4.5. Obligacja o zmiennym oprocentowaniu

Aby wycenić kontrakt IRS musi bliżej przyjrzeć się **obligacji o zmiennym oprocentowaniu** (*Floating Rate Note* lub *floater* FRN). Obligacja o zmiennym oprocentowaniu to papier dłużny, którego oprocentowanie wyznacza się w oparciu o bieżącą krótkoterminową stopę procentową np. stawkę WIBOR (LIBOR), rentowność bonów skarbowych na przetargu, etc.

Przykład 4.4 Na polskim rynku są dostępne 3-letnie obligacje o zmiennym oprocentowaniu. Odsetki są wypłacane co 6 miesięcy. Oprocentowanie jest wyznaczane na podstawie stawek 6M WIBOR. To oznacza, że inwestor zna tylko wysokość kuponu bieżącego okresu odsetkowego.
Obligacja TZ0512 zapada 1 maja 2012 roku. Jej oprocentowanie wynosi:
mnożnik $\times$ 6M WIBOR
gdzie: 6M WIBOR (Warsaw Interbank Offered Rate) - ogłaszana codziennie, półroczna stopa procentowa pożyczek oferowanych na warszawskim rynku międzybankowym (dotyczy pożyczek złotowych). [3]
W przypadku tej obligacji mnożnik = 0,99.
Pierwszy okres odsetkowy zaczął się 2 maja 2009 roku, a koniec to 2 listopada 2009 roku. Kolejny okres odsetkowy to: 2 listopada 2009 – 2 maja 2010, ostatni okres odsetkowy to: 2 listopada 2011 – 2 maja 2012. 18 marca 2010 inwestor znał tylko wysokość kuponu, który zostanie wypłacony 2 maja 2010 roku. Kupon wynosił:

$$100\frac{0,99 \cdot 4,28\%}{2} = 2,14 \text{ PLN}$$

Wielkość kolejnego kuponu będzie znana dopiero na początku kolejnego okresu odsetkowego czyli 2 maja 2010 roku. □

Innym ciekawym przypadkiem obligacji o zmiennym oprocentowaniu jest obligacja o odwróconym zmiennym oprocentowaniu (*inverse floater*)

Przykład 4.5 Weźmy 5-letnią obligację o odwróconym zmiennym oprocentowaniu, które dane jest formułą:

$$c = \begin{cases} 12\% - \text{6M WIBOR}, & \text{6M WIBOR } < 12\% \\ 0\%, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{4.1}$$

Obligacja wypłaca kupon 2 razy do roku. Nominał obligacji wynosi 1000 PLN. Jeśli przykładowo, początek okresu odsetkowego zaczyna się 1 lipca i w tym dniu 6M WIBOR = 4,82%, to 31 grudnia posiadacz 1 obligacji dostanie kupon w wysokości

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}cF = \frac{1}{2} \cdot (12\% - 4,82\%) \cdot 1000 = 35,90 \text{ PLN}$$

[3] Aby poznać szczegóły techniczne ustalania oprocentowania warto sięgnąć do listu emisyjnego: `www.mf.gov.pl`

□

Zauważmy, że portfel obligacji składający się z obligacji o zmiennym oprocentowaniu i odwróconym zmiennym oprocentowaniu jest obligacją o stałym oprocentowaniu:
Floater + inverse floater = obligacja o stałym oprocentowaniu

Pomimo ogromnej liczby różnych obligacji o zmiennym oprocentowaniu skupmy się na przypadku gdy kupony są wypłacane co pół roku w oparciu o 6M WIBOR.

Na pierwszy rzut oka obligacja o zmiennym oprocentowaniu wydaje się być bardziej skomplikowanym instrumentem niż obligacja o stałym oprocentowaniu, ponieważ wysokość płatności kuponowych nie jest znana wcześniej. Jednak bliższe przyjrzenie takiej obligacji pokazuje, że cena nie powinna zbytnio odbiegać od ceny par.

Ponieważ płatności odsetkowe zależą od poziomu rynkowej stopy procentowej powinniśmy znać strukturę czasową stopy procentowej aby wycenić taką obligację.

Rozważmy obligację, która ma do zapadalności 6 miesięcy. Zatem w dniu zapadalności dostaniemy $100 \cdot (1 + L(T_{n-1})/2)$ gdzie $L(T_{n-1})$ to 6M WIBOR, w chwili T_{n-1}. Cena takiej płatności 6 miesięcy wcześniej wynosi

$$P(T_{n-1}, T_n) = \frac{100 \cdot (1 + L(T_{n-1})/2)}{1 + L(T_{n-1})/2} = 100$$

czyli jest równa cenie nominalnej.

