rynkiem lub równoważnie, funkcją jego współczynnika β.

Model CAPM implikuje specjalną strukturalną własność stopy zwrotu z aktywów i pokazuje jak ważną miarą w określaniu ryzyka jest współczynnik β. Zapiszmy (losową) stopę zwrotu i-tego aktywa nawiązując do modelu CAPM

$$r_i = r_f + \beta_i (r_M - r_f) + \epsilon_i \tag{6.6}$$

Zmienna losowa ϵ_i jest tak wybrana, aby zachodziły w rzeczywistości pewne własności. Po pierwsze, $E(\epsilon_i) = 0$ co wynika z modelu CAPM, a jest to równoważne



Rysunek 6.2. Linia rynku papieru wartościowego.

wprowadzeniu wartości oczekiwanej do wyrażenia (6.6). Po drugie, jeśli policzymy wariancję stopy zwrotu i-tej spółki, to uzyskamy

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E(r_i - \overline{r}_i)^2 \\
&= E(r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i - (r_f + \beta_i(\overline{r}_M - r_f)))^2 \\
&= E(\beta_i(r_M - \overline{r}_M) + \epsilon_i)^2 \\
&= E(\beta_i(r_M - \overline{r}_M) + \epsilon_i)^2 \\
&= E(\beta_i(r_M - \overline{r}_M) + \epsilon_i - E(\epsilon_i))^2 \\
&= \beta_i^2 E(r_M - \overline{r}_M)^2 + E(\epsilon_i - E(\epsilon_i))^2 \\
&= \beta_i^2 \sigma_M^2 + var(\epsilon_i)
\end{aligned}$$

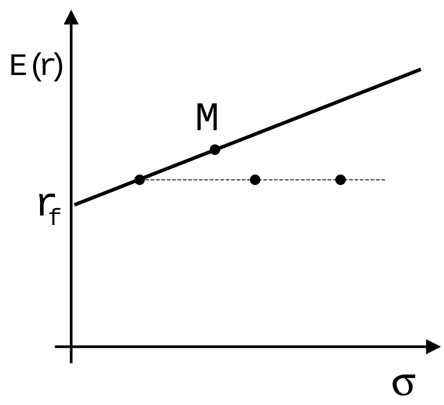
Przy wyprowadzaniu tej zależności skorzystaliśmy z założenia, że $E(\epsilon_i)^2 = 0$. Zatem pokazaliśmy, że ryzyko (wyrażone wariancją stopy zwrotu) i-tej spółki składa się z dwóch części. Pierwszy składnik tej sumy $\beta_i^2\sigma_M^2$ nazywamy **ryzykiem systematycznym** (*systematic risk*), nazywane przez nas wcześniej ryzykiem rynkowym. To jest ryzyko związane z rynkiem jako całością i to ryzyko nie może być wyeliminowane poprzez dywersyfikację, ponieważ każda spółka z niezerowym współczynnikiem β zawiera to ryzyko.

Drugi składnik tej sumy nazywamy **ryzykiem specyficznym** (*specific risk*) lub też ryzykiem niesystematycznym. Ryzyko to jest nieskorelowane z rynkiem i może być zredukowane poprzez dywersyfikację portfela. To właśnie ryzyko niesystematyczne, mierzone przez współczynnik β, jest najważniejsze ponieważ bezpośrednio łączy ryzyko systematyczne innych aktywów w portfelu.

Możmy zatem napisać

$$\text{ryzyko} = \text{ryzyko systematyczne} + \text{ryzyko niesystematyczne}$$

Rozważmy spółkę leżącą na linii rynku kapitałowego CML o współczynniku β. Odchylenie standardowe stopy zwrotu tego aktywa wynosi $\beta\sigma_M$ zgodnie z wcześniejszymi wyprowadzeniami.



Rysunek 6.3. Ryzyko systematyczne i niesystematyczne.

Ten papier wartościowy posiada tylko ryzyko systematyczne, bo leży na CML. Oczekiwana stopa zwrotu tego aktywa wynosi

$$\overline{r} = r_f + \beta(\overline{r}_M - r_f) \tag{6.7}$$

Rozważmy teraz zbiór aktywów, które mają ten sam współczynnik β. Według modelu CAPM wszystkie te aktywa mają tą samą oczekiwaną stopę zwrotu, równą $\overline{r}$. Jednak, jeśli te aktywa posiadają ryzyko niesystematyczne, to nie leżą na linii CML. Jeśli ryzyko niesystematyczne się zwiększa to te aktywa leżą dalej od linii CML. Dlatego pozioma odległość od linii CML jest miarą ryzyka niesystematycznego.

6.4. Implikacje inwestycyjne

Powstaje naturalne pytanie jakie są konsekwencje inwestycyjne modelu CAPM, czyli inaczej, czy model CAPM pomaga w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Nie ma łatwej odpowiedzi na to pytanie, jednak spróbujmy przybliżyć się do problemu.

Na rynku akcji możemy inwestować

⇒ bezpośrednio (osobiście) – inwestor indywidualny,
⇒ pośrednio (poprzez fundusze) – inwestor instytucjonalny.

Fundusze powiernicze nie są jedynymi inwestorami instytucjonalnymi na rynku kapitałowym. Wymieńmy innych inwestorów instytucjonalnych:

— fundusze inwestycyjne (powiernicze), które dzielimy ze względu na:
  — możliwości przystąpienia:
    — otwarte, zamknięte
  — wielkość podejmowanego ryzyka:
    — agresywnego wzrostu,
    — zrównoważonego wzrostu,
    — papierów dłużnych,
    — indeksowe

— banki działające na własny rachunek
— banki inwestycyjne
— instytucje ubezpieczeniowe i fundusze emerytalne
— fundusze hedgingowe (*hedge fund*).

