

Jerzy A. Dzieża
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
<http://www.agh.edu.pl>
dzieza@agh.edu.pl



Instrumenty o stałym dochodzie

1 grudnia 2006 roku

Spis treści

Rozdział 1. Rynek finansowy	1
1.1. Struktura rynku finansowego	1
1.2. Uczestnicy rynku	4
1.3. Rynek pieniężny	6
1.4. Rynek kapitałowy	7
Rozdział 2. Papiery wartościowe o stałym dochodzie	10
2.1. Wartość pieniądza w czasie – jedna płatność	10
2.1.1. Kapitalizacja prosta	10
2.1.2. Kapitalizacja złożona	14
2.1.3. Kapitalizacja ciągła	17
2.2. Wartość pieniądza w czasie – ciąg płatności	18
2.2.1. Renty	18
2.3. Wycena ciągu płatności (wartość obligacji)	19
2.4. Wycena obligacji	24
2.5. Kwotowania obligacji na rynku	25
2.6. Inne miary stopy zwrotu	27
2.7. <i>YTM</i> portfela obligacji	28
2.8. Zależność cena–stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji	29
2.9. Zadania	32
Rozdział 3. Struktura terminowa stóp procentowych	35
3.1. Stopa spot i stopa forward	35
3.2. Określanie krzywej 0-kuponowej	38
3.3. Teorie struktury terminowej stopy procentowej	41
3.4. Zadania	44
Rozdział 4. Ryzyko stopy procentowej	45
4.1. Ryzyko inwestowania w obligacje	45
4.2. Duration obligacji	49
4.2.1. Duration obligacji w modelu kapitalizacji ciągłej	49
4.2.2. Duration obligacji w modelu kapitalizacji dyskretniej	52
4.3. Immunizacja portfela obligacji	55
4.4. Wypukłość obligacji	58
4.5. Duration Fishera-Weila	62
4.5.1. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji ciągłej	62
4.5.2. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji dyskretniej	63
4.6. Immunizacja portfela obligacji ze względu na równoległe przesunięcie krzywej dochodowości	64
4.7. Zadania	66
Rozdział 5. Zarządzanie portfelem obligacji	68

5.1. Zarządzanie portfelem obligacji	68
5.2. Pasywne zarządzanie portfelem obligacji	69
5.3. Aktywne zarządzanie portfelem obligacji	70
Bibliografia	74
Skorowidz	75

Rozdział 1

Rynek finansowy

1.1. Struktura rynku finansowego

Rozwój pieniądza oraz pojawienie się osób dysponujących nadmiarem wolnych środków, chcących udostępnić je odpłatnie innym uczestnikom życia gospodarczego doprowadził do powstania rynku finansowego. Transakcje na rynku finansowym oznaczają czasowe przekazanie środków na rzecz pożyczkobiorcy, pod warunkiem zwrotu kwoty powiększonej o odpowiednią premię w ustalonym terminie bądź też uzyskania wymaganej stopy zwrotu w przyszłości. Zatem z jednej strony mamy podmioty posiadające nadwyżki środków finansowych, które poszukują możliwości ich korzystnego zagospodarowania, a z drugiej strony, występują podmioty zgłaszające chęć pozyskania środków w celu finansowania swojej bieżącej i rozwojowej działalności. W wyniku tych procesów na rynku mamy do czynienia z przepływem środków finansowych w okresach krótkich (są to bieżące strumienie, zwane strumieniami pieniądza) oraz w okresach długich (są to strumienie kapitału).

Podsumowując, przez rynek finansowy będziemy rozumieli miejsce, gdzie zawierane są różnego rodzaju umowy pożyczkowe, będące w ogólnym rozumieniu źródłem finansowania działalności gospodarczej, czyli dokonuje się przepływ kapitału finansowego. To przemieszczenie nadwyżek na rynku finansowym dokonuje się za pośrednictwem instrumentów finansowych (*financial instruments*), które stanowią dokument potwierdzający fakt odpłatnego udostępnienia kapitału. Oznacza to, że są one finansowym aktywem dla ich posiadaczy i finansowym zobowiązaniem dla ich emitentów.

Z tytułu posiadania instrumentów finansowych właściciel może mieć jedno z następujących praw:

- Prawo do współwłasności majątku (udziały, akcje), czyli papiery o charakterze udziałowym,
- Prawo do określonego procentu (obligacje, bony skarbowe), czyli papiery o charakterze wierzycielskim,
- Prawo do otrzymania w przyszłości określonych aktywów (instrumenty pochodne); mogą być kreowane w oparciu o papiery udziałowe jak i wierzycielskie.

W szczególności instrumentami finansowymi są **papiery wartościowe** (*securities*). Tradycyjnie tym terminem określa się dokumenty potwierdzające prawa majątkowe, głównie akcje i obligacje.

Kto rządzi światem?

Wiosną bieżącego [1995] roku trwał zmasowany atak międzynarodowych spekulantów na amerykańskiego dolara. W kilka godzin po kolejnym - jak zwykle nieudanym - kontrataku największych banków centralnych świata i po stanowczej wypowiedzi prezydenta Clintona, iż Waszyngton nie dopuści do dalszej deprecjacji tej waluty, dziennikarz amerykańskiej telewizji publicznej spytał panią Françoise Suarez-Kemp, szefową nowojorskiego oddziału banku Credit Suisse, czy tak silna interwencja spowoduje wreszcie odwrócenie fatalnej dla waluty USA tendencji rynkowej. Przystojna Szwajcarka uśmiechnęła się lekceważąco: „A któż to taki prezydent Clinton dla rynku walutowego?”

J. Jastrzębowski, *Prezydenci, rządy czy cykliści, Kto rządzi światem*, Rzeczpospolita, 18-19 listopada 1995.

Istnieje wiele kryteriów podziału instrumentów finansowych jak również segmentów rynku finansowego.

Dla naszego wykładu takim kryterium będzie czas, a ściślej mówiąc, okres zapadalności papieru wartościowego, czyli czas od emisji papieru do jego wykupu. Ze względu na zapadalność papierów wartościowych możemy podzielić rynek finansowy na:

- **Rynek pieniężny** (*money market*) - tutaj mamy instrumenty krótkoterminowe, z okresem zapadalności do 1 roku, służące najczęściej do finansowania bieżącej działalności (bony skarbowe, pieniądze, kwity);
- **Rynek kapitałowy** (*capital market*) - instrumenty średnio- (1-5 lat) i długoterminowe (powyżej 5 lat), służące do pozyskiwania środków inwestycyjnych (obligacje, akcje).
- **Rynek walutowy** (*foreign exchange (FX) market, Forex*), który jest sprzęgiem pomiędzy rynkiem krajowym (instrumentami finansowymi denominowanymi w walucie lokalnej) a rynkiem zagranicznym (instrumentami finansowymi denominowanymi w walucie zagranicznej).

Ze względu na horyzont czasowy dostawy poszczególnych instrumentów rozróżnia się:

- **rynek gotówkowy** zwany też rynkiem **kasowym** (*spot market*) - rynek z dostawą natychmiastową instrumentów finansowych¹
- **rynek terminowy** (*futures market*) - dostawa instrumentu finansowego na tym rynku zachodzi w późniejszym terminie.

Ze względu na formę sprzedaży wyróżnia się dwa miejsca obrotu instrumentami finansowymi. Na **rynku pierwotnym** (*primary market*) emitenci nowych instrumentów sprzedają je za pośrednictwem instytucji finansowych. Emitentami są: przedsiębiorstwa, Skarb Państwa, agencje rządowe, agencje lokalne (miasta i gmi-

¹ Natychmiastowość jest tutaj umowna. Dla waluty i obligacji wynosi 2 dni robocze po zawarciu transakcji, czyli jest to konwencja $D + 2$, a dla akcji $D + 3$, gdzie D oznacza dzień roboczy.

ny), banki, organizacje społeczne oraz fundacje potrzebujące kapitału. Nabywcami są najczęściej firmy maklerskie, które kupują całe pakiety papierów wartościowych na własne ryzyko lub na zlecenie swoich klientów.

Rynek pierwotny może mieć charakter **oferty publicznej** (*initial public offering* IPO) lub oferty adresowanej do niewielkiej grupy nazwanych imiennie inwestorów. W przypadku oferty publicznej emitent ma obowiązek ogłoszenia w prasie publicznej subskrypcji adresowanej do szerszego grona osób² lub nieznanego adresata.

Po wprowadzeniu emisji na rynek, papiery wartościowe są zazwyczaj przedmiotem obrotu na **rynku wtórnym** (*secondary market*). Jest to właściwy rynek, na którym odbywają się transakcje kupna i sprzedaży instrumentów finansowych zawierane między inwestorami. Cenę papierów na rynku kształtuje podaż i popyt na nie.

Zarówno rynek pierwotny jak i rynek wtórny mogą mieć formę **rynku publicznego** - zorganizowanego w postaci **giełdy** (*stock exchange*) i **regulowanego rynku pozagiełdowego** (*over the counter market* OTC), jak i prywatnego - nieformalnego, na którym transakcje zawierane są bezpośrednio między inwestorami. Giełda to regularne, odbywające się w określonym czasie i miejscu, podporządkowane określonym normom i zasadom, spotkania stron zawierających transakcje kupna - sprzedaży.

Kontrolę nad funkcjonowaniem rynku publicznego w Polsce sprawuje od 1 października 2006 roku Komisja Nadzoru Finansowego³, a w Stanach Zjednoczonych *Securities and Exchange Commission* SEC.



Jak powiada stary dowcip, Wall Street to ulica, która z jednej strony kończy się rzeką, a z drugiej cmentarzem. Jest to frapujące, ale niezupełnie prawdziwe. Pośrodku jest jeszcze przedszkole.

Frederick Schwed, Jr. *Where Are the Customers' Yachts?*,
John Wiley & Sons, 1995

Bardzo duża część obrotu na rynku wtórnym odbywa się poza giełdami. Jest to rynek pozagiełdowy, na którym obrót polega na tym, że nie ma ustalonego miejsca transakcji. Transakcje odbywają się między stronami przy zastosowaniu środków elektronicznych i telekomunikacyjnych.

Niektóre instrumenty finansowe są tylko w obrocie giełdowym (np. akcje), niektóre tylko w obrocie pozagiełdowym (np. waluty) a niektórymi można handlować i na giełdzie i na rynku OTC (np. obligacje).

Zobaczmy jaka jest wielkość rynku papierów dłużnych:

- w końcu marca 1999 roku całkowity dług rządu brytyjskiego będącego w obrocie na rynkach finansowych (łącznie z oficjalnymi aktywami rządowymi) szacowano na 300 mld funtów;
- pod koniec marca 1999 roku wielkość amerykańskiego długu publicznego wynosiła 5,6 bln USD, z czego prawie 60% było przedmiotem obrotu na rynku;

² W Polsce do co najmniej 300 osób.

³ Wcześniej była to Komisja Papierów Wartościowych i Giełd.

- w 1998 roku przedsiębiorstwa, rządy i agencje międzynarodowe wyemitowały międzynarodowe obligacje na kwotę 768 mld USD;
- w 1998 roku obrót wszystkimi rodzajami euroobligacji denominowanych w dolarach wyniósł 12 259 mld USD;
- według danych Ministerstwa Finansów RP na koniec grudnia 2004 roku, wartość portfela obligacji skarbowych inwestorów zagranicznych wyniosła 62,05 mld PLN. W okresie styczeń-grudzień 2004 przyrost zadłużenia zagranicy w obligacjach skarbowych wyniósł 21,8 mld PLN i był ponad dwukrotnie wyższy w porównaniu z rokiem 2003.

Przyjrzyjmy się bliżej uczestnikom rynku, instrumentom notowanym na rynkach oraz dokonajmy ich charakterystyki.

1.2. Uczestnicy rynku

Osoba chcąca odnieść sukces na parkiecie Salomon Brothers, powinna budzić się każdego ranka "gotowa ugryźć niedźwiedzia w d...".

legendarny komentarz Johna Gutfreunda, prezesa Salomon Brothers w 1986 roku

Obrotem na rynku finansowym zajmują się instytucje, które tworzą infrastrukturę tego rynku. Instytucje na rynku finansowym możemy podzielić, na instytucje tworzące własne instrumenty finansowe oraz ich nie tworzące, zajmujące się tylko pośrednictwem w obrocie. Obecnie zdecydowane większość instytucji należy do tej pierwszej grupy. Coraz mniej jest instytucji zajmujących się tylko obrotem. Weźmy dla przykładu dom maklerski, który z założenia jest tylko pośrednikiem. Liczne przykłady, również z polskiego rynku (Beskidzki Dom Maklerski emitujący warranty na instrumenty będące w obrocie na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie), wskazują na zacieranie się tego podziału.

Z kolei, instytucje tworzące instrumenty finansowe możemy podzielić na takie, które kreują pieniądź i pozostałe. Do pierwszej grupy zaliczamy sektor bankowy danej gospodarki, w skład którego wchodzi bank centralny i banki komercyjne. Pozostałe instytucje kreujące własne instrumenty finansowe, które nie są pieniądzem, nie tworzą już tak homogenicznej grupy, jak sektor bankowy. Z racji wielu innowacji finansowych, dokładny podział wykracza poza ramy naszego wykładu.

Inwestorzy są solą rynku papierów wartościowych. To oni, składając zlecenia kupna bądź sprzedaży, decydują o wycenie akcji spółek a także papierów dłużnych. Oni też decydują czy zasilić firmy w kapitał i dać im szansę na rozwój, kupując (bądź nie) akcje spółek zamierzających wejść na giełdę lub też notowanych a przeprowadzających nową emisję akcji. To wreszcie optymizm lub pesymizm większości z nich w ocenie nie tylko spółek, ale też stanu perspektyw całej gospodarki, przesądza o trendzie giełdowej koniunktury. A to z kolei zwłaszcza na dojrzałych rynkach kapitałowych ma istotny wpływ na wiele procesów gospodarczych. Od tego czy na giełdzie

utrzymuje się hossa (długotrwały wzrost cen) czy bessa (długotrwały spadek cen)⁴, zależy poziom konsumpcji gospodarstw domowych, skala inwestycji przedsiębiorstw, rozwój lub stagnacja wielu branż przemysłu, usług lub handlu.

Na rynku można wyróżnić trzy grupy uczestników:

- emitenci,
- inwestorzy,
- pośrednicy

Jakkolwiek giełdy i rynki pozagiełdowe występujące w różnych krajach różnią się sposobami funkcjonowania, mają pewne cechy wspólne. Wspólnymi są na przykład inwestorzy. Są dwa typy inwestorów: indywidualni oraz instytucjonalni.

Inwestorzy indywidualni to w dużej mierze drobni inwestorzy. Najważniejszymi inwestorami instytucjonalnymi są:

- banki, główne banki inwestycyjne;
- fundusze emerytalne (*pension funds*);
- towarzystwa ubezpieczeniowe (*insurance companies*);
- fundusze powiernicze (*mutual funds*)
 - otwarte fundusze powiernicze (*open-end funds, unit trust*) - mają zmienną liczbę uczestników i zmienną wielkość zaangażowanego kapitału. Udziały w funduszu mogą być kupowane i umarzane prawie w dowolnym momencie. Wartość jednostki uczestnictwa zależy przede wszystkim od dochodów z kapitału zainwestowanego przez zarządzających funduszem;
 - zamknięte fundusze powiernicze (*closed-end funds, investment funds*)- mają stałą liczbę uczestników - akcjonariuszy funduszu, którzy uzyskują dochód z dywidend oraz ze wzrostu kapitału.
- fundusze hedgingowe (*hedge funds*)

Oprócz inwestorów, uczestnikami rynku wtórnego są osoby, które bezpośrednio dokonują transakcji na tym rynku - **maklerzy** (*brokers*)⁵. Pośredniczą oni w obrocie instrumentów finansowych, a prowizja od obrotu stanowi ich zysk. Pracują najczęściej w **domach maklerskich** (*brokerage firms, brokerage houses*) i specjalizują w doradztwie inwestycyjnym, albo w bezpośrednim zawieraniu transakcji na giełdzie lub rynku pozagiełdowym.