Załóżmy teraz że obligacja ma 12 miesięcy do zapadalności. Wiemy, z wcześniejszego rozumowania, że za 6 miesięcy od dzisiaj – w dniu rozpoczęcia nowego okresu odsetkowego (*reset day*) – cena obligacji będzie wynosić 100. Zatem cena takiej obligacji będzie wynosić T_{n-2}

$$P(T_{n-2}, T_{n-1}) = \frac{100 \cdot (1 + L(T_{n-2})/2)}{1 + L(T_{n-2})/2} = 100$$

Kontynuując takie rozumowanie widzimy, że w dniach w których następuje wypłata kuponu (koniec okresu odsetkowego/początek nowego okresu odsetkowego) cena obligacji o zmiennym oprocentowaniu zawsze będzie równa cenie nominalnej. W szczególności, cena obligacji o zmiennym oprocentowaniu na początku pierwszego okresu odsetkowego będzie równa cenie nominalnej.

Zauważmy, że równie łatwo wyznaczyć cenę obligacji o zmiennym oprocentowaniu pomiędzy dniami zerowania. Załóżmy, że koniec okresu odsetkowego jest za 43 dni. Wiemy, że obligacja wypłaci kupon (ustalony na początku okresu

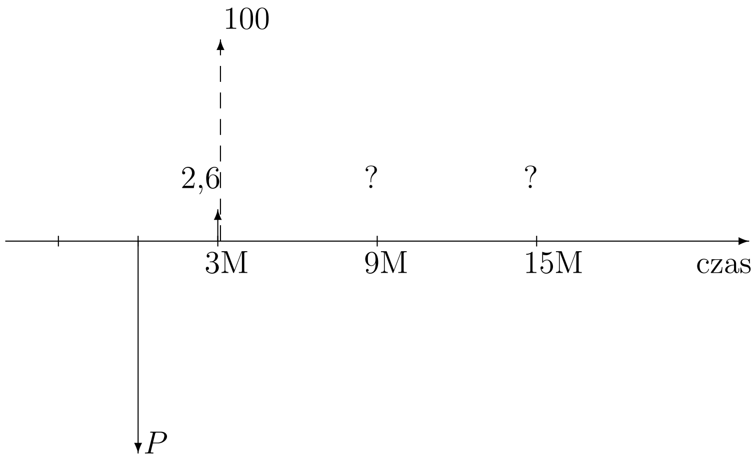
zerowanie obligacji??

odsetkowego) w wysokości 2,5 PLN. Niech $\hat{L}$ oznacza 43-dniową stopę WIBOR. Wtedy cena obligacji wynosi

$$\frac{100 + \frac{2,5}{2}}{1 + \hat{L}\frac{43}{360}}$$

Metoda, którą przedstawiliśmy oparta jest o stopy spot (*0-coupon method*).

Przykład 4.6 Załóżmy, że na rynku mamy dostępną obligację o zmiennym oprocentowaniu. Obligacja wypłaca kupon co 6 miesięcy, a jej oprocentowanie jest równe 6M WIBOR. Obligacja zapada za 1 rok i 3 miesiące. Stopy 3M WIBOR, 9M WIBOR, 15M WIBOR wynoszą odpowiednio: 5,0%, 5,3%, 5,8%. Stawka 6M WIBOR na początku bieżącego okresu odsetkowego (czyli 3 miesiące temu) wynosiła 5,2%. Jaka jest cena obligacja P?



Rysunek 4.7. Obligacja o zmiennym oprocentowaniu

W obliczeniach będziemy stosować metodę kapitalizacji półrocznej.
Wiemy, że na początku bieżącego okresu odsetkowego 6M WIBOR wynosił 5,2%. Zatem kupon

$$100 \cdot \frac{5,2\%}{2} = 2,6 \text{ PLN}$$

Wiemy również, że cena obligacji w dniu wypłaty kuponu powinna być równa 100 PLN. Zatem powinniśmy zdyskontować 102,6 PLN które otrzymamy za 3 miesiące na dzień dzisiejszy stopa rynkową czyli 3M WIBOR

$$P = \frac{100 \cdot (1 + \frac{5,2\%}{2})}{1 + \frac{5,0\%}{2}} = 101,34 \text{ PLN}$$

□

Pokażemy, że wycenę obligacji o zmiennym oprocentowaniu moglibyśmy również dokonać alternatywną metodą. Przyszłe przepływy kuponowe będą wynikały ze stóp forward.