Warto może chwilę uwagi poświęcić funduszom hedgingowym, które działają na wielu rynkach, nie tylko na rynku akcji, a poza tym inwestują nie tylko w instrumenty rynku kasowego, ale głównie w instrumenty pochodne. Prekursorem ideii funduszu hedgingowego był Alfred Winslow Jones, socjolog i dziennikarz finansowy, który przedstawił ideę takiego sposobu inwestowania w 1949 roku. Do najbardziej znanych funduszy hedgingowych należą z pewności Quantum Fund związany z Georgem Sorosem oraz Long Term Capital Management (LTCM), który został powołany do życia przez Johny'ego Meriwether. LTCM po kilku znakomitych latach sukcesów na rynku, zbankrutował w 1998 roku, powodując dość poważne naprężenia w światowym systemie finansowym, ze względu na wielkość pozycji jaką posiadał.[1]

Powracając do modelu CAPM, to wiemy, że rozwiązaniem problemu Markowitza jest dokładnie jeden portfel (fundusz) rynkowy, który każdy inwestor powinien posiadać w kombinacji liniowej z instrumentem wolnym od ryzyka. A jak pokazaliśmy wcześniej, portfel taki składa się z wszystkich spółek notowanych na rynku, ważony kapitalizacją tych spółek. Jednak indywidualnemu inwestorowi trudno jest posiadać w portfelu wszystkie aktywa kwotowane na rynku, ze względu na koszty transakcyjne. Dlatego rozwiązaniem tego problemu są fundusze indeksowe, które z definicji replikują portfel rynkowy.[2] Taki fundusz indeksowy może z powodzeniem reprezentować portfel rynkowy.

Jednak wielu inwestorów uważa, że może uzyskać lepsze wyniki niż portfel rynkowy. Model CAPM zakłada, że każdy inwestor ma dokładnie takie same informacje o losowych stopach zwrotu aktywów. W rzeczywistości oczywiście tak nie jest. I jeśli inwestor posiada informacje, które nie posiada rynek, to jest w stanie skonstruować portfel, który może być lepszy od portfela rynkowego.

W związku z przeprowadzoną powyżej analizą możemy podzielić strategie inwestowania na rynku akcji na:

⇒ pasywną – zakładamy, że rynek jest efektywny, wszelkie informacje są w cenach akcji i nie jesteśmy w stanie uzyskać lepszej stopy zwrotu niż stopa zwrotu z portfela rynkowego. Ta strategia minimalizuje koszty transakcji, bo kupujemy portfel rynkowy zmieniając od czasu do czasu skład tego portfela. Dodatkowe oszczędności związane są z czasem jaki musimy poświęcać na analizę makroekonomiczną kraju oraz wybranych spółek. Strategia ta może być realizowana poprzez:
1. kupno jednostek funduszu indeksowego,
2. kup i trzymaj (*buy & hold*) portfel rynkowy,

[1] Zainteresowanych odsyłam do znakomitej pozycji N. Dunbar, *Alchemia pieniądza*, Liber, W-wa, 2000.

[2] W ostatnich latach coraz większe znaczenie mają jednostki indeksowe, które są substytutem indeksu giełdowego i mogą być łatwo nabywane przez inwestorów.

3. inwestycję stałej kwoty w określonych przedziałach czasu w portfel rynkowy,

⇒ aktywną – zakładamy, że możemy uzyskać lepsze wyniki, niż daje stopa zwrotu z portfela rynkowego. Dlatego będziemy poszukiwali szczególnych spółek do naszego portfela. Można to zrobić przez:

1. wybór spółek ze względu na:
   — wskaźniki: cena/zysk P/E, cena/wartość księgowa P/BV, zwrot na kapitale ROE czy kapitalizację spółki,
   — analizę techniczną, czyli metodologię przewidywania fluktuacji cen akcji. Metoda ta jest znana od dawna, a jej początki sięgają XVI stulecia, gdy była stosowana w Japonii do analizy rynku towarowego. Ogólnie można w tej metodzie wyróżnić:
     ⇒ wskaźniki techniczne,
     ⇒ analizę wykresów czyli metodę Dowa,
     ⇒ świece japońskie,
   — analizę fundamentalną
2. odpowiednią rotację sektorów w portfelu,
3. zajęcie długiej lub krótkiej pozycji na rynku w odpowiednich interwałach czasowych (*market timing*).

Analiza techniczna a analiza fundamentalna. Analiza fundamentalna koncentruje się na tym, co powinno wydarzyć się na rynku. Czynniki brane pod uwagę podczas analizy ceny obejmują:

— poziom podaży i popytu
— wahania sezonowe
— pogodę
— politykę

Analiza techniczna jest oparta na trzech podstawowych zasadach:

1. Rynek dyskontuje wszystko
   To oznacza, że bieżąca cena jest odzwierciedleniem wszystkich znanych czynników mogących wpłynąć na rynek takich, jak np. czynniki polityczne czy nastroje rynkowe. Klasyczny analityk techniczny interesuje się tylko ruchem cen, a nie ich przyczynami.
2. Istnieją wzory zachowania się rynku
   Analizę techniczną stosuje się do zidentyfikowania wzorów zachowania się rynku, którym przypisano określone znaczenie. W przypadku wielu wzorów (zwanych formacjami) istnieje wysokie prawdopodobieństwo wywołania określonego efektu. Występują również formacje powtarzające się w określonych warunkach.
3. Historia lubi się powtarzać
   Formacje, które rozpoznano i pogrupowano w ciągu ostatnich 100 lat oraz sposób w jaki wiele z nich się powtarza, prowadzą do wniosku, że psychika człowieka zmienia się bardzo powoli.