Od początku istnienia rynków finansowych starano się oddzielić instytucje pośrednictwa w obrocie papierami wartościowymi od inwestowania w nie lub spekulowania nimi. Już bowiem wiele lat temu odkryto, jak duże możliwości spekulacyjne kryją się w sztucznym podbijaniu cen czy też w ukrywaniu rozeznania o ofertach kupna i sprzedaży.

Obecnie na świecie przyjmuje się podobne zasady pracy maklera. Są to m.in. obowiązek rejestracji i prowadzenia księgowości papierów wartościowych, zakaz ujawniania transakcji klienta, konieczność pełnej informacji o ofertach oraz zakaz działalności na własne nazwisko.

⁴ Często też na wyrażenie koniunktury na giełdzie mówimy: **rynek byka** (*bull market*) - gdy rynek rośnie, czyli podąża w górę oraz **rynek niedźwiedzia** (*bear market*) - gdy rynek podąża na południe, czyli spada.

⁵ Termin makler pochodzi z języka niemieckiego. Broker to jego angielski odpowiednik

Ten ostatni zakaz nie dotyczy *tradera* i *dealera*. *Trader* jest maklerem który oprócz pośrednictwa w zawieraniu transakcji, zajmuje się też spekulacją i arbitrażem na rynku. *Dealer* jest osobą dokonującą obrotu na rynku pozagiełdowym aby podtrzymać płynność rynku.

1.3. Rynek pieniężny

Rynek pieniężny (*money market*) tworzą transakcje instrumentami finansowymi o dużej płynności, mających z reguły charakter wierzycielski. Przyjmuje się, że termin wymagalności instrumentów rynku pieniężnego wynosi co najwyżej 1 rok. Podstawowym celem funkcjonowania rynku pieniężnego jest płynność podmiotów gospodarczych.

Najważniejszymi instrumentami rynku pieniężnego są **bony skarbowe** (*treasury bills*). Są to papiery emitowane przez Skarb Państwa głównie w celu zapewnienia płynności na rynku pieniężnym oraz w celu sfinansowania bieżących wydatków budżetu państwa. Ich termin wymagalności wynosi od 1 dnia do 52 tygodni.

Podstawowe parametry każdego bonu skarbowego to:

- termin wykupu (*maturity*) - dzień, począwszy od którego bon podlega wykupowi;
- wartość nominalna (*face value, par value*) - wartość, którą posiadacz bonu otrzymuje od emitenta po upływie terminu wykupu.

Nowa emisja bonów skarbowych jest zwykle wystawiana na przetargu, a cena jest niższa od wartości nominalnej, czyli bon jest papierem dyskontowym.

Inne ważne instrumenty rynku pieniężnego to:

- **certyfikat depozytowy** (*certificate of deposit*) - papier stwierdzający zdeponowanie sumy pieniężnej według określonej stopy procentowej na ustalony okres;
- **bon komercyjny** (*commercial paper*) - papier wartościowy zawierający obietnicę zapłaty przez emitenta posiadaczowi papieru określonej sumy pieniężnej w ustalonym okresie;
- **akcept bankierski** (*banker's acceptance*) - papier zawierający zobowiązanie zapłacenia przez bank dłużnika określonej sumy pieniężnej bankowi wierzyciela;
- **umowa odkupu** nazywana też **repo** (*repurchase agreement*) - kontrakt polegający na tym, że strona sprzedająca instrument finansowy zobowiązuje się odkupić ten sam instrument w ustalonym terminie w przyszłości po określonej cenie; często instrumentami są bony skarbowe, a terminem wykupu jest 1 dzień, tzw. *overnight repo*;
- **odwrotna umowa odkupu** nazywana też **reverse repo** - kontrakt polegający na tym, że strona kupująca instrument finansowy zobowiązuje się odsprzedać stronie sprzedającej ten sam instrument w ustalonym terminie w przyszłości po ustalonej cenie.

Transakcje *repo* oraz *reverse repo* to te same kontrakty, a zakwalifikowanie kon-

traktu zależy od tego, kto go zainicjował. Jeśli zainicjował go sprzedający, to jest to transakcja *repo*, a jeśli zainicjował go kupujący, to jest to transakcja *reverse repo*.

1.4. Rynek kapitałowy

Bill Simon często krzyczał na swoich maklerów: "Gdybyście nie handlowali obligacjami, bylibyście kierowcami ciężarówek. Nie próbujcie myśleć na rynku. Po prostu handlujcie". Gdy makler zajmuje długą pozycję i jego oczekiwania nie sprawdzają się, to się wycofuje, redukując straty, i zawiera następne transakcje. Ma jedynie nadzieję, że nie sprzedał w momencie, gdy ceny były na najniższym poziomie, co byłoby równoznaczne z zakupem walorów przy najwyższym poziomie cen.

Michael Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa, 1993.

Rynek kapitałowy tworzą transakcje instrumentami finansowymi o charakterze wierzycielskim bądź własnościowym. Termin realizacji instrumentów rynku kapitałowego wynosi co najmniej 1 rok. Podstawowymi celami funkcjonowania rynku kapitałowego są: efektywna alokacja kapitału między podmioty emitujące instrumenty tego rynku, właściwa wycena unstrumentów tego rynku oraz uzyskanie dochodu przez inwestorów. Podstawowymi instrumentami tego rynku to obligacja i akcja.

Obligacja (*bond*) to papier wartościowy potwierdzający nabycie przez jego posiadacza (obligatariusza) prawa do otrzymania w określonym terminie w przyszłości określonej kwoty pieniężnej. Emitent obligacji zaciąga w ten sposób kredyt u nabywcy obligacji.

Podstawowe parametry obligacji to:

- termin wykupu (*maturity*) - dzień, począwszy od którego obligacja podlega wykupowi;
- wartość nominalna (*face value, par value*) - wartość jaką posiadacz obligacji otrzymuje od emitenta po upływie terminu wykupu.

Do najważniejszych rodzajów obligacji występujących na rynkach kapitałowych należą:

- obligacje o stałym oprocentowaniu (*fixed interest bonds*) - obligacje o stałej wartości odsetek;
- obligacje o zmiennym oprocentowaniu (*floating rate notes FRN*) - obligacje, których oprocentowanie (czyli wysokość wypłacanego kuponu) zmienia się w czasie "życia obligacji"; wysokość oprocentowania zmienia się częściej niż raz w roku
- obligacje o zmiennym oprocentowaniu (*adjustable rate notes*) - obligacje, których oprocentowanie zmienia się w czasie "życia obligacji"; wysokość oprocentowania zmienia się co najwyżej raz do roku;
- obligacje 0-kuponowe (*zero-coupon bonds*) - obligacje, z tytułu posiadania których nie otrzymuje się odsetek; po upływie terminu wykupu obligatariusz otrzymuje

od emitenta kwotę równą wartości nominalnej obligacji; brak odsetek jest rekompensowany sprzedażą obligacji z dyskontem, czyli po cenie niższej od wartości nominalnej;

- obligacje z opcją wykupu na żądanie emitenta (*callable bonds*) - obligacje, w przypadku których emitent może zażądać wykupu w dowolnym momencie;
- obligacje z opcją wykupu na żądanie posiadacza (*puttable bonds*) - obligacje, w przypadku których posiadacz zażądać wykupu w dowolnym momencie;
- obligacje zamienne (*convertible bonds*) - obligacje, w przypadku których nabywca ma prawo do zamiany ich do terminu wykupu na inne instrumenty, z reguły akcje emitenta, na określonych warunkach;
- obligacje bezterminowe (*consols, perpetual bonds*) - obligacje, w przypadku których posiadacz otrzymuje bezterminowo odsetki i które nie podlegają wykupowi;
- obligacje wyrażone w obcej walucie (*foreign currency bonds*);
- euroobligacje (*eurobonds*) - obligacje, sprzedawane w innym kraju niż kraj, w którym zostały wyemitowane;
- obligacje śmieciowe (*junk bonds*).

Skąd się biorą obligacje śmieciowe?

Na przykład młody wynalazca chce zacząć produkować nowy rodzaj magnetowidu. Ma świetny pomysł, ma ludzi, potrzebuje jeszcze 10 mln dolarów. Emituje więc obligacje i ogłasza, że będą one oprocentowane 5 procent w skali roku. Nikt ich nie kupuje (nikt o jego firmie nie słyszał, wynalazek wydaje się dyskusyjny). Ogłasza [więc], że da 10 procent. Dalej nic. Wreszcie ogłasza: 20 procent. Kupują. Są to oczywiście obligacje bardzo ryzykowne, wynalazek może okazać się niewypałem, firma upadnie i wtedy rzeczywiście staną się śmieciami. Ale jak się uda - przyniosą krociowe zyski. Tak właśnie kiedyś było z firmami komputerowymi - nikt nie wierzył, że wkrótce każdy będzie miał komputer w domu.

Witold Gadomski, *Rynek*, Magazyn Gazeta, Gazeta Wyborcza, 9 marca, 2000.

Drugim podstawowym instrumentem rynku kapitałowego jest **akcja** (*stock, share*). Jest to papier wartościowy emitowany przez przedsiębiorstwo będące spółką akcyjną. Nabywca akcji staje się współwłaścicielem spółki. Ponadto uzyskuje prawo do uczestniczenia w podziale części dochodów spółki (zysku), w postaci **dywidendy**.

Wyróżnia się akcje zwykłe i uprzywilejowane. Posiadacze akcji uprzywilejowanych mają pierwszeństwo (przed posiadaczami akcji zwykłych) w wypłacie dywidendy (otrzymują stałą wartość lub stały procent dywidendy) oraz w otrzymaniu części masy upadłościowej przedsiębiorstwa w przypadku jego likwidacji. Mogą być również akcje uprzywilejowane co do głosu w zgromadzeniach akcjonariuszy.

Podstawowe parametry akcji to:

- wartość nominalna, określona jako wartość kapitału akcyjnego spółki (wniesionego przez akcjonariuszy) przypadająca na jedną akcję;
- wartość emisyjna, określona jako cena, po jakiej akcja jest sprzedawana przez emitenta jej pierwszemu właścicielowi (z reguły dokonuje się tego za pośrednictwem instytucji finansowej bądź dealera); często równa jest wartości kapitału własnego przypadającego na jedną akcję;
- wartość księgowa *book value*, określona jako wartość aktywów netto spółki przypadająca na jedną akcję;
- wartość rynkowa, cena akcji na rynku; jest to cena równowagi (lub cena do niej zbliżona), która powstaje w rezultacie spotkania się popytu i podaży

Rozdział 2

Papiery wartościowe o stałym dochodzie

*Nie robię przysług. Zadłużam się.
Motto starożytnego Sycylijczyka*

Z racji tej, że wycena papierów dłużnych opiera się na pojęciu **wartości pieniądza w czasie** (*time value of money*), przypomnimy sobie na początku podstawowe idee z tym związane. Wartość pieniądza w czasie odwołuje się do prostej zasady, że złotówka dzisiaj (którą mamy w ręku) jest więcej warta niż (przrzeczona) złotówka w przyszłości. Istnieją ku temu przynajmniej trzy powody:

- możemy zainwestować te pieniądze (choćby w banku) i zainkasować odsetki, czyli powiększyć kapitał początkowy,
 - siła nabywcza naszych pieniędzy zmienia się w czasie ze względu na inflację,
 - przyszłe wpływy pieniężne są niepewne.
- Odpowiemy sobie na pytania:
- Ile wynosi przyszła wartość pewnej sumy pieniędzy danej dzisiaj?
 - Ile wynosi dzisiejsza wartość pewnej sumy pieniędzy danej w ustalonej przyszłej chwili?

Te rozważania przeprowadzimy w sytuacji, gdy będziemy mieć tylko jedną płatność (przepływ gotówki) oraz ciąg płatności w przyszłości. Zaczniemy od najprostszej sytuacji, gdy odsetki nie są dopisywane do kapitału początkowego.¹

2.1. Wartość pieniądza w czasie – jedna płatność

2.1.1. Kapitalizacja prosta

Przypuśćmy, że dysponujemy w chwili obecnej gotówką w wysokości PV złotych. Założmy, że stopa procentowa dla wkładów rocznych wynosi $r > 0$ i że nie ulegnie zmianie w ciągu roku. Gdy złożymy pieniądze w banku na rok, uzyskamy kwotę rPV odsetek. Liczbę r nazywamy (roczną) **stopą oprocentowania**. W dalszej części będziemy stosować konwencję, że wszystkie stopy procentowe są zawsze podawane w skali roku. To ułatwia ich porównywanie i upraszcza zapis.

Kapitalizacja **prosta** oznacza, że odsetki nie są dopisywane do kapitału. Zakładając, że stopa procentowa pozostaje stała, po kolejnym roku mamy dodatkowo rPV

¹ Duża część dwóch najbliższych podrozdziałów pochodzi z pracy [3].

odsetek, co daje razem $2rPV$ odsetek. Ogólnie, po czasie T mierzonym w latach uzyskujemy $TrPV$ odsetek, czyli **przyszła wartość** (*future value*) FV po czasie T (liczonym w latach) wyniesie

$$FV = PV(1 + rT) \quad (2.1)$$

Przykład 2.1 Przypuśćmy, że mamy $PV = 100$ zł i lokujemy taką kwotę w banku na 2 lata, przy stałym (rocznym) oprocentowaniu $r = 8\%$. Po dwóch latach będziemy mieć

$$FV = PV(1 + rT) = 100(1 + 2 \cdot 0,08) = 100 \cdot 1,16 = 116 \text{ zł}$$

□

Przypuśćmy teraz, że chcemy wyliczyć **wartość dzisiejszą** PV (*present value*) pewnej kwoty pieniędzy FV po czasie T liczonym w latach. Czyli wartość dzisiejsza PV to taka kwota pieniędzy, która ulokowana w banku na okres T lat daje nam po upływie tego okresu właśnie kwotę FV . Aby to zrobić, wystarczy przekształcić zależność (2.1) i wyznaczyć PV :

$$PV = \frac{1}{1 + rT} FV = (1 + rT)^{-1} FV \quad (2.2)$$

Liczbę PV nazywamy też **wartością zdyskontowaną** liczby FV .

Mając dane PV , FV oraz T możemy wyliczyć r . Przekształcając zależność (2.1) uzyskamy stopę zwrotu tej inwestycji w danym okresie

$$rT = \frac{FV - PV}{PV}$$

czyli procentowy przyrost wartości dzisiejszej. Musimy jeszcze uwzględnić długość okresu, aby otrzymać stopę zwrotu w skali roku, czyli musimy przeskalować czas

$$r = \frac{1}{T} \frac{FV - PV}{PV} \quad (2.3)$$

i mamy wtedy stopę zwrotu (rentowność) z inwestycji w skali roku.

Dotychczasowe rozważania w zupełności wystarczą nam do wyznaczenia rentowności bonów skarbowych kwotowanych na polskim rynku pieniężnym. Pamiętajmy, że do wyceny polskich bonów skarbowych przyjmujemy, że rok kalendarzowy to 360 dni.