Przykład 4.7 Mamy parametry obligacji jak w przykładzie 4.6. Otóż, w dniu wyceny wyznaczamy stopy forward $f(1/4, 3/4)$ oraz $f(3/4, 5/4)$.

$$f(1/4,3/4) = \left[\frac{\left(1+\frac{r(3/4)}{2}\right)^{2\cdot\frac{3}{4}}}{\left(1+\frac{r(1/4)}{2}\right)^{2\cdot\frac{1}{4}}}\right]^{\frac{1}{2\cdot(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})}} = 5{,}45\%$$

$$f(3/4,5/4) = \left[\frac{\left(1+\frac{r(5/4)}{2}\right)^{2\cdot\frac{5}{4}}}{\left(1+\frac{r(3/4)}{2}\right)^{2\cdot\frac{3}{4}}}\right]^{\frac{1}{2\cdot(\frac{5}{4}-\frac{3}{4})}} = 6{,}55\%$$

Stąd kupon za 9 miesięcy od dzisiaj wynosi

$$\frac{5{,}45\%}{2} \cdot 100 = 2{,}73 \text{ PLN}$$

a kupon za 15 miesięcy

$$\frac{6{,}55\%}{2} \cdot 100 = 3{,}28 \text{ PLN}$$

Zatem przepływy kuponowe będą następujące i wtedy możemy wycenić obligację następująco

$$P = \frac{2,6}{(1+\frac{r(1/4)}{2})^{0,5}} + \frac{2,73}{(1+\frac{r(3/4)}{2})^{1,5}} + \frac{3,28+100}{(1+\frac{r(5/4)}{2})^{2,5}} = 101{,}34 \text{ PLN}$$

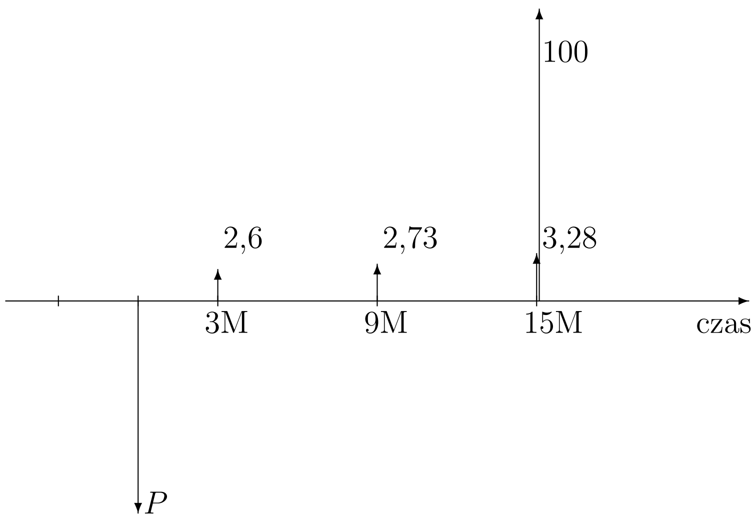
□

Przedstawiona metoda nazywana jest w literaturze **metodą projekcji stóp forward** (*forward projection method*).

Duration obligacji o zmiennym oprocentowaniu

Wyznaczmy teraz stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM takiej obligacji bo będziemy chcieli później znaleźć miarę ryzyka stopy procentowej dla tej obligacji.

Stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji o zmiennym oprocentowaniu definiujemy podobnie jak dla obligacji o stałym oprocentowaniu. Jest to jedyna stopa procentowa dyskontująca przyszłe przepływy obligacji tak, aby wartość dzisiejsza tych przepływów była równa cenie obligacji.



Rysunek 4.8. Obligacja o zmiennym oprocentowaniu

W dniu zerowania kuponu, obligacja ma cenę nominalną, zatem duration takiej obligacji wynosi 0. Jeśli natomiast mamy do najbliższego kuponu ν okresu odsetkowego wtedy cena obligacji

$$P = \frac{100 \cdot (1 + \frac{L(t_0)}{m})}{(1 + \frac{y}{m})^{\nu}}$$

i wtedy duration

$$D = \frac{P}{P}\frac{\nu}{m} = \frac{\nu}{m}$$

a zmodyfikowane duration

$$D_{mod} = \frac{1}{1 + \frac{y}{m}}\frac{\nu}{m}$$

Przykład 4.8 Powróćmy przykładu 4.6. Szukamy stopy $y = YTM$ tak, aby zachodziła równość

$$101{,}34 = \frac{2,6 + 100}{(1 + \frac{y}{2})^{0{,}5}}$$

Widzimy, że stopa YTM musi być równa 3M WIBOR czyli 5,0%.
Możemy łatwo obliczyć duration takiej obligacji.

$$D = \frac{2,6 + 100}{102{,}6} \cdot 0{,}25 = 0{,}25 \text{ lat}$$

i zmodyfikowane duration

$$D_{mod} = \frac{D}{1 + y/m} = \frac{0{,}25}{1 + \frac{0{,}05}{2}} = 0{,}248 \text{ lat}$$

□

Widzimy, że zmodyfikowane duration obligacji FRN jest w przybliżeniu równe odcinkowi czasowemu do najbliższego kuponu. Zatem ryzyko stopy procentowej obligacji o zmiennym oprocentowaniu jest niewielkie.

odwrócony czy odwrotny?