6.5. Efektywność rynku

Wspomnieliśmy wcześniej o efektywności rynku giełdowego, bez podawania szczegółowej defincji. Rynek efektywny, to rynek, na którym ceny zawsze w pełni odzwierciedlają dostępną informację. Zatem w procesie inwestowania na rynku giełdowym informacja odgrywa kluczową rolę. Nowe informacje napływające na rynek powodują zmiany cen akcji. W teorii inwestycji, o informacji zakłada się, że
— jest bezpłatna i wszyscy inwestorzy mają do niej dostęp,
— jest generowana przypadkowo i niezależnie,
— na rynku jest wielu racjonalnych inwestorów i pojedynczy inwestor swoimi zleceniami kupnaśprzedaży nie ma wpływa na poziom cen, czyli nie steruje rynkiem,
— inwestorzy reagują szybko na napływające informacje.

Wydaje się, koniecznym doprecyzowanie zakresu informacji, które wpływają na ceny aktywów finansowych. Informacje dzieli się zwykle na trzy grupy
1. informacja dotycząca cen aktywów finansowych w przeszłości,
2. wszystkie publiczne informacje, które mogą wywierać wpływ na wycenę aktywów finansowych,
3. wszystkie informacje niepubliczne.

W zależności od tego, która grupa informacji jest uwzględniana w cenach, wyróżnia się trzy formy efektywności rynku (*Efficient Market Hypothesis* EMH):
1. słabą formę efektywności (*Weak Form Efficiency* WFE), jeśli ceny aktywów notowanych na rynku w pełni odzwierciedlają informację dotyczącą cen tych aktywów w przeszłości,
2. średnią formę efektywności rynku (*Semi-strong Form Efficiency* SSFE), jeśli ceny aktywów kształtowane są nie tylko przez informację z przeszłości, ale także na podstawie wszelkich publicznych informacji, mogących mieć znaczenie dla ich poziomu, dostępnych uczestnikom rynku,
3. silną formę efektywności rynku (*Strong Form Efficiency* SFE), jeśli ceny aktywów finansowych odzwierciedlają wszelką informację, w tym informację niepubliczną.

Z tego podziału widzimy, że mamy inkluzję pomiędzy hipotezami: słaba forma zwiera się w średniej, a ta z kolei w silnej formie efektywności rynku.

Badania empiryczne dojrzałych rynków, potwierdzają prawdziwość słabej i średniej hipotezy efektywności rynku. Natomiast brak jest dowodów na istnienie silnej formy efektywności rynku. W praktyce istnieją grupy osób, które mają dostęp do informacji, która umożliwia osiągnięcie ponadprzeciętnych zysków. Pierwszą grupę stanowią animatorzy rynku (*market makers*), mający dostęp do informacji dotyczących niezrealizowanych zleceń z limitem ceny, co umożliwia im zawieranie korzystnych transakcji. Drugą część stanowią osoby (*insiders*) mające dostęp do informacji istotnych dla spółki, a jeszcze nie udostępnionych do wiadomości publicznej – członkowie zarządu, firmy audytorskie i prawnicze obsługujące tą spółkę. Reasumując tę część możemy powiedzieć, że analiza techniczna i słaba hipoteza efektywności rynku są ze sobą w sprzeczności. Co najwyżej, słaba hipoteza efektywności rynku daje pewne wskazówki co do analizy technicznej i fundamentalnej.

Wiele prac empirycznych doprowadziło do wykrycia anomalii (nieprawidłowości) wyceny papierów wartościowych, które są w sprzeczności do EMH. Anomalie te związane są między innymi z takimi czynnikami, jak: anomalie kalendarzowe (efekt stycznia, efekt poniedziałku, efekt kwartału), efekt kapitalizacji, efekt cena/zysk, cena/wartość księgowa. Ich wystepowanie podważa prawdziwość hipotezy efektywności rynku kapitałowego w średniej formie.

Powstaje zatem pytanie, czy w wyniku tych badań hipoteza efektywności rynku kapitałowego powinna być odrzucona. Na obecnym etapie badań nie jesteśmy w stanie jednoznacznie odpowiedzieć na to pytanie. Jednak, można pokazać, że anormalne zwroty muszą występować, jeśli koszty pozyskania informacji są niezerowe, czyli służą rekompensacie poniesionych nakładów.

Badanie efektywności rynku

Biorąc pod uwagę dotychczasowe rozważania możemy stwierdzić, że podział efektywności rynku kapitałowego prowadzi do stosowania pewnej metodologii dla odpowiedniej formy. Metody badania efektywności możemy podzielić następująco:

1. ocena efektywności słabej:
   – statystyczne testy efektywności rynku; badanie czy zmiany cen są niezależne,
   – metody oparte na analizie technicznej testujące proste reguły handlu.
2. ocena efektywności średniej:
   – badanie reakcji rynku na napływające zdarzenia takie jak: splity akcji, zmiany ksiegowe, oferty publiczne, reakcja na ogłoszenia i wiadomości (informacja z innych giełd, dane makroekonomiczne, plotki rynkowe),
   – eksperymenty symulacyjne, śledzące *ex post* wyniki strategii inwestycyjnych bazujących na informacjach fundamentalnych, przy założeniu, że były one dostępne dla inwestora w danym czasie
3. ocena efektywności silnej:
   – najczęściej stosuje się tu ocenę efektywności portfela funduszu inwestycyjnego czy portfela inwestora podejrzewanego o posiadanie informacji poufnej.

6.6. Ocena zarządzania portfelem akcji

Model CAPM może być stosowany do oceny jakości zarządzania portfelem papierów wartościowych. Pokażemy na przykładzie w jaki sposób można wyznaczyć główne miary i jak je interpretować.

Załóżmy, że mamy stopy zwrotu z ostatnich dziesięciu lat dla funduszu XYZ, szerokiego indeksu giełdowego oraz rentowności 52-tygodniowych bonów skarbowych podane w tabeli 6.1.