Przykład 2.2 Inwestor kupuje 26 tygodniowy bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł, za 99,09 zł, na 57 dni przed wykupem.

Mamy zatem $FV = 100$, $PV = 99,09$, $T = \frac{57}{360}$. Policzmy rentowność r tego bonu jako stopę, dla której wartość dzisiejsza 100 zł za 57 dni wynosi 99,09 zł

$$99,09 \left(1 + r \frac{57}{365} \right) = 100$$

czyli

$$r = \left(\frac{100}{99,09} - 1 \right) \frac{365}{57} = 0,058 = 5,8\%.$$

□

W tym momencie (jako ćwiczenie) warto sobie przypomnieć zagadnienia podaży pieniądza i zastanowić się w jaki sposób Rada Polityki Pieniężnej ustala agregaty monetarne, a w szczególności wysokość stopy operacji otwartego rynku. Pamiętajmy, że ta operacja dotyczy ceny pieniądza za 7 dni, podobnie jak w Europejskim Banku Centralnym.

Zastanówmy się jeszcze nad stopą zwrotu z inwestycji w bon skarbowy.

Przykład 2.3 Inwestor kupuje skarbowy na okres 30 dni. Chciałby osiągnąć stopę zwrotu z tej inwestycji w wysokości 2% w tym okresie (nie w skali roku). Ile powinien zapłacić za bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł na 30 dni do wykupu tego bonu?

Stopa zwrotu z jego inwestycji musi spełniać warunek

$$2\% = \frac{100 - PV}{PV}$$

Czyli cena PV bonu wynosi

$$PV = \frac{100}{1 + 0,02} = 98,039$$

□

Na polskim rynku pieniężnym kwotuje się bony skarbowe podając ich rentowność, czyli **stopę zwrotu (dochodowości) rynku pieniężnego** (*money market yield MMY*). Na światowych rynkach pieniężnych istnieje też inne pojęcie, służące określeniu dochodowości inwestycji **stopa dyskontowa** (*discount rate*). Zobaczmy jak pracuje to pojęcie.

Przypuśćmy, że za rok mamy zapłacić 100 zł. Mamy możliwość zapłacenia tylko 92 zł, ale dziś. Uzyskujemy upust $d=8\%$ mierzony jako stosunek różnicy wartości przyszłej FV i dzisiejszej PV do wartości przyszłej FV . Czyli mamy zależność na stopę dyskontową

$$d = \frac{FV - PV}{FV}$$

Jeśli uwzględnimy horyzont czasowy T , który jest różny od 1 roku, to otrzymamy zależność

$$dT = \frac{FV - PV}{FV} \quad (2.4)$$

Różnicę wartości przyszłej FV i dzisiejszej PV występującą w liczniku nazywamy **dyskontem** (*discount*).

Przykład 2.4 Wyznacz cenę amerykańskiego bonu skarbowego, jeśli do terminu wykupu pozostało 50 dni, a stopa dyskontowa $d = 3,12\%$.

Po przekształceniu zależności (2.4) dostaniemy

$$PV = FV(1 - dT)$$

czyli

$$PV = 100(1 - 0,0312 \cdot \frac{50}{360}) = 100(1 - 0,0043) = 99,56667$$

wartości nominalnej. Wiemy, że wartość nominalna takiego bonu to 100 tys. USD. Zatem za bon musimy zapłacić 99 566,67 USD. $\square$

Gdy przekształcimy zależność (2.4) dostaniemy

$$FV = PV \frac{1}{1 - dT}. \quad (2.5)$$

Ostatnia zależność dostarcza nam interpretacji stopy dyskontowej d . Jeśli wzór (2.5) jest sumą ciągu geometrycznego (przy założeniu, że $|dT| < 1$, to możemy napisać

$$FV = PV + dTPV + (dT)^2PV + (dT)^3PV + \dots$$

Oznacza to, że wartość przyszłą otrzymujemy przez dopisanie odsetek w wysokości $dTPV$, a następnie odsetek od kwoty odsetek $dT \cdot (dTPV)$, odsetek od tej kwoty $dT \cdot (dT(dTPV))$ i tak dalej. Czyli, gdyby dopisujemy odsetki dziś, kapitał ulega zwiększeniu o $dTPV$, dopisujemy dziś odsetki do tej kwoty, kapitał ulega kolejnemu zwiększeniu, dopisujemy odsetki od kwoty zwiększenia i tak dalej. Z związku z taką interpretacją, stopę d nazywamy też **stopą kapitalizacji z góry**.

Kwota dyskonta świadczy o koszcie, który ponosi emitent bonu skarbowego. Z kolei dla jego nabywcy ważna jest informacja o stopie zwrotu r , jaką uzyska z tytułu inwestycji w bon skarbowy. Zatem naturalne jest pytanie o związek pomiędzy stopami r oraz d .

W analizowanym przykładzie, gdzie $d = 0,08$ (i założeniu, że $T = 1$ rok) możemy wyliczyć odpowiadającą stopę r : $100 = 92(1 + r)$, a stąd $r = \frac{8}{92} = 8,696\%$.

Ogólnie, porównując wzory na wartość przyszłą obliczoną dwoma metodami mamy

$$\begin{aligned} FV &= PV(1 + rT) \\ FV &= PV \frac{1}{1 - dT} \end{aligned}$$

i po podstawieniu za FV uzyskujemy

$$1 + rT = \frac{1}{1 - dT}$$

czyli

$$r = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{1 - dT} - 1 \right) = \frac{d}{1 - dT}, \quad (2.6a)$$

$$d = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{1}{1 + rT} \right) = \frac{r}{1 + rT} \quad (2.6b)$$

Przykład 2.5 Jaka jest rentowności r inwestycji w amerykański bon skarbowy z przykładu 2.4?

Korzystamy z zależności (2.6a) i mamy

$$r = \frac{d}{1 - dT} = \frac{0,0312}{1 - 0,0312 \cdot \frac{50}{360}} = 3,134\%$$

$\square$

Zastanówmy się nad tym, czy może zdarzyć się przypadek równości stopy rentowności r i dyskontowej d , czyli pytamy kiedy $r = d$? Rozwiązujemy równanie $\frac{1}{1-xT} = 1 + xT$ co daje $x = 0$. Czyli z wyjątkiem ekstremalnej sytuacji zerowych stóp procentowych mamy zawsze $r \neq d$.

2.1.2. Kapitalizacja złożona

W sytuacji, gdy odsetki są dopisywane za każdym razem do kapitału, mamy do czynienia z **kapitalizacją złożoną** (*compound interest*). Okres, po którym są one dopisywane może być różny. Typowo jest to rok, 6 miesięcy, kwartał, miesiąc lub dzień i mówimy wtedy o kapitalizacji rocznej, półrocznej, kwartalnej, miesięcznej lub dziennej.

Przypuśćmy, że stopa oprocentowania jest stała i wynosi r w skali roku. Przy kapitalizacji rocznej po roku mamy $PV(1 + r)$ (tak jak przy kapitalizacji prostej). W drugim roku sumą początkową jest $PV(1 + r)$ i jej wartość po roku wzrośnie do $PV(1 + r)^2$. Ogólniej, wartość kwoty PV po T latach obliczamy stosując n -krotnie powyższą regułę, co daje wzór

$$FV = PV(1 + r)^n. \quad (2.7)$$

Odsetki od odsetek już naliczonych w poprzednim okresie nazywamy **odsetkami składanymi** (*compound interest*).

Rozważmy sytuację, w której odsetki są dopisywane co pół roku, a roczna stopa procentowa jest bez zmian. Przy tej metodzie przyjmuje się, że po okresie półrocznym kwota PV wzrasta o $\frac{r}{2}PV$ do $PV(1 + \frac{r}{2})$, a po roku do $PV(1 + \frac{r}{2})^2$. Ogólnie, po k okresach półrocznych mamy

$$PV \left(1 + \frac{r}{2}\right)^k,$$

a po T latach,

$$PV \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2T}.$$

Kapitalizacja półroczna jest korzystniejsza od rocznej z punktu widzenia osoby lokującej pieniądze. Zauważmy, że zachodzi taka nierówność (zakładając, że $r \neq 0$):

$$1 + r < 1 + 2 \cdot \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4} = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

czyli mnożąc obie strony przez PV uzyskujemy nierówność

$$PV(1 + r) < PV\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

.

Przy kapitalizacji kwartalnej mamy po 3 miesiącach kwotę $PV(1 + \frac{r}{4})$, po pół roku $PV(1 + \frac{r}{4})^2$, po roku $PV(1 + \frac{r}{4})^4$, a po T latach

$$PV \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4T}.$$

Łatwo sprawdzić, że dopisywanie odsetek co kwartał jest korzystniejsze od kapitalizacji półrocznej.

Ogólnie, jeśli podzielimy rok na m równych okresów i stosujemy kapitalizację m -krotną (polegającą na dopisaniu odsetek co $\frac{1}{m}$ część roku w wysokości $\frac{r}{m} \cdot PV$), to po k okresach mamy kwotę

$$PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k,$$

a po czasie T mierzonym w latach

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} \quad (2.8)$$

Zauważmy, że T lat to $m \cdot T$ okresów odsetkowych.

Peter Minuit kupił od Indian w 1624 roku wyspę Manhattan za świecidełka o ówczesnej wartości 24 USD. Załóżmy, że Indianie mieli możliwość wymiany świecidełek na gotówkę i zainwestowania tych pieniędzy na 5% w skali roku. Ile w 2004 roku warte byłyby te 24 USD, jeśli byśmy zastosowali kapitalizację prostą ($m = 1$) i złożoną ($m = 2$).

Za efekt częstszej kapitalizacji odpowiada annualizowany (czyli w skali roku) **czynnik stopy procentowej** (*annualized interest rate factor*)

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

który powoduje, że wartość przyszła naszej inwestycji zależy od częstotliwości kapitalizacji. Jak wspomnieliśmy, stopy procentowe podaje się w skali roku, zatem powstaje naturalna potrzeba porównania efektywności inwestycji przy różnych metodach kapitalizacji. **Efektywna stopa procentowa** r_e (*effective annual rate EAR*) to równoważna stopa procentowa, gdyby kapitalizacja następowała tylko raz w roku. Mamy zatem warunek

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

czyli

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Przykład 2.6 Inwestor stosuje następującą strategię: kupuje 13 tygodniowy bon skarbowy na przetargu, trzyma go do wykupu i uzyskane środki znów reinwestuje w takie same bony. Jaką uzyska stopę zwrotu, jeśli na każdym przetargu taki bon kosztuje 98,28% wartości nominalnej, a horyzont inwestycyjny to 1 rok?

Mamy zatem w pierwszych 13 tygodniach $FV = 100$, $PV = 98,28$, $T = \frac{13}{52}$. Rentowność r tego bonu

$$r = \frac{1}{T} \frac{100,0 - 98,28}{98,28} = 7,00\%$$

Jeśli inwestor kupuje kolejne bony na przetargu przy rentowności 7%, to mamy analogiczną sytuację jak w przypadku kwartalnej kapitalizacji odsetek. Stąd efektywna stopa zwrotu z takiej strategii wynosi

$$r_e = \left(1 + \frac{0,07}{4}\right)^4 - 1 = 7,186\%$$

□

Porównajmy wartości czynnika stopy procentowej oraz stopy efektywnej. Zakładamy, że mamy roczną stopę $r=10\%$ i rozważamy roczny horyzont inwestycyjny, przy różnych kapitalizacjach.

Tabela 2.1. Wartości czynnika stopy procentowej oraz stopy efektywnej przy $r = 10\%$ dla różnych kapitalizacjach.

Kapitalizacja	czynnik stopy procentowej		stopa efektywna r_e
roczna	$(1 + r)$	1,100000	10,00%
półroczna	$(1 + \frac{r}{2})^2$	1,102500	10,25%
kwartalna	$(1 + \frac{r}{4})^4$	1,103813	10,38%
miesięczna	$(1 + \frac{r}{12})^{12}$	1,104713	10,47%
dzienna	$(1 + \frac{r}{365})^{365}$	1,105156	10,52%

Odwróćmy teraz sytuację. Jeśli wiemy, że za T lat dostaniemy kwotę FV , to możemy zapytać ile dzisiaj jest warta ta kwota, czyli jaka jest wartość dzisiejsza PV kwoty FV za T lat? Załóżmy, że mamy daną stopę procentową r . Wtedy, jeśli mamy naliczanie odsetek co rok, to wartość dzisiejsza wynosi

$$PV = FV(1 + r)^{-T}, \quad (2.9)$$

Czynnik $(1 + r)^{-T}$ znany jest jako T -letni **czynnik dyskontowy** (*discount factor*) d_T

$$d_T = (1 + r)^{-T} \quad (2.10)$$

Jeśli dyskontowanie ma miejsce m razy w ciągu roku, to przekształcając zależność (2.8) dostaniemy wartość dzisiejszą kwoty FV za T lat

$$PV = FV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mT} \quad (2.11)$$

i wtedy czynnik dyskontowy

$$d_{mT} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mT}$$

Przykładowo, gdy stopa procentowa $r=10\%$, to 5-letni czynnik dyskontowy dla $m = 1$ wynosi $d_5 = (1 + 0,1)^{-5} = 0,6209$, a dla $m = 4$, $d_{20} = (1 + 0,1/4)^{-20} = 0,6103$.

Policzmy analogicznie jakie są czynniki dyskonta dla różnych kapitalizacji. Zakładamy, że mamy roczną stopę $r=10\%$ i rozważamy roczny horyzont inwestycyjny.

Tabela 2.2. Wartość czynników dyskontowych dla różnych kapitalizacji przy $r=10\%$.

Kapitalizacja	czynnik dyskontowy	
roczna	$(1 + r)^{-1}$	0,909090
półroczna	$(1 + \frac{r}{2})^{-2}$	0,907029
kwartalna	$(1 + \frac{r}{4})^{-4}$	0,905951
miesięczna	$(1 + \frac{r}{12})^{-12}$	0,905212
dzienna	$(1 + \frac{r}{365})^{-365}$	0,904850

2.1.3. Kapitalizacja ciągła

Rozważmy sytuację, w której odsetki są dopisywane m -krotnie w ciągu roku. Wtedy wartość przyszła FV kwoty PV po czasie t jest dana

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Gdy przekształcimy to wyrażenie uzyskamy

$$FV = PV \left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}} \right)^{rt} = PV \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} \right)^{rt}$$

Zauważmy, że wyrażenie $(1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{r}}$ nie zależy od okresu, a jedynie od częstości dopisywania odsetek.