Zobaczmy jeszcze jak wycenić odwrotnego floatera i mierzyć jego ryzyko. Zauważmy, że obligację o tak skonstruowanym oprocentowaniu możemy replikować obligacją o zmiennym oprocentowaniu i obligacją o stałym oprocentowaniu.

Weźmy przykładowo, 5-letnią obligację o oprocentowaniu danym wzorem:

$$C = \begin{cases} 10\% - \text{6M WIBOR}, & \text{6M WIBOR } < 10\% \\ 0\%, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{4.2}$$

Płatności kuponowe są co pół roku. Załóżmy też, że krzywa spot jest płaska na poziomie 10%.

Widzimy, że taka obligacja o odwróconym zmiennym oprocentowaniu można replikować następującym portfelem papierów dłużnych:
— nabytą 5-letnią obligację o stałym oprocentowaniu w wysokości 10% i płatnościach co pół roku
— sprzedaną 5-letnią obligację o zmiennym oprocentowaniu w wysokości 6M WIBOR i płatnościach co pół roku
— nabytą 5-letnią obligację 0-kuponową.

Wyznaczmy cenę oraz zmodyfikowane duration każdej z tych obligacji:
— obligacja jest po cenie par i jej cena wynosi 100 PLN a zmodyfikowane duration $D_{1mod} = 3{,}86$
— jesteśmy na początku i jej cena też wynosi 100 PLN a zmodyfikowane duration $D_{2mod} = 0{,}48$
— cena obligacji 0-kuponowej to

$$P = \frac{100}{(1 + \frac{0{,}1}{2})^{10}} = 61,39 \text{ PLN}$$

a zmodyfikowane duration $D_{3mod} = 4{,}76$

Zatem cena obligacji o odwróconym zmiennym oprocentowaniu wynosi

$$P = +100 - 100 + 61{,}39 = 61{,}39 \text{ PLN}$$

Aby policzyć zmodyfikowane duration takiej obligacji musimy wyznaczyć jeszcze wagi każdej z obligacji replikującej:

$$w_1 = \frac{100}{61{,}39}, \qquad w_2 = \frac{-100}{61{,}39}, \qquad w_3 = \frac{61{,}39}{61{,}39}.$$

Zatem zmodyfikowane duration wynosi

$$D_{mod} = \frac{100}{61{,}39}3{,}86 + \frac{-100}{61{,}39}0{,}48 + \frac{61{,}39}{61{,}39}4{,}76 = 10{,}27$$

Warto podkreślić, że zmodyfikowane duration jest duże. Duże jest też ryzyko stopy procentowej takiego instrumentu.

4.6. Kalendarz finansowy i inne uwagi praktyczne

Nogi w swapie procentowym są zwykle płacone z różnymi częstotliwościami (np. noga zmienna co pół roku, noga stała co rok)

- Częstotliwości płatności odsetkowych w obu nogach kontraktu wymiany procentowej nie musza być takie same. Na przykład, w standardowych (*plain vanilla swaps*, *generic swaps*) kontraktach IRS w PLN odsetki nogi stałej są płatne rocznie, a odsetki nogi zmiennej co pół roku po stopie WIBOR 6M.
- Częstotliwość płatności odsetkowych nogi stałej jest zgodna ze schematem płatności kuponów obligacji obowiązujących w danym segmencie rynku obligacji (na ogół punktem odniesienia jest rynek obligacji skarbowych), bowiem zgodność ta umożliwia tworzenie dopasowanych strategii zabezpieczających. Jednym z ważnych wyjątków od tej ogólnej reguły są standardowe kontrakty IRS dla USD, które płacą odsetki rocznie podczas gdy amerykańskie obligacje skarbowe (USD T-bonds) płacą kupon co pół roku.
- Konwencje stóp procentowych nóg kontraktu IRS nie muszą być takie same i na ogół nie są. I tak
  - ▷ stopa kontraktu IRS nogi stałej ma zwykle konwencje zgodną z konwencją stóp procentowych obligacji skarbowych o stałym kuponie. Mamy jednak też tutaj wyjątki:
    1. noga kontraktu USD IRS jest na bazie ACT/360 podczas gdy USD T-bonds na bazie ACT/ACT
    2. noga kontraktu EUR IRS ma bazę 30/360 a obligacje rządowe na rynku wspólnej waluty mają konwencję ACT/ACT od chwili wprowadzenia wspólnej waluty.