Chcielibyśmy ocenić jakość zarządzania funduszem XYZ. Rozpocznijmy naszą analizę od wyznaczenia średniej stopy zwrotu oraz wariancji (odchylenia standardowego) stopy zwrotu. Wyznaczamy estymaty (stąd pojawia się ˆ w równaniach) tych wielkości odpowiednio

$$\hat{\bar{r}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

Tabela 6.1. Stopy zwrotu funduszu XYZ, indeksu giełdowego oraz rentowności bonów skarbowych.

	stopa zwrotu w %		
rok	fundusz	indeks	bon skarbowy
1	14	12	7,0
2	10	7	7,5
3	19	20	7,7
4	-8	-2	7,5
5	23	12	8,5
6	28	23	8,0
7	20	17	7,3
8	14	20	7,0
9	-9	-5	7,5
10	19	16	8,0

oraz

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{\bar{r}})^2$$

Podstawiając dane z tabeli 6.1 dla funduszu XYZ, uzyskujemy wartość średnią stopy zwrotu i odchylenie standardowe stopy zwrotu równą odpowiednio 13% oraz 12,4%. Podobnie, dla indeksu otrzymamy 12% oraz 9,4% i bonów skarbowych 7,6% oraz 0,5%. Następnie obliczymy estymatę kowariancji stopy zwrotu funduszu XYZ z rynkiem

$$cov(r, r_M) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{\bar{r}})(r_{Mi} - \hat{\bar{r}}_M) = 0{,}0107$$

Możemy teraz policzyć współczynnik β funduszu XYZ

$$\beta = \frac{cov(r, r_M)}{var(r_M)} = 1{,}2038$$

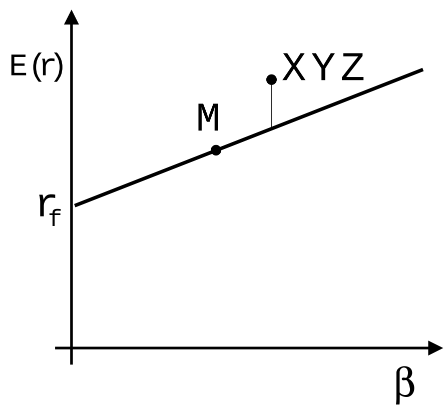
Teraz możemy wyznaczyć miarę Jensena J

$$\hat{\bar{r}} - r_f = J + \beta \cdot (\hat{\bar{r}}_M - r_f) \tag{6.8}$$

czyli mamy zależność jak w modelu CAPM. Jednak oczekiwane stopy zwrtou są zastąpione średnimi stopami zwrotu i aby zachodziła równość, dodatkowo pojawia się składnik błędu J. Jeśli działa model CAPM, to miara Jensena $J = 0$. Jeśli $J > 0$ to oznacza, że fundusz miał lepsze wyniki niż sugerował model CAPM. Jeśli $J < 0$, to fundusz miał gorsze wyniki niż można się było spodziewać z modelu CAPM. W rozważanym przypadku

$$J = \hat{\bar{r}} - r_f - \beta \cdot (\hat{\bar{r}}_M - r_f) = 13 - 7{,}6 - 1{,}2038 \cdot (12 - 7{,}6) = 0{,}10328\%$$

Czyli miara Jensena jest dodatnia co oznacza, że fundusz XYZ był dobrze zarządzany.

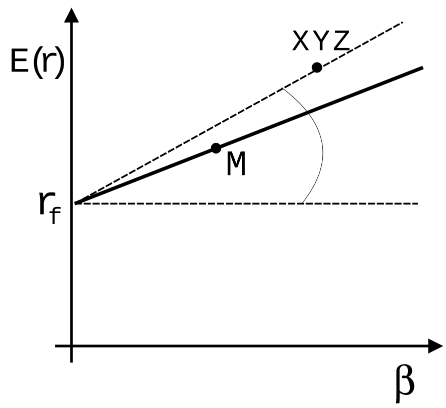


Rysunek 6.4. Miara Jensena funduszu XYZ.

Podobnie, stosując model CAPM możemy wyznaczyć miarę Treynora T dla funduszu XYZ

$$T = \frac{\hat{\bar{r}} - r_f}{\beta} = 4{,}486\% \tag{6.9}$$

Wartość T jest nachyleniem prostej przechodzącej przez punkt r_f oraz punkt wyznaczony przez fundusz XYZ we współrzędnych β-$\bar{r}$. Miara Treynora funduszu XYZ jest wyższa niż miara Treynora indeksu $T_M = 4{,}4\%$. Zatem znów mamy potwierdzenie, że fundusz XYZ był dobrze zarządzany.

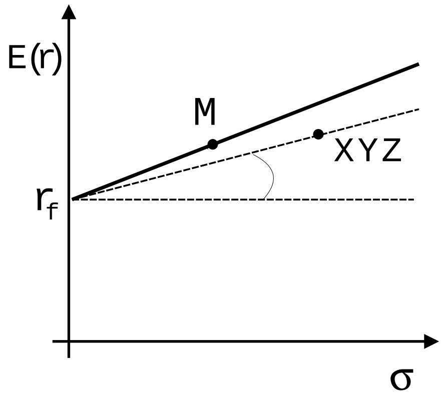


Rysunek 6.5. Miara Treynora funduszu XYZ.

Zobaczmy teraz jakie wnioski płyną z analizy średniowariancyjnej. Czy fundusz XYZ jest funduszem efektywnym, pomimo tego, że $J > 0$ oraz $T > 0$. Aby zbadać efektywność funduszu XYZ zastosujmy miarę (indeks) Sharpe'a S określony następująco

$$S = \frac{\hat{\bar{r}} - r_f}{\sigma} \tag{6.10}$$

Wartość S jest nachyleniem prostej przechodzącej przez punkt r_f oraz punkt wyznaczony przez fundusz XYZ we współrzędnych σ-$\bar{r}$. Miara Sharpe'a dla funduszu XYZ wynosi $S = 0{,}4358$. Natomiast miara Sharpe'a dla indeksu giełdowego $S_M = 0{,}4667$. Zatem fundusz XYZ nie jest funduszem efektywnym.