Przechodząc do granicy z częstością dopisywania odsetek m oraz korzystając z faktu, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} = e$$

uzyskamy

$$FV = PV e^{rt}. \quad (2.12)$$

Jest to sytuacja **kapitalizacji ciągłej**, która jest matematyczną idealizacją częstej kapitalizacji. Uzyskany wzór jest dość dobrym jej przybliżeniem, a jest przy tym znacznie prostszy i łatwiejszy do przekształcania niż wzory związane z wielokrotną

kapitalizacją złożoną. Nietrudno się domyślić, że kapitalizacja ciągła będzie jeszcze korzystniejsza niż kapitalizacja złożona, z punktu widzenia osoby lokującej pieniądze. Podobnie, łatwo znaleźć zależność na stopę efektywną

$$r_e = e^r - 1$$

Przy kapitalizacji ciągłej wzór na dzisiejszą wartość PV kwoty FV danej w chwili T ma postać

$$PV = FVe^{-rT}. \quad (2.13)$$

Będziemy potrzebować odpowiedzi na ogólniejsze pytanie: ile wynosi wartość w chwili $t < T$ kwoty FV danej w chwili T . Wtedy mamy do czynienia z okresem długości $T-t$, więc kwota PV dana w chwili t przy kapitalizacji ciągłej ma w chwili T wartość

$$FV = PVe^{r(T-t)}.$$

Stąd wyliczając PV uzyskujemy odpowiedź na nasze pytanie:

$$PV = FVe^{-r(T-t)}. \quad (2.14)$$

2.2. Wartość pieniądza w czasie – ciąg płatności

Dotychczas rozważaliśmy tylko takie sytuacje, w których występował tylko pojedynczy przepływ gotówki w czasie. Teraz rozważymy sytuację gdy będzie więcej przepływów gotówkowych w trakcie inwestycji. Odpowiemy głównie na pytanie jaka jest wartość dzisiejsza takich przepływów. Zaczniemy od renty czyli ciągu równych płatności w czasie.

2.2.1. Renty

Renta to strumień przepływów pieniężnych następujących w ustalonych momentach w przyszłości. **Renta wieczysta** (*perpetuity*) oznacza nigdy nie ustający ciąg takich płatności, natomiast **renta okresowa** (*annuity*) obejmuje skończoną ich liczbę.

Przyjmujemy najpierw dla uproszczenia, że wypłaty odbywają się raz do roku, w równej wysokości C , przy czym pierwsza wypłata ma miejsce za rok od dzisiaj. Przyjmijmy stopę procentową r przy kapitalizacji rocznej. Aby wyznaczyć wartość dzisiejszą takiej renty wieczystej PV_1 (indeks 1 oznacza, że pierwsza wypłata za rok od dzisiaj) musimy zdyskontować wszystkie płatności na dzień dzisiejszy. Pierwsza wypłata C będzie dyskontowana czynnikiem $(1+r)^{-1}$, druga wypłata C czynnikiem $(1+r)^{-2}$, etc. Zatem mamy następującą zależność

$$PV_1 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \dots$$

Widzimy, że jest to nieskończony ciąg geometryczny. Sumę takiego ciągu możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{przy założeniu } |q| < 1$$

gdzie w naszym przypadku $a = \frac{C}{1+r}$, $q = \frac{1}{1+r}$. Zatem

$$PV_1 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \dots = \frac{C}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{C}{r} \quad (2.15)$$

Przykład 2.7 Chcemy otrzymywać bezterminowy (myślimy również o zabezpieczeniu naszych potomnych i ich potomnych) strumień 20 tys. zł rocznie. Jeśli stopa procentowa r wynosi 10%, to jaka jest wartość dzisiejsza takiej renty?

Korzystamy ze wzoru (2.15) i mamy $\frac{20}{0,1} = 200$ tys. zł. Jeśli mamy być beneficjentami takiego ciągu płatności to wcale nie jest to duża kwota. $\square$

Weźmy bardziej praktyczny przypadek, czyli sytuację gdy mamy skończony strumień przepływów gotówkowych. Załóżmy, że pierwsza płatność następuje po $T + 1$ latach. Aby policzyć wartość dzisiejszą PV_{T+1} takiej renty musimy zdyskontować wielkość $\frac{C}{r}$ daną w roku T na dziś, co daje

$$PV_{T+1} = \frac{C}{r(1+r)^T}.$$

Wartość dzisiejszą renty okresowej składającej się z T płatności, przy czym pierwsza jest płatna za rok:

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+r)^i} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^T}$$

obliczamy jako różnicę dwóch rent wieczystych

$$PV_1 - PV_{T+1} = \frac{C}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T} = \frac{C}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right) = C \cdot PVA(r, T),$$

gdzie

$$PVA(r, T) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right)$$

oznacza czynnik renty okresowej.

Jeśli mamy m płatności w roku w wysokości C/m każda, to wartość dzisiejsza renty okresowej składającej się z n płatności (gdzie $n = m \cdot T$, T liczba lat) będzie wyrażona zależnością

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{C}{m}}{(1 + \frac{r}{m})^i} = \frac{\frac{C}{m}}{1 + \frac{r}{m}} + \frac{\frac{C}{m}}{(1 + \frac{r}{m})^2} + \dots + \frac{\frac{C}{m}}{(1 + \frac{r}{m})^n}$$

Inne własności strumienia płatności pokażemy analizując wycenę obligacji.

2.3. Wycena ciągu płatności (wartość obligacji)

Obligacja kuponowa stanowi skończony strumień płatności – kuponów (odsetek) oraz wartości nominalnej obligacji – w przyszłości. Aby wycenić wartość takiego

ciągu płatności dzisiaj musimy zdyskontować te strumienie płatności w przyszłości na dzień wyceny, czyli na dzień dzisiejszy. Zatem

$$\begin{aligned} &\text{wartość dzisiejsza strumienia płatności} = \\ &\text{wartość dzisiejsza kuponów} + \text{wartość dzisiejsza nominalu} \end{aligned}$$

Oczywiście musimy założyć, że mamy daną stopę procentową dyskontującą te przepływy. Oznaczmy ją przez r . Wtedy wartość obligacji P (wartość dzisiejsza strumienia płatności w przyszłości) wynosi

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \quad (2.16)$$

gdzie:

- n - liczba okresów odsetkowych, $n = m \cdot T$
- m - liczba płatności odsetkowych w roku,
- T - zapadalność obligacji (liczba lat "życia obligacji");
- F - wartość nominalna obligacji (*par value*),
- C_i/m - wysokość kuponu w i -tym okresie odsetkowym, $1 \leq i \leq n$,
- i - chwile, w których następują płatności, $1 \leq i \leq n$,
- r - stopa procentowa dyskontująca przyszłe przepływy.

W powyższej formule założyliśmy, że każdy z przepływów jest dyskontowany tą samą stopą procentową r . Warto zauważyć, że wysokość kuponu C_i zależy od oprocentowania obligacji c_i następująco

$$C_i = c_i \cdot F$$

gdzie:

- c_i - stopa kuponowa (oprocentowanie) obligacji w i -tym okresie odsetkowym, $1 \leq i \leq n$.

Założyliśmy również, że jest to obligacja o zmiennym kuponie, czyli wysokość kuponu jest inna w każdym okresie odsetkowym. Jeśli założymy, że mamy obligację o stałym kuponie to wtedy $C_i/m = C/m$ dla każdego i -tego okresu odsetkowego.

Wówczas zależność (2.16) będzie miała postać

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \quad (2.17)$$

Przykład 2.8 Niech będzie dana 3-letnia obligacja o wartości nominalnej $F=100$ zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a. (*per annum*) (w skali roku), kuponach płatnych raz

do roku, $m = 1$. Niech stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 6% p.a. Wtedy wartość obligacji wyznaczmy następująco

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^3 \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\ &= \frac{8}{1+0,06} + \frac{8}{(1+0,06)^2} + \frac{108}{(1+0,06)^3} \\ &= 105,35 \end{aligned}$$

Założmy teraz, że obligacja wypłaca kupony 2 razy w roku, czyli $m=2$. Wtedy liczba okresów odsetkowych wzrośnie 2 razy, wysokość kuponu $C/m = c/m \cdot F = 8\%/2 \cdot 100 = 4$ zł, a wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^6 \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^6} \\ &= \frac{4}{1+0,03} + \frac{4}{(1+0,03)^2} + \dots + \frac{4}{(1+0,03)^5} + \frac{104}{(1+0,03)^6} \\ &= 105,42 \end{aligned}$$

Z racji częstszego wypłacania kuponów wartość obligacji (takiego strumienia zdyskontowanych przepływów pieniężnych) jest wyższa. $\square$

Zastanówmy się teraz co się stanie z wartością obligacji, jeśli zmieni się stopa procentowa dyskontująca przepływy pieniężne.

Przykład 2.9 Założmy, że mamy obligację o parametrach jak w przykładzie 2.8, o odsetkach płatnych raz w roku, $m=1$. Niech teraz stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 8% w skali roku. Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$\begin{aligned} P &= \frac{8}{1+0,08} + \frac{8}{(1+0,08)^2} + \frac{108}{(1+0,08)^3} \\ &= \frac{8}{1+0,08} + \frac{8}{(1+0,08)^2} + \frac{108}{(1+0,08)(1+0,08)^2} \\ &= \frac{8}{1+0,08} + \frac{8}{(1+0,08)^2} + \frac{100}{(1+0,08)^2} \\ &= \frac{8}{1+0,08} + \frac{108}{(1+0,08)^2} \\ &= \frac{108}{1+0,08} \\ &= 100,00 \end{aligned}$$

Zatem jeśli stopa procentowa r dyskontująca przepływy kuponowe jest równa oprocentowaniu obligacji c to wartość takiej obligacji jest równa wartości nominalnej.

Założmy teraz, że stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 10% w skali roku. Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^3 \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\ &= \frac{8}{1+0,1} + \frac{8}{(1+0,1)^2} + \frac{108}{(1+0,1)^3} \\ &= 95,62 \end{aligned}$$

□

Zatem możemy zanotować następującą obserwację:

(oprocentowanie obligacji $c < r$) $\iff$ (wartość obligacji $P <$ wartość nominalna F)

(oprocentowanie obligacji $c = r$) $\iff$ (wartość obligacji $P =$ wartość nominalna F)

(oprocentowanie obligacji $c > r$) $\iff$ (wartość obligacji $P >$ wartość nominalna F)

W analizowanych przykładach wycenialiśmy obligację na początku okresu odsetkowego, a dokładniej 'w dniu jej wodowania' (w dniu jej emisji). Chcemy teraz wycenić obligację w dowolnej chwili okresu odsetkowego.

Przykład 2.10 Założmy, że mamy obligację o parametrach jak w przykładzie 2.8, o odsetkach płatnych raz w roku, $m=1$. Ale przyjmijmy teraz, że wyceniamy ją na 2 lata i 3 miesiące przed terminem wykupu, czyli na 3 miesiące przed końcem pierwszego okresu odsetkowego. Pierwszy kupon w naszej sumie (2.16) będzie zatem dyskontowany czynnikiem $\frac{1}{(1+0,06)^{0,25}}$, bo cały okres odsetkowy to 12 miesięcy, a mamy 3 miesiące do wypłaty pierwszego kuponu. Zatem czas do wypłaty pierwszego kuponu wynosi $3/12 = 0,25$. Wtedy wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0,25}^{2,25} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^{2,25}} \\ &= \frac{8}{(1+0,06)^{0,25}} + \frac{8}{(1+0,06)^{1,25}} + \frac{108}{(1+0,06)^{2,25}} \\ &= 110,05 \end{aligned}$$

Niech teraz odsetki będą wypłacane co pół roku, czyli $m=2$. Mamy zatem 6 okresów odsetkowych, jednak pierwszy kupon już został wypłacony, bo obligacja zapada za 2 lata i 3 miesiące. Zatem jesteśmy w połowie drugiego okresu odsetkowego i drugi kupon będzie dyskontowany czynnikiem $\frac{1}{(1+0,06/2)^{0,5}}$. Stąd wartość obligacji

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0,5}^{4,5} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^{4,5}} \\ &= \frac{4}{(1+0,03)^{0,5}} + \frac{4}{(1+0,03)^{1,5}} + \dots + \frac{4}{(1+0,03)^{3,5}} + \frac{104}{(1+0,03)^{4,5}} \\ &= 106,14 \end{aligned}$$

□

Czyli ogólnie możemy zapisać:

jeśli długość odcinka czasowego do najbliższej płatności jest mniejsza niż długość okresu odsetkowego to wartość obligacji wyrazimy następująco

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i/m}{(1 + \frac{r}{m})^\nu (1 + \frac{r}{m})^{i-1}} + \frac{F}{(1 + \frac{r}{m})^\nu (1 + \frac{r}{m})^{n-1}} \quad (2.18)$$

gdzie

$$\nu = \frac{\text{liczba dni do najbliższego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \quad (2.19)$$

Na taki ciąg płatności odsetek w obligacji o stałych kuponach możemy patrzeć jak na rentę okresową o płatnościach C/m . Zatem możemy napisać

$$\begin{aligned} & \text{wartość dzisiejsza strumienia płatności} \\ &= \\ & \text{wartość dzisiejsza renty okresowej} \\ &+ \\ & \text{wartość dzisiejsza nominalu} \end{aligned}$$

Wiemy z podstaw finansów, że wartość dzisiejszą renty okresowej PA o płatnościach C/m i stopie procentowej r , można wyrazić następująco

$$PA(r, n) = \frac{C}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + r/m)^n} \right\} \quad (2.20)$$

Zatem wartość obligacji wynosi

$$P = PA(r, n) + \frac{F}{(1 + r/m)^n} \quad (2.21)$$

czyli mamy zależność

$$P = \frac{C}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + r/m)^n} \right\} + \frac{F}{(1 + r/m)^n} \quad (2.22)$$

Ta postać jest szczególnie przydatna gdy obliczamy wartość obligacji o długim okresie zapadalności.

Przykład 2.11 Niech będzie dana 30-letnia obligacja o wartości nominalnej $F=100$ zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a., kuponach płatnych 2 razy do roku, $m = 2$. Niech stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 6% p.a. Wtedy wartość obligacji wynosi

$$P = \frac{8}{0,06} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + 0,06/2)^{60}} \right\} + \frac{100}{(1 + 0,06/2)^{60}} = 110,70 + 16,97 = 127,68$$

□

Przykładowy [arkusz](#) z obliczeniami wartości obligacji.

W szczególności obligacja 0-kuponowa (możemy też spotkać pisownię: zerokuponowa) wyraża się prostą zależnością

$$P = \frac{F}{(1 + r/m)^n} \quad (2.23)$$

Warto zastanowić się dlaczego w zależności (2.23) występuje liczba płatności kuponów w ciągu roku m , jeśli mamy obligację 0-kuponową, czyli nie płaćącą kuponów. Otóż, aby móc porównać wartość obligacji 0-kuponowej z obligacjami kuponowymi dostępnymi na rynku, które wypłacają kupony co pół roku, musimy również dyskontować nominal obligacji 0-kuponowej odpowiednim czynnikiem dyskontującym uwzględniającym fakt wypłacania kuponów co pół roku.

Powyższe rozważania były prowadzone dla modelu kapitalizacji dyskretniej. Dla modelu kapitalizacji ciągłej, wartość obligacji będzie dana zależnością

$$P = \sum_{i=1}^n C_i/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \quad (2.24)$$

gdzie:

$\exp$ - podstawa logarytmu naturalnego,

t_i - chwila w której wypłacany jest i -ty kupon, $1 \leq i \leq n$.

W szczególności, dla obligacji o stałym kuponie, gdy $C_i/m = C/m$, mamy

$$P = \sum_{i=1}^n C/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \quad (2.25)$$

2.4. Wycena obligacji

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy jak wyceniać ciąg płatności. Mieliśmy podane parametry obligacji, zakładaliśmy stopę procentową (wymaganą stopę dla inwestora) dyskontującą kupony oraz nominal obligacji i obliczaliśmy ile jest wart dzisiaj taki przyszły ciąg strumienia płatności, czyli jaka jest wartość obligacji.