Rysunek 6.6. Miara Sharpe'a funduszu XYZ.

Podsumowując, miary określające osiągnięcia funduszy (portfeli) biorą pod uwagę ryzyko i stopę zwrotu. Przy czym, miara Jensena jest miarą bezwzględną, natomiast miary Treynora i Sharpe'a są miary względnymi. Więcej, miara Sharpe'a pokazuje jaki jest brak całkowitej dywersyfikacji portfela.

6.7. Zadania

Zadanie 6.1. Dla dowolnych 2 spółek z indeksu WIG i WIG20 oblicz:
i) miesięczną stopę zwrotu (okno czasowe: ostatnie 5 lat) .
ii) odchylenie standardowe stopy zwrotu
iii) kowariancję i współczynnik korelacji pomiędzy spółkami oraz pomiędzy spółkami i indeksem
iv) współczynnik β dla każdej ze spółek względem indeksu WIG i WIG20
v) wariancję resztową dla każdej ze spółek.

Zadanie 6.2. Wyznacz linię papieru wartościowego dla z zadania 6.1.

Zadanie 6.3. Mamy portfele A i B o następujących charakterystykach:
$E(r_A) = 0{,}15$; $\sigma_A = 0{,}18$
$E(r_B) = 0{,}20$; $\sigma_B = 0{,}30$
oraz instrument wolny od ryzyka o stopie $r_f = 0{,}06$.
Który z portfeli daje lepsze wyniki wg miary Sharpe'a?
Co zrobić, aby portfel A dawał taką samą stopę zwrotu jak portfel B?

Zadanie 6.4. Jeśli aktywa A oraz B mają charakterystykę:
$E(r_A) = 8{,}6\%$; $\beta_A = 0{,}7$
$E(r_B) = 12{,}4\%$; $\beta_B = 1{,}20$
i są poprawnie oszacowane, to jaka jest stopa wolna od ryzyka i stopa zwrotu z portfela rynkowego?

Zadanie 6.5. Dana jest następująca informacja o spółkach A, B, C:

	$E(r_i)$	σ_i	β_i
spółka A	23%	25%	0,8
spółka B	29%	27%	1,2
spółka C	30%	32%	1,3

Stopa zwrotu wolna od ryzyka r_f=15%, a oczekiwana stopa zwrotu z rynku $E(r_M)$=26%. Załóżmy, że na rynku obowiązuje model CAPM. Sprawdź, która spółka jest niedowartościowa.
Jaka jest miara Treynora każdej z tych inwestycji?

Zadanie 6.6. Zadanie 16.
Portfel X ma charakterystykę: $E(r_X)$= 0,20, β_X= 0,9, natomiast portfel Y: $E(r_Y)$= 0,24, β_X= 1,2. Inwestor może zaciągać i udzielać pożyczek o zerowym ryzyku przy stopie zwrotu równej stopie zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka wynoszącej 14%. Który z portfeli będzie korzystniejszy dla inwestora charakteryzującego się awersją do ryzyka (mierzonego współczynnikiem β)?

Rozdział 7

Modele i ich kalibracja

Główną przeszkodą w stosowaniu analizy średnio-wariancyjnej w praktyce jest duża liczba parametrów, które należy wyznaczyć oraz przyjęcie odpowiedniej metodologii do ich wyznaczenia. Innym bardzo istotnym problemem jest wiarygodność danych do naszych modeli oraz sama kalibracja modelu.

7.1. Modele czynnikowe

Informacja potrzebna do wyznaczenia portfela średnio-wariancyjnego składającego się z n spółek wzrasta znacząco jeśli rośnie liczba spółek n w portfelu. W takim przypadku trzeba znać:
n oczekiwanych stóp zwrotu $E(r_i)$,
n wariancji stóp zwrotu $var(r_i)$,
$n(n-1)/2$ kowariancji stóp zwrotu $cov(r_i, r_j)$,
czyli razem $2n + n(n-1)/2$ parametrów.
Jeśli przykładowo portfel składa się z $n = 1000$ spółek to musimy wyznaczyć 501 500 parametrów.

Na szczęście losowy charakter stóp zwrotu rozważanych aktywów powoduje, że obliczenia mogą być zredukowane do znacznie mniejszej liczby czynników (faktorów), które oddziałują na indywidualne stopy zwrotu. Przedstawimy teraz takie właśnie modele, które pomagają wyznaczyć parametry do analizy średnio-wariancyjnej.

7.2. Model 1-czynnikowy

Zacznijmy od najprostszego modelu, czyli modelu 1-czynnikowego. Załóżmy, że mamy:
$\Rightarrow$ n akcji, każda o stopie zwrotu r_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ oraz
$\Rightarrow$ losowy f czynnik (faktor) działający na spółkę (może to być przykładowo średnia stopa zwrotu indeksu giełdowego).
Zakładamy, że stopy zwrotu każdej ze spółek są powiązane z czynnikiem f zależnością

$$r_i = a_i + b_i f + e_i \tag{7.1}$$

gdzie:
a_i - stały składnik stopy zwrotu, któy nie zależy od rynku,
b_i - stała,
e_i - bład, który koryguje stałą a_i,
f, e_i - zmienne losowe.
Zatem zakładamy, że stopa zwrotu z papieru wartościowego związana jest ze składnikiem niezależnym od stopy zwrotu z rynku oraz ze składnikiem zależnym od rynku.

Wprowadźmy oznaczenia: $var(f) = \sigma_f^2$, $var(e_i) = \sigma_{e_i}^2$.

Do naszych dalszych rozważań poczyńmy pewne założenia:
1. wartość średnia błędów e_i znika, $E(e_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
2. każdy z błędów e_i jest nieskorelowany z czynnikiem f, czyli $cov(e_i, f) = E[(e_i - E(e_i)) \cdot (f - E(f))] = E[e_i \cdot (f - E(f))] = 0$,
3. błędy między sobą są nieskorelowane, czyli $E(e_i\, e_j) = 0$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$.