W rzeczywistości rynek obligacji działa inaczej. Mając dane parametry obligacji, rynek kapitałowy kwotuje (wycenia) tę obligację. Czyli ceny obligacji podaje nam rynek, natomiast to co musimy wyznaczyć to wysokość stopy procentowej dyskontującej przepływy pieniężne. Czyli jeśli z jednej strony mamy kwotowania rynkowe cen obligacji (lewa strona zależności (2.16)), a z drugiej znamy parametry obligacji (prawa strona zależności (2.16), z wyjątkiem wysokości stopy procentowej r dyskontującej przepływy) to problem wyceny obligacji sprowadza się do znalezienia wewnętrznej stopy zwrotu (*internal rate of return IRR*) sumy takich przepływów gotówkowych. W przypadku papierów dłużnych, wewnętrzna stopa zwrotu nazywana jest **stopą zwrotu w terminie do wykupu** (stopą zwrotu w okresie do wykupu) (*yield to maturity YTM*).

Definicja 2.1 Stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM to średnia stopa zwrotu uzyskana z inwestycji w obligację kuponową dziś i trzymaną do wykupu przy reinwestowaniu kuponów po stopie YTM .

Zobaczmy, że w istocie zachodzi taka zależność.

Przykład 2.12 Inwestujemy dzisiaj w 3-letnią obligację, która wypłaca kupony C raz do roku, $m=1$, w wysokości 5 zł. Nominał obligacji $F=100$ zł, a cena $P=87,57$ zł.

Stąd wynika, że YTM tej obligacji wynosi 10%. Załóżmy, że reinwestujemy kupony po pierwszym i po drugim roku po stopie $YTM=10\%$, bo

$$87,57 = \frac{5}{(1+0,1)^1} + \frac{5}{(1+0,1)^2} + \frac{105}{(1+0,1)^3}$$

Całkowita wartość inwestycji po 3 latach wyniesie

$$5 \cdot (1,1)^2 + 5 \cdot 1,1 + 105 = 116,55$$

Zatem nasza inwestycja generuje roczną stopę zwrotu YTM w ciągu tego okresu taką, że

$$(1 + YTM)^3 = \frac{116,55}{87,57}$$

czyli

$$YTM = 10\%$$

co chcieliśmy pokazać. □

W dalszych rozważaniach będziemy stosować oznaczenie $y = YTM$.

Zatem nasza zależność (2.16) przyjmie teraz postać dla modelu dyskretnego

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i/m}{(1+y/m)^i} + \frac{F}{(1+y/m)^n} \quad (2.26)$$

a dla modelu ciągłego

$$P = \sum_{i=1}^n C_i/m \cdot \exp(-y \cdot t_i) + F \cdot \exp(-y \cdot t_n) \quad (2.27)$$

2.5. Kwotowania obligacji na rynku

Warto zwrócić uwagę na fakt, że rynek kwotuje ceny obligacji w specyficzny sposób, podając cenę obligacji bez narosłych odsetek najbliższego kuponu. Czyli kwotowana jest **cena czysta** (*clean price*). Zatem jeśli nabywamy obligację będącą na rynku to, aby policzyć wielkość środków potrzebnych do otwarcia pozycji musimy wziąć pod uwagę **narosłe odsetki** (*accrued interest*). Sumę tych dwóch wielkości nazywamy **ceną brudną** (*dirty price*)

$$\text{cena brudna} = \text{cena czysta} + \text{narosłe odsetki}$$

gdzie:

cena czysta to cena kwotowana (cena podawana w gazecie),

$$\text{narosłe odsetki} = \frac{\text{liczba dni od ostatniego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \times \text{wielkość kuponu}$$

czyli

$$\text{narosłe odsetki} = (1 - \nu) \frac{c}{m} F$$

W takiej sytuacji *YTM*, zawsze określa stopę zwrotu w terminie do wykupu dla ceny brudnej obligacji.

Zobaczmy przykładowe kwotowania obligacji skarbowych na polskim rynku międzybankowym w [arkuszu](#).

Policzmy stopę zwrotu w terminie do wykupu *YTM* przykładowej obligacji kwotowanej na polskim [rynku](#).

Uwaga (dotyczy **podstawy naliczania odsetek** (*day account* lub *day basis*))

Zwykle wycena obligacji nie jest dokonywana w terminach płatności kuponowych obligacji, lecz na ustalony termin wyceny. Przykładowo, fundusze inwestycyjne muszą podawać skład portfela obligacji 2 razy do roku - na koniec czerwca i koniec grudnia, oraz muszą dokonać wyceny tego portfela. Gdy znane są termin wykupu obligacji i termin wyceny, to różnica między nimi określa dokładny horyzont czasowy inwestycji. Metoda określania długości czasu między tymi terminami znana jest jako podstawa naliczania odsetek. Istnieje wiele metod, według których liczone są te okresy na poszczególnych rynkach obligacji i dla różnych rodzajów instrumentów. Najczęściej stosowane konwencje to:

Actual/actual – rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do rzeczywistej liczby dni w roku (365 dni lub 366 dni dla roku przestępnego),

Actual/365 – rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do 365 dni w roku bez względu na to, czy rok jest przestępny,

30/360 – zakłada się, że każdy miesiąc kalendarzowy ma 30, a rok 360 dni bez względu na rzeczywistą ich liczbę.

Przykład 2.13 Obligacja wypłaca kupony co pół roku ($m=2$) w dniach:

7 kwietnia i 7 października.

Mamy dokonać wyceny obligacji na dzień 15 października zakładając, że następny rok nie jest rokiem przestępnym. Aby wycenić obligację, musimy określić jaką część okresu odsetkowego pozostała do najbliższej płatności kuponowej, jeśli przyjmiemy następujące metody liczenia dni:

a) Actual/actual

b) 30/360.

Obliczenia przedstawiono w [arkuszu](#). □

Stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM nie można wyznaczyć w sposób analityczny w modelu dyskretnym (czyli z zależności (2.26)) czy też w modelu ciągłym (zależność (2.27)). Można to zrobić tylko metodą prób i błędów lub w sposób numeryczny.

Istnieje jednak przybliżona formuła pozwalająca szybko oszacować stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM . Dana jest ona następująco

$$YTM \approx \left(\frac{C}{m} + \frac{F - P}{n} \right) \frac{3}{F + 2P} \quad (2.28)$$

Warto podkreślić, że jest to tylko oszacowanie!.

Przykład 2.14 Rozważmy 5-letnią obligację, o wartości nominalnej $F=1000$ zł, oprocentowaną w wysokości 10% p.a., płacącą odsetki raz do roku, $m=1$. Jej cena wynosi $P=105,912\%$ wartości nominalnej.

Wtedy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi

$$YTM \approx \left(\frac{100}{1} + \frac{1000 - 1059,12}{5} \right) \frac{3}{1000 + 2 \times 1059,12} = 8,48\%$$

Gdybyśmy policzyli dokładnie YTM to wyniosłaby ona 8,5%. □

Stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM można analitycznie wyznaczyć tylko i wyłącznie dla obligacji kuponowej z jednym kuponem oraz dla obligacji 0-kuponowej, z racji tylko jednego przepływu. W przypadku obligacji 0-kuponowej, dla modelu dyskretnego mamy

$$y = \left(\frac{F}{P} \right)^{1/n} - 1 \quad (2.29)$$

a dla modelu ciągłego

$$y = \frac{1}{t_n} \ln \left(\frac{F}{P} \right) \quad (2.30)$$

Ćwiczenie

Wyznacz analitycznie stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji z jednym kuponem.

2.6. Inne miary stopy zwrotu

Obok stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM istnieją inne miary stopy zwrotu. Drugą miarą stopy zwrotu z obligacji jest **bieżąca stopa zwrotu** (*current yield* CY), którą możemy zdefiniować następująco

$$\text{bieżąca stopa zwrotu} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena czysta obligacji}} \quad (2.31)$$

Kolejną miarą stopy zwrotu z obligacji jest **stopa kuponowa** (*coupon rate CR*), którą definiujemy następująco

$$\text{stopa kuponowa} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena nominalna obligacji}} \quad (2.32)$$

Stopa kuponowa to inaczej oprocentowanie obligacji. Czyli

$$CR = c$$

Powstaje naturalne pytanie jakie są zależności pomiędzy miarami stóp zwrotu z obligacji. Zobaczmy te zależności na przykładzie.

Przykład 2.15 Załóżmy, że mamy 5-letnią obligację o wartości nominalnej $F=1000$ zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a., kuponach płatnych dwa razy do roku, $m = 2$. Niech cena tej obligacji wynosi $P=108,53\%$ wartości nominalnej. Zatem

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8,00\% \\ CY &= \frac{80}{1085,30} = 7,37\% \\ YTM &= 6\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM < CY < CR$.

Weźmy teraz sytuację, gdy obligacja jest wyceniona przez rynek na poziomie $P=92,28\%$ wartości nominalnej. Wtedy

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8,00\% \\ CY &= \frac{80}{922,78} = 8,67\% \\ YTM &= 10\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM > CY > CR$.

Oczywiście, gdy obligacja jest wyceniana przez rynek na poziomie ceny nominalnej to wtedy $YTM = CY = CR$. $\square$

2.7. YTM portfela obligacji

Stopę zwrotu w terminie do wykupu obliczamy dla portfela obligacji w specyficzny sposób. Należy określić wszystkie przepływy gotówkowe generowane przez każdą z obligacji będącą w portfelu. Taki portfel ma określoną wartość (czyli cenę). YTM portfela to stopa dyskontująca wszystkie te przepływy portfela tak, aby wartość dzisiejsza tych przepływów była równa wartości rynkowej portfela.

2.8. Zależność cena–stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji

Pomimo tego, że zależność opisująca cenę papieru dłużnego jest skomplikowana, jednak można stosunkowo łatwo określić jakościowe zależności pomiędzy ceną obligacji P , stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM , oprocentowaniem obligacji c i czasem do wykupu T . Określenie tych relacji pozwoli lepiej zrozumieć problemy ryzyka stopy procentowej oraz zarządzania portfelem papierów dłużnych.

Możemy ogólnie napisać, że cena papieru dłużnego P jest funkcją trzech zmiennych:

- stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM ,
- czasu do wykupu (zapadalności) obligacji T ,
- oprocentowania obligacji c .

Zatem mamy zależność

$$P = \text{funkcja}(YTM, \text{czasu do wykupu, oprocentowania obligacji})$$

Relacje pomiędzy tymi wielkościami zestawmy w punktach. Część z nich była już omówniona, a część zostanie dopiero teraz podana.

1. Cena obligacji a YTM (dla ustalonego czasu do wykupu i oprocentowania obligacji)

$$\text{cena } P \nearrow \iff YTM \searrow$$

$$\text{cena } P \searrow \iff YTM \nearrow$$

Przy ustalonym czasie do wykupu T oraz ustalonym oprocentowaniu obligacji c , wzrost ceny obligacji P implikuje spadek rentowności obligacji, czyli stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM . I odwrotnie, spadek rentowności obligacji wymusza wzrost ich ceny. Dokładnie odwrotną relację mamy przy spadku cen obligacji. Zatem cena obligacji i rentowność tej obligacji, mierzona stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM zawsze podążają w przeciwnych kierunkach.

Co więcej, krzywa YTM - P jest wypukła.

2. Cena obligacji P a YTM i oprocentowanie obligacji c

obligacja z dyskontem

$$(c < YTM) \iff (\text{cena } P < \text{wartość nominalna } F)$$

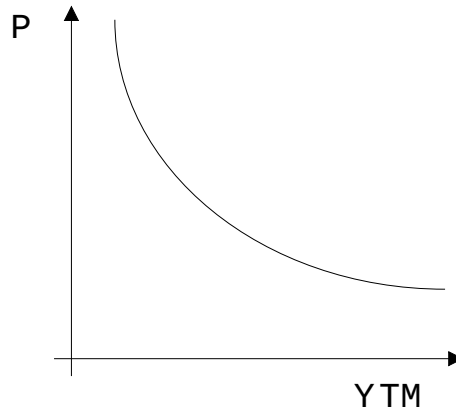
obligacja po cenie par

$$(c = YTM) \iff (\text{cena } P = \text{wartość nominalna } F)$$

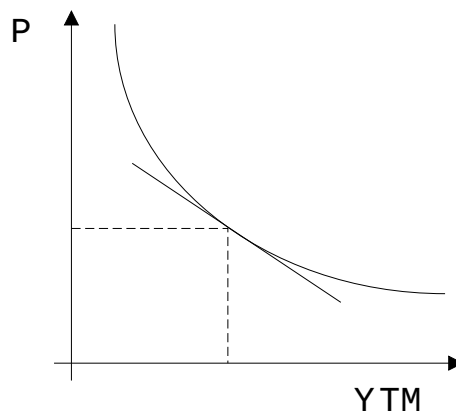
obligacja z premią

$$(c > YTM) \iff (\text{cena } P > \text{wartość nominalna } F)$$

Ta obserwacja była już zrobiona przy definiowaniu stopy kuponowej i porównaniu jej z innymi miarami zwrotu obligacji, przy czym $c = CR$.



Rysunek 2.1. Zależność ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.



Rysunek 2.2. Lokalna aproksymacja zależności ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.

3. Cena obligacji P a czas do wykupu T (przy ustalonym YTM)

Zmniejszanie się premii i dyskonta w miarę zbliżania się terminu wykupu obligacji. Jeśli dane są dwie obligacje o tym samym oprocentowaniu c , tej samej wartości nominalnej F i tej samej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , to obligacja z krótszym terminem wykupu charakteryzuje się mniejszym dyskontem (mniejszą premią odpowiednio). Tą własność obligacji pokazujemy w [arkuszu](#).

4. Własności krzywej YTM - P dla małych zmian YTM

Niewielkie procentowe zmiany YTM implikują niewielkie (w przybliżeniu równe) procentowe zmiany ceny obligacji (bez względu na spadek czy na wzrost YTM).

5. Własności krzywej YTM - P dla dużych zmian YTM

Duże procentowe zmiany YTM implikują duże (nierówne co do kierunku) procentowe zmiany ceny obligacji (przy spadku YTM procentowy wzrost ceny obligacji jest większy, niż przy wzroście YTM procentowy spadek ceny obligacji).

6. Własności krzywej $YTM-P$ (dla ustalonego okresu do wykupu T i YTM)

Przy danym okresie do wykupu i danym YTM , im niższe oprocentowanie obligacji tym większa zmienność cen.

7. Własności krzywej $YTM-P$ (dla ustalonego oprocentowania obligacji c i YTM)

Przy danym oprocentowaniu obligacji i danym YTM , im dłuższy okres do wykupu tym większa zmienność cen obligacji.

8. Własności krzywej $YTM-P$ (dla ustalonego oprocentowania c i czasu do wykupu obligacji T)

Przy danym oprocentowaniu i danym czasie do wykupu obligacji, im niższa YTM tym większa zmienność cen obligacji.

Ćwiczenie

Pokazać własności 6-8 na przykładach.

2.9. Zadania

Zadanie 2.1. Inwestor kupił na przetargu 26-tygodniowy bon skarbowy za 92,56 zł. Jeśli będzie trzymał bon do wykupu, to jaką uzyska stopę zwrotu?

Zadanie 2.2. Inwestor kupił 13-tygodniowy bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł i terminie do wykupu 56 dni za 97,24 zł. Zakładając, że rynkowa stopa procentowa nie uległa zmianie, na ile dni przed wykupem cena bonu wyniesie 99,41 zł?

Zadanie 2.3. Inwestor kupił 13-tygodniowy bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł i terminie do wykupu 76 dni za 96,37 zł. Zakładając, że rynkowa stopa procentowa spadła po 3 tygodniach o 150 punktów bazowych, oblicz po ile mógłby sprzedać ten bon? Jaka jest stopa zwrotu z tej inwestycji?

Zadanie 2.4. Wyznacz rynkowe stopy procentowe implikowane przez 52-tygodniowe bony skarbowe, jeśli do wykupu pozostało: 23 dni, 57 dni, 103 dni, 147 dni, a ich ceny wynoszą odpowiednio: 98,91 zł, 97,39 zł, 95,43 zł, 93,19 zł.

Zadanie 2.5. Inwestor kupił na przetargu 13-tygodniowy bon skarbowy za 95,82 zł. Jaka jest rynkowa stopa procentowa implikowana przez ten bon skarbowy? (wykonaj obliczenia dla kapitalizacji ciągłej i dyskretniej). Jeśli po 4 tygodniach inwestor sprzeda bon, to jaka będzie zrealizowana stopa zwrotu, jeśli:

- i) rynkowe stopy procentowe nie zmieniają się
- ii) rynkowe stopy spadną o 200 punktów bazowych (pb)
- iii) rynkowe stopy wzrosną o 100 pb.

Narysuj jak zależy wartość oraz stopa zwrotu takiego bonu od rynkowej stopy procentowej.

Zadanie 2.6. Mamy do zapłacenia 10000 zł za 6 miesięcy. Co jest korzystniejsze (licząc wartość dzisiejszą): oferta upustu w postaci stopy dyskontowej $d = 5\%$ czy wzięcie kredytu wg stopy $r = 8\%$?

Zadanie 2.7. Ile wynosi roczna stopa odpowiadająca upustowi $d = 0,03$ na okres 50 dni?

Zadanie 2.8. Po ilu dniach suma 1000 zł wzrośnie do 1200 zł przy kapitalizacji ciągłej ze stopą 8%?

Zadanie 2.9. Ile odsetek należy dopisać do kwoty miliona złotych po godzinie przy kapitalizacji ciągłej ze stopą 12%?

Zadanie 2.10. Bank stosuje kapitalizację roczną. Jaka powinna być wysokość odsetek od lokaty 1000 zł po miesiącu przy stopie 6%?

Zadanie 2.11. Ile musimy ulokować aby móc podjąć codziennie 20 zł odsetek przy kapitalizacji ciągłej i stopie 12%?

Zadanie 2.12. Inwestor kupił obligację kuponową, która jest oprocentowana w skali roku 10%, wypłaca raz do roku kupony, a jej stopa zwrotu w terminie do wykupu

YTM wynosi 8%. Jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM pozostanie na tym samym poziomie, to za rok cena tej obligacji będzie: wyższa, niższa, taka sama? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 2.13. 5-letnia obligacja o wartości nominalnej 100 zł wypłaca stałe kupony 10 zł rocznie. Jaka jest stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM , jeśli obligacja ma cenę P :

- i) 95 zł
- ii) 97 zł
- iii) 100 zł
- iv) 102 zł
- v) 105 zł

(wykonaj obliczenia dla kapitalizacji ciągłej i dyskretnej). Narysuj jak zależy cena obligacji P od stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM .

Zadanie 2.14. 5-letnia obligacja o wartości nominalnej 100 zł wypłaca stałe kupony 10 zł rocznie. Jak zmieni się cena obligacji P jeśli do zapadalności obligacji pozostanie 4 lata, gdy YTM tej obligacji na przetargu było:

- i) 8%
- ii) 10%
- iii) 12%

A jakie będą ceny gdy do zapadalności zostanie 3 lata? Narysuj jak zależy cena obligacji od daty do zapadalności.

Zadanie 2.15. Inwestor kupił 12 stycznia 2004 2-letnią 0-kuponową obligację OK0805 (data wykupu 12 sierpnia 2005, wartość nominalna 1000 zł) za 91,70% wartości nominalnej. Jaka jest rynkowa stopa procentowa implikowana przez tę obligację? (wykonaj obliczenia dla kapitalizacji ciągłej i dyskretnej).

Inwestor chce uzyskać 4% stopę zwrotu z tej inwestycji. Kiedy powinien sprzedać obligację, jeśli rynkowe stopy procentowe spadają o 50 pb co miesiąc?

Zadanie 2.16. Oblicz teoretyczną wartość każdej z podanych obligacji, jeśli wartość nominalna wynosi 1000 zł, a kupony płatne są co pół roku:

Obligacja	Oprocentowanie obligacji (%)	Okres do wykupu (w latach)	Stopa zwrotu w terminie do wykupu (%)
A	12	5	10
B	14	10	14
C	10	8	15
D	0	7	12

Zadanie 2.17. Wartość nominalna F obligacji wynosi 1000 zł, kupony mają oprocentowanie $c=6\%$ w skali roku, a do wykupu pozostało 10 lat. Oblicz:

- i) cenę obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 15%
- ii) cenę tej obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wzrośnie z 15% do 16%. O ile zmieni się cena tej obligacji (procentowo)?

- iii) cenę tej obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spadnie z 15% do 14%. O ile zmieni się cena tej obligacji (procentowo)?
- iv) cenę obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 5%
- v) cenę tej obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wzrośnie z 5% do 6%. O ile zmieni się cena tej obligacji (procentowo)?
- vi) cenę tej obligacji, jeśli stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spadnie z 5% do 4%. O ile zmieni się cena tej obligacji (procentowo)?

Rozdział 3

Struktura terminowa stóp procentowych

Do tej pory zajmowaliśmy się w zasadzie jedną stopą procentową – stopę zwrotu w terminie do wykupu, która dyskontowała wszystkie płatności kuponowe obligacji. Jednak jak wiemy z obserwacji rynku pożyczek międzybankowych, stopa pożyczki czy depozytu zależy od czasu jej trwania. Zatem zamiast dyskontować każdy przepływ stopą zwrotu w terminie do wykupu, będziemy teraz dyskontować każdy kupon inną stopą. Taką analizę nazywamy strukturą terminową stóp procentowych lub inaczej strukturą czasową stóp procentowych (*term structure of interest rates*).

Struktura terminowa opisuje zależność pomiędzy dochodowością (rentownością) a zapadalnością danego papieru dłużnego. Mamy zatem pewną funkcję

$$T \mapsto r(T) \tag{3.1}$$

zwaną **krzywą dochodowości (rentowności)** (*yield curve*),
gdzie:

T - okres zapadalności papieru dłużnego,

$r(T)$ - stopa *spot*, czyli stopa procentowa odpowiadająca danemu okresowi zapadalności.

Rynek finansowy wyróżnia w zasadzie dwie krzywe dochodowości:

⇒ **krzywą rentowności instrumentów referencyjnych** (*benchmark yield curve*),

⇒ **krzywą spot** (*spot yield curve*) lub inaczej **krzywą 0-kuponową** (*zero coupon yield curve*).

3.1. Stopa spot i stopa forward

Stopy spot są podstawowymi stopami procentowymi określającymi strukturę terminową. n -letnia **stopa spot** $r(n)$ jest stopą procentową, określającą stopę zwrotu z inwestycji rozpoczętej dzisiaj a zakończonej w roku n . Przy czym nie ma pośrednich płatności w ciągu trwania inwestycji, a zysk i nominal są wypłacane na końcu okresu. Zatem 3-letnia stopa spot jest stopą zwrotu z inwestycji rozpoczętej dzisiaj i trwającej 3 lata.

Stopa spot to stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji 0-kuponowej (ogólniej: dowolnego papieru dyskontowego). Czyli jeśli obligacja ma czas życia n

lat to mamy n -letnią stopę *spot*. W tym przypadku, mamy tylko jeden przepływ gotówkowy – wypłatę przy zapadalności obligacji.

Przykład 3.1 Mamy 2-letnią obligację 0-kuponową. Jej cena P wynosi $P=88,0\%$ wartości nominalnej. Stąd cena dziś jest dyskontowana stopą y

$$88,0 = \frac{100}{(1+y)^2}$$

Zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu y tej obligacji wynosi

$$y = \left(\frac{100}{88}\right)^{1/2} - 1 = 6,60\%$$

Wyznaczona stopa zwrotu w terminie do wykupu y jest 2-letnią stopą *spot* $r(2)$. $\square$

Stopa forward to stopa procentowa implikowana przez stopy *spot* dla przyszłych okresów czasu. Pokażmy, co to znaczy na przykładzie.

Przykład 3.2 Mamy następujące możliwości inwestycyjne

A: inwestycja 100 zł na 6 miesięcy na 10% p.a. daje:

$$FV_A = 100(1 + 0,10 \cdot 6/12) = 105 \text{ zł}$$

B: dwie 3-miesięczne inwestycje następujące po sobie:

1. inwestycja 100 zł na 3 miesiące na 9% p.a. daje:

$$FV_{B_1} = 100(1 + 0,09 \cdot 3/12) = 102,25 \text{ zł}$$

2. reinwestycja 102,25 zł na okres kolejnych 3 miesięcy po stopie f , daje:

$$FV_{B_2} = 102,25(1 + f \cdot 3/12)$$

ale **brak możliwości arbitrażu** powinien implikować równość

$$FV_A = FV_{B_2}$$

czyli

$$105 = 102,25(1 + f \cdot 3/12)$$

stąd $f = 0,1076 = 10,76\%$. $\square$

W przykładzie korzystaliśmy z zależności

$$\left(1 + r_A \times \frac{t_A}{365 \text{ dni}}\right) = \left(1 + r_{B_1} \times \frac{t_{B_1}}{365 \text{ dni}}\right) \times \left(1 + f \times \frac{t_A - t_{B_1}}{365 \text{ dni}}\right)$$

zatem

$$f = \left(\frac{1 + r_A \times \frac{t_A}{365}}{1 + r_{B_1} \times \frac{t_{B_1}}{365}} - 1\right) \times \frac{365}{t_A - t_{B_1}}$$

gdzie:

t_{B_1} oznacza krótszy czas inwestycji,

t_A oznacza dłuższy czas inwestycji.

Obliczenia stóp forward, które są implikowane przez stopy WIBOR na rynku międzybankowym można znaleźć w [arkuszu](#).

Dla inwestycji powyżej roku, dla modelu kapitalizacji złożonej (m okresów na rok), $i < j$ mamy

$$\left(1 + \frac{r(j)}{m}\right)^{j \cdot m} = \left(1 + \frac{r(i)}{m}\right)^{i \cdot m} \left(1 + \frac{f(i, j)}{m}\right)^{(j-i) \cdot m} \quad (3.2)$$

skąd stopa forward

$$f(i, j) = m \left[\frac{(1 + r(j)/m)^{jm}}{(1 + r(i)/m)^{im}} \right]^{\frac{1}{(j-i) \cdot m}} - m \quad (3.3)$$

W szczególności dla $m = 1$ mamy

$$\left(1 + r(j)\right)^j = \left(1 + r(i)\right)^i \left(1 + f(i, j)\right)^{(j-i)} \quad (3.4)$$

zatem stopa forward

$$f(i, j) = \left[\frac{(1 + r(j))^j}{(1 + r(i))^i} \right]^{\frac{1}{j-i}} - 1 \quad (3.5)$$

Patrząc na przedstawioną w przykładzie stopę forward zaczynającą się za 3 miesiące i trwającą 3 miesiące to, uświadamiamy sobie, że tak naprawdę określiliśmy instrument pochodny. Jest to stopa FRA (*Forward Rate Agreement*). W naszym przypadku jest to FRA3×6.

Aby określić transakcję FRA musimy podać:

- stopę forward,
- tzw. datę FRA,
- stawkę referencyjną,
- datę fixingu.

Przykładowo przedmiotem transakcji może być 6M WIBOR za 3 miesiące, czyli FRA3×9 (pierwsza liczba określa początek okresu, a różnica 9-3 przedmiot transakcji: 6M WIBOR).

Nabywca FRA uważa, że za 3 miesiące 6M WIBOR będzie powyżej 10,77%. W dacie fixingu czyli za 3 miesiące nastąpi porównanie rynkowego (ustalanego o 11.00h) 6M WIBORu i stopy 10,77%.

Rynek FRA rozwinął się dzięki FX (*Foreign eXchange*) swapom. Instrumenty te generowały często niezabezpieczoną pozycję.

Przykładowo, bank transakcję 6M zabezpiecza transakcją 3M czyli powstaje niedopasowanie 3×6. Niedopasowanie może być zamknięte kontraktem FRA 3×6.

Prześledźmy działania banku:

kupuje 6M FX swapa (*sell spot, buy 6M forward*),
sprzedaje 3M FX swapa (*buy spot, sell 3M forward*)
i zamyka niedopasowanie sprzedając FRA 3×6 .

Więcej na temat transakcji FRA oraz transakcji swapowych można znaleźć w bardzo ciekawym [artykule](#) na temat transakcji swapowych.

Zobaczmy teraz jak pracuje model kapitalizacji ciągłej na przykładzie 3.2. Mamy

$$100e^{0,10 \cdot 6/12} = 105,13 \text{ zł}$$

Jednak z drugiej strony

$$100e^{0,09 \cdot 3/12} e^{f \cdot 3/12} = 102,28 e^{f \cdot 3/12} = 105,13 \text{ zł}$$

$$e^{f \cdot 3/12} = 1,02791$$

Logarytmując obustronnie uzyskujemy

$$f \cdot 3/12 = \ln(1,02791) \implies f = 0,11011 = 11,01\%$$

Zapiszmy ogólnie zależność na stopę forward dla modelu kapitalizacji ciągłej. Mamy

$$PV \cdot e^{r_1 \cdot t_1} \cdot e^{f \cdot (t_2 - t_1)} = PV e^{r_2 \cdot t_2} \quad (3.6)$$

gdzie:

r_1 - stopa *spot* inwestycji zapadającej w chwili t_1

r_2 - stopa *spot* inwestycji zapadającej w chwili t_2 , gdzie $t_2 > t_1$

f - stopa *forward* dla inwestycji w okresie czasu pomiędzy t_1 a t_2 .

Z zależności (3.6) dostajemy

$$r_1 \cdot t_1 + f \cdot (t_2 - t_1) = r_2 \cdot t_2$$

i ostatecznie

$$f = f(t_1, t_2) = \frac{r_2 \cdot t_2 - r_1 \cdot t_1}{t_2 - t_1} \quad (3.7)$$

3.2. Określanie krzywej 0-kuponowej

Zwykle na rynku nie ma 0-kuponowych papierów dłużnych o zapadalności dłuższej niż 1 rok. Dlatego aby wyznaczyć krzywą spot (krzywą 0-kuponową) stosuje się metodę samouzgodnienia (*bootstrap*).

Ciekawa obligacja

Europejski Bank Inwestycyjny (EIB) jako pierwszy bank zagraniczny wyemitował 23 listopada 2001 roku, obligację 10-letnią notowaną na GPW SA w Warszawie. Co najważniejsze, jest to obligacja 0-kuponowa, z tak długim czasem zapadalności. Nominał obligacji wynosi 10 tys. zł, natomiast zapadalność nastąpi 15 grudnia 2011 roku. Cena emisyjna została ustalona na poziomie 45,87%, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 8,1%. W tym czasie kuponowe obligacje skarbowe o zapadalności 10 lat miały YTM na poziomie 11%. Można się zastanawiać skąd tak duża różnica w dochodowości. Otóż wynika to z ryzyka kredytowego obu emitentów. Rating EIB był na poziomie AAA, natomiast Polski na poziomie BBB (wg agencji Standard&Poor's).

Metodę *bootstrapu* prześledzimy na przykładzie. Załóżmy, że na rynku mamy dostępne bony i obligacje podane w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Bony i obligacje dostępne na rynku.