Przy tak przyjętych założeniach, model 1-czynnikowy można traktować jak prostą regresji czyli zależność stopy zwrotu r od czynnika f, $r = f(f)$, przy czym nachylenie prostej stanowi wyraz b, natomiast przecięcie prostej to wyraz a.

Przykład 7.1 Weźmy jako czynnik f portfel rynkowy r_M, wtedy stopę zwrotu dowolnego papieru wartościowego można zapisać

$$r_i = a_i + b_i r_M + e_i \tag{7.2}$$

Jak wyglądają stałe a_i oraz b_i w naszej sytuacji?

Policzmy kowariancję obu stron zależności (7.2) z rynkiem r_M. Wtedy uzyskamy

$$cov(r_M, r_i) = 0 + b_i cov(r_M, r_M) + 0 \tag{7.3}$$

czyli mamy stała b_i

$$b_i = \beta_i \tag{7.4}$$

Obłóżmy teraz obie strony zależności (7.2) wartością oczekiwaną

$$E(r_i) = a_i + \beta_i E(r_M) + 0 \tag{7.5}$$

zatem mamy stałą a_i

$$a_i = E(r_i) - \beta_i E(r_M) \tag{7.6}$$

Czyli policzyliśmy efektywnie parametry a_i oraz b_i. $\square$

Jeśli założymy, że poprawny jest model 1-czynnikowy (7.1), to możemy policzyć parametry do portfela średnio-wariancyjnego następująco:
1. oczekiwana stopa zwrotu

$$E(r_i) = E(a_i + b_i f + e_i) = E(a_i) + E(b_i f) + E(e_i) = a_i + b_i E(f)$$

2. wariancja stopy zwrotu

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E(r_i - \overline{r}_i)^2 \\
&= E((a_i + b_i f + e_i) - (a_i + b_i \overline{f}))^2 \\
&= E(b_i(f - \overline{f}) + e_i)^2 \\
&= b_i^2 E(f - \overline{f})^2 + 2b_i E(e_i(f - \overline{f})) + E(e_i)^2 \\
&= b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{ei}^2
\end{aligned}$$

3. kowariancje stóp zwrotu pomiędzy i-tą spółką oraz j-tą spółką

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= E(r_i - \overline{r}_i)(r_j - \overline{r}_j) \\
&= E[(a_i + b_i f + e_i) - (a_i + b_i \overline{f})] \cdot [(a_j + b_j f + e_j) - (a_j + b_j \overline{f})] \\
&= E[(b_i(f - \overline{f}) + e_i)(b_j(f - \overline{f}) + e_j)] \\
&= b_i b_j E(f - \overline{f})^2 + b_j E(e_i(f - \overline{f})) + \beta_i E(e_j(f - \overline{f})) + E(e_i e_j) \\
&= b_i b_j \sigma_f^2
\end{aligned}$$

ponieważ trzy ostatnie wyrazy są równe zero.

Zatem mamy zdecydowanie mniej obliczeń niż początkowo do wyznaczenia portfela średnio-wariancyjnego. Teraz wystarczy policzyć tylko $2n + n(n-1)/2$ parametrów aby wyznaczyć średnie, wariancje i kowariancje.

7.3. Model wieloczynnikowy

Poprzednie rozważania można rozszerzyć na więcej niż jeden czynnik. Załóżmy teraz, że mamy dwa czynniki f_1 oraz f_2. Stopa zwrotu z i-tej akcji opisana będzie

$$r_i = \alpha_i + \beta_{1i} f_1 + \beta_{2i} f_2 + e_i \tag{7.7}$$

gdzie:
a_i - stały składnik stopy zwrotu, któy nie zależy od rynku,
b_{1i}, b_{2i} - stałe,
e_i - błąd, który koryguje stałą a_i,
f_1, f_2, e_i - zmienne losowe.
Czynnikami mogą być przykładowo: PKB, dynamika produkcji przemysłowej, inflacje, etc.

Przyjmijmy następujące założenia o naszym modelu:

1. wartość średnia błędów e_i znika, $E(e_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
2. każdy z błędów e_i jest nieskorelowany z czynnikiem f_1 oraz f_2 czyli $cov(e_i, f_j) = E[e_i(f_j - E(f_j))] = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $j = 1, 2$
3. błędy między sobą są nieskorelowane, czyli $E(e_i\, e_j) = 0$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$.

Czynniki f_1 oraz f_2 są zmiennymi losowymi, które obserwujemy i ich własności statystyczne można badać niezależnie. Dla modelu 2-czynnikowego możemy łatwo wyprowadzić zależność na oczekiwaną stopę zwrotu z i-tej akcji

$$E(r_i) = a_i + b_{1i}E(f_1) + b_{2i}E(f_2) \tag{7.8}$$

oraz kowariancję stóp zwrotu

$$cov(r_i, r_j) = \begin{cases} b_{1i}b_{1j}\sigma^2_{f_1} + (b_{1i}b_{2j} + b_{2i}b_{1j})cov(f_1, f_2) + b_{2i}b_{2j}\sigma^2_{f_2}, & i \neq j \\ b^2_{1i}\sigma^2_{f_1} + 2b_{1i}b_{2i}cov(f_1, f_2) + b^2_{2i}\sigma^2_{f_2}, & i = j \end{cases}$$

Parametry b_{1i} oraz b_{2i} możemy znaleźć z układu równań

$$\begin{aligned} cov(r_i, f_1) &= b_{1i}\sigma^2_{f_1} + b_{2i}\sigma_{f_1,f_2} \\ cov(r_i, f_2) &= b_{1i}\sigma_{f_1,f_2} + b_{2i}\sigma^2_{f_2} \end{aligned}$$

Model 2-czynnikowy jest często stosowany jako poprawiona wersja modelu 1-czynnikowego. Przykładowo, załóżmy, że przyjęliśmy model 1-czynnikowy i wyznaczyliśmy parametry a_i oraz b_i metodą regresji liniowej. Jednak może się okazać, że błędy są duże i pokazują korelację czynnika z błędami. Zatem w tej sytuacji model 1-czynnikowy nie jest dobrym przybliżeniem analizowanych stóp zwrotu. Może się okazać, że zastosowanie modelu 2-czynnikowego będzie prowadzić do mniejszych błędów, a błędy te z kolei mogą spełniać założenia o nieskorelowaniu z czynnikami.

Model można rozszerzyć na wiele czynników. Okazuje się, że dla rynku amerykańskiego modele zawierają od 3 do 15 czynników. W praktyce jednak wybór czynników jest trudnym zadaniem — jest częściowo nauką a częściowo sztuką, czy doświadczeniem analityków budujących takie modele.

7.4. Model CAPM jako model czynnikowy

Model CAPM może być rozpatrywany jako przypadek szczególny modelu 1-czynnikowego. Weźmy jako czynnik f stopę zwrotu z rynku r_M, a nawet pewną szczególną wersję, a mianowicie niech $f = r_M - r_f$. Zatem każdą stopę zwrotu musimy przeskalować o r_f, czyli model czynnikowy wyrazimy jako zależność $r_i - r_f$ od $r_M - r_f$. W takim układzie nasz model będzie miał postać

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_f) + e_i \tag{7.9}$$

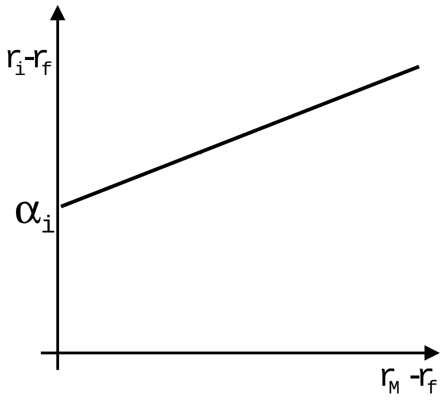
Oczywiście obowiązują takie same założenia jak wcześniej.

Równanie charakterystyczne lub linia chcarkterystyczna dla zależności (7.9) powstaje przy założeniu, że $e_i = 0$, czyli mamy

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_f) \tag{7.10}$$

Wartość oczekiwana stopy zwrotu wynosi

$$\overline{r}_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(\overline{r}_M - r_f) \tag{7.11}$$



Rysunek 7.1. Linia charakterystyczna papieru wartościowego.

co daje nam identyczną zależność jak w modelu CAPM z wyjątkiem składnika α_i. Zatem model CAPM implikuje, że $\alpha_i = 0$

Obliczmy teraz wartość współczynnika β_i. Weźmy kowariancję obu stron (7.10) ze stopą zwrotu rynku r_M. Wtedy otrzymamy

$$\sigma_{iM} = \beta_i \sigma_M^2 \tag{7.12}$$

Zatem

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \tag{7.13}$$

mamy więc dokładnie model CAPM.

7.5. Arbitrażowy model wyceny

Modele czynnikowe prowadzą do alternatywnego modelu wyceny aktywów kapitałowych, a mianowicie do modelu arbitrażowego (*Arbitrage Pricing Theory* APT) zaproponowanego przez Steve Rossa w 1976 roku. Ten model nie zakłada, że inwestorzy oceniają swoje portfele w oparciu o oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję stopy zwrotu. Model mówi, że jeśli zwroty są deterministyczne, to inwestor preferuje większą stopę zwrotu niż mniejszą. To założenie jest słabsze niż założenia modelu CAPM. Jednak model APT wymaga, aby zbiór aktywów był duży, co w rzeczywistości nie zawsze jest spełnione. Innym ważnym założeniem, związanym z nazwą samego modelu, jest brak możliwości arbitrażu na rynku (*there is no such thing as a free lunch*).

Przeanalizujmy, uproszczony model 1-czynnikowy dla i-tej akcji

$$r_i = a_i + b_i f \tag{7.14}$$

Postać modelu jest specjalna, ponieważ nie mamy tutaj błędu e_i. Niepewność stopy zwrotu jest zawarta w czynniku f. Kluczowym założeniem modelu APT jest to, że jeśli nie ma możliwości arbitrażu na rynku, to wielkości a_i oraz b_i są ze sobą związane. Aby znaleźć te relacje, weźmy stopę zwrotu j-tej spółki

$$r_j = a_j + b_j f \tag{7.15}$$

Załóżmy dodatkowo, że $b_i \neq b_j$. Tworzymy teraz portfel ze spółki i-tej oraz j-tej zakładając, że $w_i = w$, $w_j = 1 - w$.
Stopa zwrotu tego portfela wynosi

$$r = wa_i + (1-w)a_j + [wb_i + (1-w_j)b_j]f \tag{7.16}$$

Wybieramy wagę w tak, aby portfel nie zależał od czynnika f, czyli

$$w = \frac{b_j}{b_j - b_i} \tag{7.17}$$

Zatem stopa zwrotu portfela będzie teraz wynosić

$$r = wa_i + (1-w)a_j = \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} - \frac{a_j b_i}{b_j - b_i} \tag{7.18}$$

Ten specjalnie skonstruowany portfel jest wolny od ryzyka, ponieważ jego stopa zwrotu r nie zależy od czynnika losowego f. Zatem

$$r = r_f \tag{7.19}$$

bo inaczej mielibyśmy możliwość arbitrażu. Jeśli nie ma nawet instrumentu wolnego od ryzyka na rynku, to wszystkie portfele utworzone w ten sposób, czyli niezależne od czynnika losowego f, muszą mieć taką samą stopę zwrotu, stopę wolną od ryzyka. Oznaczmy tę stopę przez λ_0, czyli $\lambda_0 = r_f$.