Lp.	Nominał obligacji [zł]	Data zapadalności [lata]	Kupon roczny [zł]	cena brudna obligacji [zł]
1.	100	0,25	0	97,5
2.	100	0,50	0	94,9
3.	100	1,00	0	90,0
4.	100	1,50	8	96,0
5.	100	2,00	12	101,6
6.	100	2,75	10	99,8

Założmy dodatkowo, że kupony wypłacane są co pół roku, $m = 2$. Bedziemy stosować kapitalizację ciągłą. Pomocnicze obliczenia można znaleźć w arkuszu.

Algorytm wyznaczania krzywej spot:

1. wyznaczamy stopę kwartalną $r(0,25)$ z pierwszego bonu

$$r(0,25) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{0,25} \ln \frac{100}{97,50} = 0,1013 = 10,13\%$$

2. wyznaczamy stopę półroczną $r(0,5)$ z drugiego bonu

$$r(0,5) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{0,5} \ln \frac{100}{94,90} = 0,1047 = 10,47\%$$

3. wyznaczamy stopę roczną $r(1)$ z trzeciego bonu

$$r(1) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{1} \ln \frac{100}{90} = 0,1054 = 10,54\%$$

policzyliśmy stopy spot dla 3 miesięcy, 6 miesięcy, 1 roku. Ale na rynku nie ma już więcej papierów 0-kuponowych, są tylko obligacje kuponowe.

4. obliczamy stopę półtoraroczną $r(1,5)$ analizując 4-tą obligację i dyskontując kupony stopami spot: $r(0,5)$, $r(1)$ oraz nieznana jeszcze w tym momencie $r(1,5)$

$$96 = 4e^{-0,1047 \cdot 0,5} + 4e^{-0,1054 \cdot 1,0} + 104e^{-r(1,5) \cdot 1,5}$$

co oznacza, że

$$e^{-r(1,5) \cdot 1,5} = 0,852 \implies r(1,5) = -\frac{1}{1,5} \ln(0,852) = 0,1068$$

zatem mamy stopę półtoraroczną $r(1,5)=10,68\%$

5. obliczamy teraz stopę dwuletnią $r(2)$, analizując piątą obligację i dyskontując kupony wcześniej wyznaczonymi stopami spot otrzymujemy

$$101,6 = 6e^{-0,1047 \cdot 0,5} + 6e^{-0,1054 \cdot 1,0} + 6e^{-0,1068 \cdot 1,5} + 106e^{-r(2) \cdot 2}$$

czyli

$$e^{-r(2) \cdot 2} = 0,806 \implies r(2) = -\frac{1}{2} \ln(0,806) = 0,1081$$

6. dla ostatniej obligacji mamy następujące wypłaty:

3m: 5 zł

9m: 5 zł

1,25r: 5 zł

1,75r: 5 zł

2,25r: 5 zł

2,75r: 105 zł

pierwszy kupon wiemy jak dyskontować, pozostałe natomiast nie. Znamy jednak stopy spot $r(0,5)$, $r(1,0)$, $r(1,5)$, $r(2,0)$ zatem możemy dokonać interpolacji (np. interpolacji liniowej) i wyznaczyć stopy spot $r(0,75)$, $r(1,25)$, $r(1,75)$:

$$9m: 1/2 \cdot (0,1047 + 0,1054) = 0,1051$$

$$1,25r: 1/2 \cdot (0,1054 + 0,1068) = 0,1061$$

$$1,75r: 1/2 \cdot (0,1068 + 0,1081) = 0,1075$$

Dla ostatniej obligacji mamy 4 nominalne przepływy (do 1,75r włącznie). Wyznaczymy zatem ich wartość dzisiejszą

$$5e^{-0,1013 \cdot 0,25} + 5e^{-0,1051 \cdot 0,75} + 5e^{-0,1061 \cdot 1,25} + 5e^{-0,1075 \cdot 1,75} = 18,02 \text{ zł}$$

Wartość dzisiejsza 2 ostatnich przepływów wynosi zatem

$$99,80 - 18,02 = 81,78$$

Znamy stopę spot $r(2)$; przypuśćmy, że dla zapadalności 2,75r stopa spot wynosi $r(2,75)$, zatem interpolacja liniowa stopy spot $r(2,25)$ będzie wynosić:

$$\frac{2}{3} \cdot r(2) + \frac{1}{3} \cdot r(2,75) = \frac{2}{3} \cdot 0,1081 + \frac{r(2,75)}{3} = 0,0721 + \frac{r(2,75)}{3}$$

czyli wiemy jak będziemy dyskontować przepływ za 2 lata i 3 miesiące oraz za 2 lata i 9 miesięcy. Zatem wartość obecna pozostałych dwóch przepływów wynosi

$$5e^{-(0,0721+r(2,75)/3)\cdot 2,25} + 105e^{-r(2,75)\cdot 2,75} = 81,78$$

stąd stopa spot za 2 lata i 9 miesięcy wynosi $r(2,75) = 0,1087$. Możemy teraz powrócić do wyznaczenia stopy spot za 2 lata i 3 miesiące:

$$r(2,25) = 0,0721 + \frac{r(2,75)}{3} = 10,83\%$$

Obserwacja i analiza kwotowanych obligacji kuponowych powoduje, że możemy metodą bootstrapu wyznaczyć krzywą *spot*. Krzywa *spot* jest ważnym narzędziem do zarządzania ryzykiem stopy procentowej.

3.3. Teorie struktury terminowej stopy procentowej

Aby pokazać jak pewne teorie tłumaczą kształt krzywej dochodowości, musimy sobie najpierw odpowiedzieć na kilka zagadnień związanych z ryzykiem stopy procentowej. We współczesnych finansach ryzyko jest podstawowym pojęciem. Aby mówić o ryzyku musimy podać jego definicję, dokonać jego klasyfikacji czy identyfikacji oraz podać cechy charakterystyczne.

Najogólniej ryzyko można podzielić na 2 rodzaje:

- systematyczne (rynkowe) – wynik działania sił zewnętrznych,
- niesystematyczne – specyficzne dla danego podmiotu.

Ten podział sugeruje, że ryzyko stopy procentowej jest ryzykiem systematycznym.

Bardziej dokładną klasyfikację ryzyka możemy podać za Bankiem Międzynarodowych Rozliczeń z siedzibą w Bazylei (Bank of International Settlement BIS, www.bis.org):

1. ryzyko kredytowe – niebezpieczeństwo niewywiązania się partnera transakcji z jego zobowiązań,
2. ryzyko rynkowe – możliwość zmiany warunków finansowych w wyniku zmian cen rynkowych np. stopy procentowej, kursu walutowego, etc.,
3. ryzyko płynności
 - związane z konkretnym instrumentem finansowym lub rynkiem,
 - związane z wypłacalnością danej instytucji,
4. ryzyko operacyjne – zagrożenie nieosiągnięcia zamierzonych celów — błędy pracowników, systemu informacyjnego, etc.,
5. ryzyko prawne – ryzyko straty z powodu nieprzeprowadzenia transakcji — przepisy prawne, niewystarczające dokumenty, etc.

Możemy zauważyć, że ta klasyfikacja nie jest w pełni rozłączna.

Odpowiedzmy sobie teraz na pytanie, jakie czynniki wpływają na nominalną stopę procentową r , czyli złótówki w ujęciu bieżącym. Dokonajmy zatem identyfikacji ryzyka stopy procentowej:

1. realna stopa procentowa r_r (*real interest rate*)
cena pieniądza w warunkach równowagi między podażą (kredytodawcami) a popytem (kredytobiorcami); oddaje istotę wartości pieniądza w czasie; jest rekompensatą za odsunięcie konsumpcji w czasie; przedstawia złotówki w ujęciu stałym,
2. stopa inflacji r_i (*inflation rate*)
inflacja implikuje wzrost cen, r_i jest rekompensatą za odłożenie konsumpcji w czasie,
3. premia za ryzyko r_{rp} (*risk premium*)
przyszła wypłata jest tylko obietnicą, stąd ryzyko jej niedotrzymania,
4. premia płynności r_{lp} (*liquidity premium*)
preferujemy instrumenty o krótszym terminie zapadalności.

Sumując te czynniki i biorąc kapitalizację roczną otrzymamy:

$$1 + r = (1 + r_r)(1 + r_i)(1 + r_{rp})(1 + r_{lp}) \quad (3.8)$$

Mnożąc prawą stronę i odrzucając wyrazy wyższego rzędu oraz upraszczając 1, otrzymujemy

$$r = r_r + r_i + r_{rp} + r_{lp} \quad (3.9)$$

Oczywiście pamiętamy, że nominalna stopa procentowa r zależy od czasu $r = r(T)$.

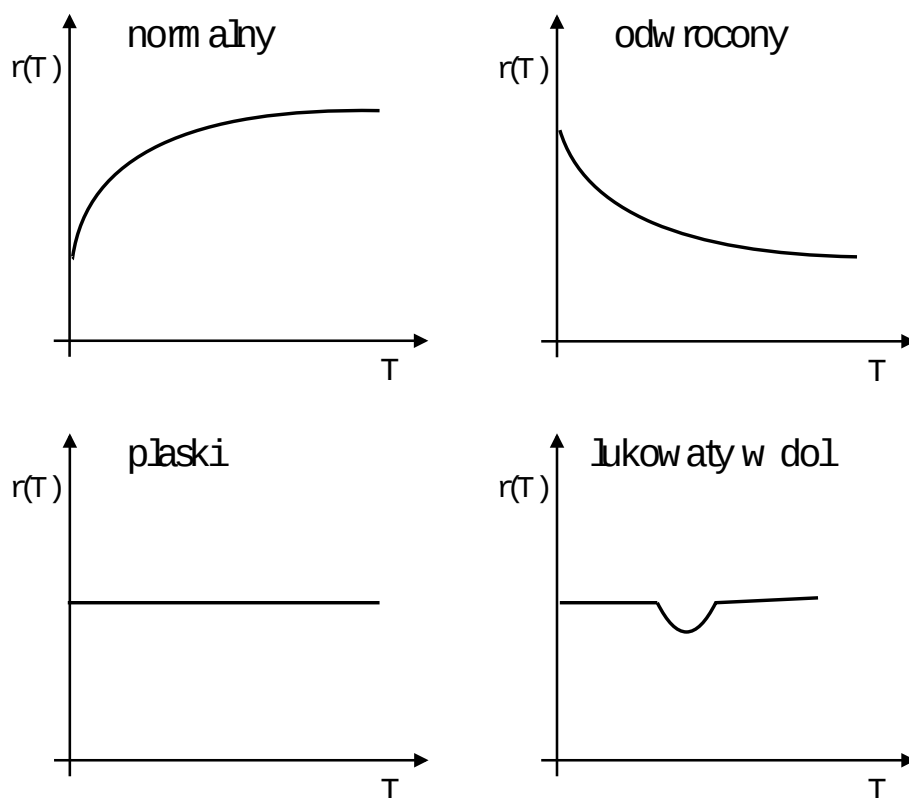
W finansach wyróżniamy kilka podstawowych kształtów krzywej dochodowości:

- normalny ($T \nearrow \implies r(T) \nearrow$),
- odwrócony ($T \nearrow \implies r(T) \searrow$),
- płaski (dla dowolnego T , $r(T) = \text{const}$),
- łukowaty w górę lub w dół.

Oczywiście, na rynku można spotkać również inne kształty, jednak te wymienione powyżej są najbardziej znane.

Istnieją trzy podstawowe teorie tłumaczące kształt struktury czasowej stóp procentowych.

1. teoria oczekiwań (*expectations theory*)
mówi o przewidywaniach inwestorów co do przyszłych stóp procentowych; stopy forward odzwierciedlają oczekiwany poziom stóp; mamy też oczekiwania co do stopy inflacji,
2. teoria preferencji płynności (*liquidity preference theory*)
wiemy, że kredytodawcy wolą krótki termin, natomiast kredytobiorcy wolą dłuższy termin; stąd papier o dłuższym terminie zapadalności powinien mieć wyższą stopę dochodu niż papier o krótkim terminie
3. teoria segmentacji rynku (*market segmentation theory*)
rynek podzielony jest na segmenty – papiery o tym samym terminie wykupu; segmenty nie zależą od siebie; stopy dochodu w segmencie kształtowane są tylko i wyłącznie przez podaż i popyt;



Rysunek 3.1. Typowe kształty krzywej dochodowości.

przykładowo: banki preferują *krótki koniec* krzywej dochodowości, fundusze emerytalne, natomiast *długi koniec* krzywej dochodowości.

Na kształt krzywej mają wpływ też czynniki makroekonomiczne. Przykładowo, na wzrost stóp rynkowych mają wpływ:

- spadek podaży pieniądza,
- wzrost cen hurtowych PPI i detalicznych CPI,
- wzrost indeksu zamówień na dobra trwałego użytku,
- wzrost aktywności sektora budowlanego,
- wzrost głównych wskaźników gospodarczych (np. PKB, produkcji przemysłowej),
- wzrost dochodów osobistych,
- wzrost cen ropy,
- spadek bezrobocia.

3.4. Zadania

Zadanie 3.1. Jeśli roczna stopa spot $r(1)=5,85\%$, a dwuletnia stopa spot $r(2)=6,12\%$, to ile wynosi stopa forward $f(1, 2)$?

Zadanie 3.2. Dane są następujące stopy spot $r(1)=5,37\%$, $r(2)=5,52\%$, $r(3)=5,66\%$, $r(4)=5,85\%$. Wyznacz krzywą spot.

Zadanie 3.3. Wyznacz stopy spot oraz odpowiadające roczne stopy forward jeśli na rynku są kwotowane następujące obligacje:

obligacja	zapadalność	kupon	cena
A	1	—	92,82
B	2	—	89,65
C	3	—	87,47
D	4	—	84,11

Narysuj krzywą spot i roczną krzywą forward.

Zadanie 3.4. Wyznacz stopę spot $r(T)$ oraz stopę forward $f(T, T + 1/2)$ dla $T = 1/2$, $T = 1$, $T = 3/2$, jeśli na rynku są dostępne następujące obligacje:

obligacja	zapadalność	kupon	cena
A	1/2	—	95,40
B	1	—	90,00
C	3/2	5	98,27
D	2	6	99,21

Rozdział 4

Ryzyko stopy procentowej

4.1. Ryzyko inwestowania w obligacje

Mój klient nie był zadowolony ze straty, ale była to tak samo jego wina, jak i moja. Prawo rynku obligacji brzmi *caveat emptor*, czyli "nabywco, strzeż się sam". Kiedyś usłyszałem też zdanie *meum dictum pactum*, ale to był tylko żart. Oznaczało ono: "moje słowo jest moim zobowiązaniem". To znaczy, że nie musiał mi wierzyć, gdy mówiłem mu, że zakup obligacji AT&T to dobry pomysł.

Michael Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa, 1993.

Tak jak każda inwestycja na rynku finansowym, również inwestycja w obligacje jest obciążona ryzykiem. Można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje ryzyka związane z inwestowaniem w obligacje:

1. ryzyko niedotrzymania warunków (*default risk*) przez emitenta obligacji,
2. ryzyko zmiany ceny (*risk price*) zwane inaczej ryzykiem okresu posiadania (*holding period risk*),
3. ryzyko reinwestowania (*reinvestment risk*).