Jeśli zatem prawa strona zależności (7.18) równa się λ_0 to

$$\lambda_0(b_j - b_i) = a_i b_j - a_j b_i \tag{7.20}$$

czyli

$$\lambda_0 b_j - \lambda b_i = a_i b_j - a_j b_i \tag{7.21}$$

co po przekształceniu daje

$$(a_j - \lambda_0)b_i = (a_i - \lambda_0)b_j \tag{7.22}$$

i w konsekwencji

$$\frac{a_j - \lambda_0}{b_j} = \frac{a_i - \lambda_0}{b_i} \tag{7.23}$$

Widzimy, że ta relacja zachodzi dla dowolnego i oraz j, czyli

$$\frac{a_i - \lambda_0}{b_i} = const = c \tag{7.24}$$

a to oznacza, że zmienne a_i, b_i są liniowo zależne

$$a_i = \lambda_0 + b_i c \tag{7.25}$$

Zapiszmy oczekiwaną stopę zwrotu i-tej spółki

$$\overline{r}_i = a_i + b_i\overline{f} = \lambda_0 + b_i c + b_i\overline{f} = \lambda_0 + b_i\lambda_1 \tag{7.26}$$

gdzie $\lambda_1 = c + \overline{f}$ jest rynkową ceną ryzyka dla czynnika f.

Zależność (7.26) jest zbliżona do równania opisującego model CAPM, bo jeśli $f = r_M$, $\lambda_0 = r_f$ oraz $\lambda_1 = \overline{r}_M - r_f$, to model APT jest równoważny modelowi CAPM dla $b_i = \beta_i$.

Dla większej liczby czynników mamy podobne rozumowanie.

Twierdzenie 7.1 (model APT dla wielu czynników) *Załóżmy, że istnieje n spółek, których stopy zwrotu zależą od $m < n$ czynników zgodnie z równaniem*

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j \tag{7.27}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Wtedy istnieją stałe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takie, że

$$\overline{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\lambda_j \tag{7.28}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bibliografia

[1] Michael Brett, *Świat finansów. How to Read the Financial Pages*, Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa, 1992. (istnieje nowsze wydanie).

[2] Nicolas Dunbar, *Alchemia pieniądza*, Liber, Warszawa, 2000.

[3] Michael Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa, 1993.

Skorowidz

over the counter market (OTC) zob. rynek pozagiełdowy, 5

akcept bankierski, 7
akcja
-wartość emisyjna, 9
-wartość księgowa, 9
-wartość nominalna, 9
analiza średnio-wariancyjna, 61

bon komercyjny, 7
brak możliwości arbitrażu, 28

Capital Asset Pricing Model, 85
cena
-brudna, 17
-czysta, 17
certyfikat depozytowy, 7

dealer, 6
dom maklerski, 6
duration, 41

efektywność rynku, 92
półsilna, 92
słaba, 92
silna, 92
euroobligacja, 8

finansowy
-instrument, 2
-rynek, 2
fundusz
-emerytalny, 5
-hedgingowy, 6
-powierniczy
-otwarty, 6
-zamknięty, 6

giełda papierów wartościowych, 5
Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie, 5
globalny portfel minimalnowariancyjny, 67
granica efektywna, 68

immunizacja portfela obligacji, 41

korelacja zmiennych losowych, 63
kowariancja zmiennych losowych, 62

linia rynku kapitałowego, 83, 84
linia rynku papieru wartościowego, 87

makler, 6
miara
Jensena, 94
Sharpe'a, 96
Treynora, 95
model CAPM, 85
model wyceny aktywów kapitałowych, 83, 85

narosłe odsetki, 17

obligacja
- o stałym oprocentowaniu, 8
- o zmiennym oprocentowaniu, 8
- w obcej walucie, 8
-śmieciowa, 8
-bezterminowa, 8
-dadatnia wypukłość, 52
-kuponowa, 11
-liczba okresów odsetkowych, 11
-oprocentowanie obligacji, 11
-wartość nominalna, 11
-wypukłość, 50
-wysokość kuponu, 11
-z opcją wykupu na żądanie emitenta, 8
-z opcją wykupu na żądanie posiadacza, 8
-zamienna, 8
-zapadalność, 11
oczekiwana stopa zwrotu, 61

odchylenie standardowe stopy zwrotu, 61
odwrotna umowa odkupu, 7
overnight repo, 7

papier
-dyskontowy, 7
-wartościowy, 2
pocisk Markowitza, 67
podstawa naliczania odsetek, 17
premia za płynność, 34
punkt minimalnowarincyjny, 67

repo, 7
reverse repo, 7
rynek
-finansowy, 1
-kapitałowy, 2
-pieniężny, 2
-pierwotny, 4
-pozagiełdowy, 5
-walutowy, 3
-wtórny, 4
efektywność, 92
ryzyko
-kredytowe, 33
-niedotrzymania warunków, 37
-operacyjne, 33
-płynności, 33
-prawne, 33
-reinwestowania, 37
-rynkowe, 33
-specyficzne, 33
-systematyczne, 33
-zmiany ceny, 37
dywersyfikowalne, 85
niedywersyfikowalne, 85
niesystematyczne, 66
rynkowe, 66, 85
specyficzne, 85, 88
systematyczne, 66, 88

Security Market Line SML, 87
SML, 87
stopa inflacji, 34
stopa procentowa
-realna, 34
stopa zwrotu, 61
- w terminie do wykupu
-portfela obligacji, 20
-bieżąca, 19
-losowa, 61
-oczekiwana, 61
-odchylenie standardowe, 61
-w terminie do wykupu, 16
-wariancja, 61
struktura terminowa stopy procentowej, 27

trader, 6

umowa odkupu, 7

Wall Street, 5
wariancja stopy zwrotu, 61
współczynnik β, 86
wypukłość
-dodatnia obligacji, 52
-obligacji, 50

yield to maturity, YTM, 16

zbiór dopuszczalny, 67
zbiór minimalnowariancyjny, 67