Ryzyko niedotrzymania warunków występuje wtedy, gdy emitent obligacji nie wypłaca odsetek lub nie wykupuje obligacji w terminie. Ryzyko to występuje przy obligacjach emitowanych przez każdego z uczestników rynku kapitałowego. Ryzyko niedotrzymania warunków przez emitenta jest wyceniane przez agencje ratingowe, takie jak: Standard&Poor's, Moody's czy Fitch (tab. 4.1). Emitenci o najwyższym ratingu pożyczają pieniądze taniej na rynku niż emitenci o niższych ratingach.

Ryzyko zmiany ceny występuje gdy obligatariusz zamierza sprzedać obligację przed terminem wykupu. Zmiany na rynku stóp zwrotu w terminie do wykupu *YTM* powodują zmiany wartości obligacji.

W analizowanych przykładach założymy, że:

- nie ma kosztów transakcji,
- aktywa są doskonale podzielne.

Rozważmy inwestycje w obligacje 0-kuponowe polegające na ich sprzedaży przed ich zapadalnością. W takiej sytuacji stopa zwrotu z naszej inwestycji będzie zależała od stóp rynkowych w chwili zamykania pozycji.

Tabela 4.1. Klasyfikacja ratingów.

	Moody's	Standard & Poor's
wysoka wycena	Aaa Aa	AAA AA
średnia wycena	A Baa	A BBB
wycena spekulacyjna	Ba B	BB B
ryzyko niewypłacalności	Caa Ca C	CCC CC C D

Przykład 4.1 Kupujemy 26-tygodniowy bon skarbowy na przetargu o wartości nominalnej 100 zł za 96 zł, co implikuje półroczną stopę spot $r(0,5)$ (i tym samym YTM tego bonu) na poziomie 8,33%. Gdybyśmy trzymali bon skarbowy do wykupu, to zrealizowana stopa zwrotu wynosiłaby właśnie 8,33%.

Załóżmy jednak, że musimy sprzedać ten bon na 13 tygodni przed wykupem (0,25 roku). Rozważmy dwa scenariusze (zakładamy dla uproszczenia, że mamy płaską krzywą spot):

- rynkowe stopy (w szczególności interesująca nas stopa 3-miesięczna) spadają o 200 punktów bazowych i teraz $r(0,25) = 6,33\%$,
- rynkowe stopy rosną o 200 punktów bazowych, czyli $r(0,25) = 10,33\%$.

W pierwszym przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0,0633 \cdot 0,25} = 98,44 \text{ zł.}$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu z inwestycji w bon wynosi 10,15%.

W drugim przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0,1033 \cdot 0,25} = 97,48 \text{ zł.}$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu wynosi 6,17%. □

Przykład pokazuje, że sprzedaż bonu skarbowego przed terminem wykupu, może powodować, że zrealizowana stopa zwrotu może być inna niż stopa rynkowa, przy której dokonano inwestycji. Zabezpieczenie stopy zwrotu daje przetrzymanie bonu do terminu wykupu.

Ryzyko reinwestowania kuponów występuje gdy inwestujemy otrzymane odsetki od obligacji po stopie innej niż stopa YTM na początku inwestycji.

Przykład 4.2 Rozważmy 3-letnią obligację o stałych kuponach, cenie nominalnej $F = 100$ zł, oprocentowaną w wysokości $c = 6\%$ p.a., odsetkach wypłacanych raz do

roku, $m = 1$. Cena obligacji $P = 97,38$ zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 7\%$. Załóżmy, że inwestujemy w taką właśnie obligację.

Jeśli stopa rynkowa się nie zmieni, czyli reinwestujemy odsetki po stopie 7% , to po 3 latach mamy wartość naszej inwestycji

$$V_3 = 6 \cdot (1,07)^2 + 6 \cdot 1,07 + 106 = 119,29 \text{ zł}$$

Rozważmy teraz 2 alternatywne scenariusze:

1. po roku stopa spada o 200 pb do 5% , a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9% .

Spadek stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 101,86$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/101,86 = 0,059$ obligacji, czyli mamy teraz 1,059 obligacji.

Po kolejnym roku wzrost stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 97,25$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1,059 = 6,354$ zł możemy teraz kupić $6,354/97,25 = 0,065$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,124 obligacji.

Po 3 roku mamy więc wypłatę $1,124 \cdot 106 = 119,14$ zł i to jest wartość naszej inwestycji.

2. po roku stopa rośnie o 200 pb do 9% , a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5% .

Wzrost stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 94,72$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/94,72 = 0,063$ obligacji, czyli mamy teraz 1,063 obligacji.

Po kolejnym roku spadek stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 100,95$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1,063 = 6,378$ zł możemy kupić $6,378/100,95 = 0,063$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji.

Po 3 roku wartość naszej inwestycji wynosi $1,128 \cdot 106 = 119,57$ zł.

□

Widzimy, na tym przykładzie, że w drugim scenariuszu mamy największą wartość naszej inwestycji w obligację. Wzrost rynkowej stopy procentowej po roku, spowodował spadek cen obligacji i umożliwił kupno większej liczby tych obligacji za wypłacone kupony.

Przeanalizujmy jeszcze jeden przykład, w którym inwestujemy w obligację z kuponami, którą sprzedamy przed terminem wykupu.

Przykład 4.3 Rozważmy teraz 5-letnią obligację o stałych kuponach, cenie nominalnej $F = 100$ zł, oprocentowaną w wysokości $c = 6\%$ p.a., odsetkach wypłacanych raz do roku, $m = 1$. Cena obligacji $P = 95,90$ zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 7\%$. Załóżmy, że inwestujemy w taką obligację.

Jeśli stopa rynkowa się nie zmienia, czyli reinwestujemy kupony po stopie 7%, to po 3 latach wartość inwestycji w obligację wyniesie

$$V_3 = 6 \cdot (1,07)^2 + 6 \cdot 1,07 + 6 + \frac{6}{1 + 0,07} + \frac{106}{(1 + 0,07)^2} = 117,48 \text{ zł}$$

Rozważmy teraz 2 scenariusze:

1. po roku stopa spada o 200 pb do 5%, a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9% i pozostaje na tym poziomie do końca inwestycji.

Spadek stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 103,55$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/103,55 = 0,058$ obligacji, czyli mamy teraz 1,058 obligacji.

Po kolejnym roku wzrost stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 92,41$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1,058 = 6,348$ zł możemy teraz kupić $6,348/92,41 = 0,069$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,127 obligacji.

Po 3 roku mamy wypłatę odsetek w wysokości $1,127 \cdot 6 = 6,76$ zł. Teraz również sprzedajemy obligację. W tym momencie, do zapadalności pozostało 2 lata, YTM wynosi 9%, zatem cena takiej obligacji $P_3 = 94,72$ zł. Mamy 1,127 obligacji, zatem wartość inwestycji wynosi 106,72 zł.

Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi

$$V_3 = 6,76 + 106,72 = 113,48 \text{ zł}.$$

2. po roku stopa rośnie o 200 pb do 9%, a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5% i pozostaje na tym poziomie do końca inwestycji.

Wzrost stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 90,28$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/90,28 = 0,066$ obligacji, czyli mamy teraz 1,066 obligacji.

Po kolejnym roku spadek stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi teraz $P_2 = 102,72$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1,066 = 6,396$ zł możemy teraz kupić $6,396/102,72 = 0,062$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji.

Po 3 roku mamy wypłatę odsetek w wysokości $1,128 \cdot 6 = 6,77$ zł. Teraz również sprzedajemy obligację. W tym momencie, do zapadalności pozostało 2 lata, YTM wynosi 5%, zatem cena takiej obligacji $P_3 = 101,86$ zł. Mamy 1,128 obligacji, zatem wartość inwestycji wynosi 114,97 zł.

Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi

$$V_3 = 6,77 + 114,97 = 121,746 \text{ zł}.$$

□

Również i w tym przypadku, gdy rozważamy obligacje z kuponami o dłuższym okresie zapadalności, wartość inwestycji zależy istotnie od scenariusza jaki nakreśli rynek stóp procentowych, jak i od faktu, że czas pozostający do zapadalności obligacji zmienia się.

W takiej sytuacji bardzo ważnym staje się problem ryzyka stopy procentowej, a w konsekwencji problem zarządzania portfelem obligacji. W następnym rozdziale omówimy niektóre z metod zarządzania portfelem obligacji, a później dokonamy pewnej systematyki.

Zacznijmy omawianie strategii inwestowania w portfel obligacji od strategii strukturalnych, wśród których najbardziej popularną jest immunizacja (uodpornienie) portfela (*portfolio immunization*). Jednak aby móc przedstawić ten problem musimy wprowadzić pojęcie duration obligacji.

4.2. Duration obligacji

Pokazaliśmy wcześniej, że obligacje o długim okresie zapadalności mają bardziej stromą krzywą $YTM-P$ niż obligacje o krótkim okresie. Zatem te pierwsze są bardziej wrażliwe na zmiany rynkowych stóp procentowych niż te drugie. Ale okres zapadalności nie jest najlepszą miarą wrażliwości obligacji. Lepszą miarą wrażliwości na zmianę stopy procentowej jest **duration** obligacji. Ogólnie, duration instrumentu o stałym dochodzie jest średnią ważoną chwil czasowych, w których dokonywane są płatności gotówkowe. Wagami są wartości dzisiejsze poszczególnych przepływów gotówkowych.

Możemy naszą intuicyjną definicję zapisać bardziej formalnie. Przypuśćmy, że przepływy gotówkowe otrzymywane są w chwilach $t_1, t_2, \dots, t_n$. Wtedy duration takiego strumienia płatności dane jest następująco

$$D = \frac{PV(t_1) \cdot t_1 + PV(t_2) \cdot t_2 + \dots + PV(t_n) \cdot t_n}{PV} \quad (4.1)$$

gdzie:

$PV(t_i)$ oznacza wartość dzisiejszą płatności, która występuje w chwili t_i , natomiast PV wartość dzisiejszą strumienia płatności, czyli w naszym wypadku cenę obligacji.

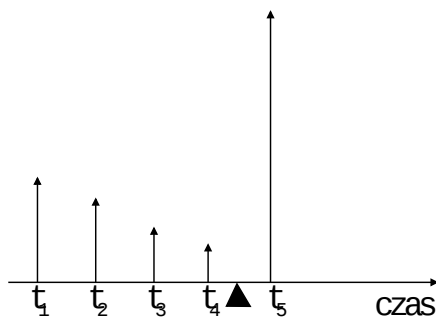
W tym momencie nie precyzujemy w jaki sposób są dyskontowane przyszłe płatności. Za chwilę, będziemy dyskontować te przepływy stopą YTM (duration Macaulay'a), a w dalszej części wykładu pokażemy dyskontowanie takich przepływów stopą *spot* (duration Fishera-Weila).

Przy tak wprowadzonej definicji, duration jest średnią ważoną chwil, w których występują przepływy gotówkowe. Dla obligacji będzie spełniona zależność $t_1 \leq D \leq t_n$. Zatem duration jest czasem pomiędzy pierwszą i ostatnią płatnością.

Widać od razu, że duration obligacji 0-kuponowej jest równe okresowi zapadalności tej obligacji. Natomiast obligacja kuponowa ma duration mniejsze niż czas zapadalności. Zatem duration może być postrzegane jako uogólniona miara zapadalności obligacji.

4.2.1. Duration obligacji w modelu kapitalizacji ciągłej

Wprowadźmy pojęcie duration najpierw dla modelu kapitalizacji ciągłej. W tym modelu wypłacane kupony są dyskontowane stopą zwrotu w terminie do wykupu



Rysunek 4.1. Interpretacja geometryczna duration.

YTM i wtedy cena obligacji wynosi

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-y \cdot t_i} \quad (4.2)$$

gdzie $y = YTM$.

Definiujemy *duration* następująco

$$D := \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i \cdot e^{-y \cdot t_i} \quad (4.3)$$

Zapiszmy wprowadzoną definicję inaczej

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \frac{C_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}{P} \quad (4.4)$$

czyli

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \cdot w_i \quad (4.5)$$

gdzie współczynnik

$$w_i = \frac{C_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}{P} \quad 1 \leq i \leq n$$

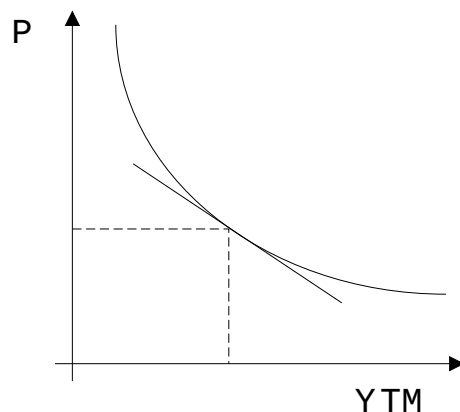
jest wagą, bo $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Zatem duration pokazuje średni ważony czas do terminu wykupu obligacji, jak pokazaliśmy na rys. 4.1.

Na wstępie wspomnieliśmy, że duration ma związek z wrażliwością ceny obligacji na zmianę stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji. Wiemy, że cena obligacji P jest funkcją trzech parametrów $P = f(y, T, c_i)$.

Policzmy pochodną ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i \cdot e^{-y \cdot t_i} \quad (4.6)$$



Rysunek 4.2. Lokalna aproksymacja zależności ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.

Porównując obliczoną zależność z wyrażeniem na duration obligacji (4.3) otrzymujemy związek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -D \cdot P \quad (4.7)$$

Dla małych zmian ceny P oraz stopy zwrotu w terminie do wykupu $y = YTM$ mamy

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} = -D \cdot P \quad (4.8)$$

czyli

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \cdot \Delta y \quad (4.9)$$

lub

$$\Delta P = -D \cdot P \cdot \Delta y \quad (4.10)$$

Czyli zmiana ceny obligacji wyraża się wartością duration tej obligacji. Zobaczmy jak pracuje ta zależność na przykładzie.

Przykład 4.4 Załóżmy, że mamy obligację o następujących parametrach: czas zapadalności $T=3$ lata, oprocentowanie obligacji $c = 10\%$ p.a., kupony są wypłacane dwa razy w roku, $m=2$. Niech cena tej obligacji wynosi $P = 94,21$, zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu wynosi $y=12\%$. Duration takiej obligacji wynosi zatem $D=2,65$ lata.

Podstawiając nasze obliczenia do zależności (4.10), mamy

$$\Delta P = -2,65 \cdot 94,21 \cdot \Delta y$$

czyli

$$\Delta P = -249,95 \cdot \Delta y \quad (4.11)$$

Jeśli teraz rośnie stopa zwrotu w terminie do wykupu o 10 punktów bazowych, czyli przyrost $\Delta y = 0,001$, zatem w myśl zależności (4.11) zmiana ceny obligacji wyniesie $\Delta P = -0,25$. Jeśli nowa stopa zwrotu w terminie do wykupu wynosi $y = 0,121$ (12,1%), to cena obligacji wynosi

$$P = 94,21 - 0,25 = 93,96.$$

Sprawdźmy czy rzeczywiście zależność (4.11) dobrze oddaje zmianę ceny. Podstawiając nową wartość y do wzoru na wycenę obligacji dostaniemy dokładnie to samo. Możemy to sprawdzić, dokonując obliczeń w [arkuszu](#).

Zależność (4.11) pracuje równie dobrze, gdy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spada o małą wartość. Załóżmy teraz, że y spada o 10 punktów bazowych, czyli $\Delta y = -0,001$, zatem nowe $y = 0,119$ (11,9%). Stąd $\Delta P = 0,25$ czyli cena obligacji wynosi

$$P = 94,21 + 0,25 = 94,46$$

Zależność (4.11) nie pracuje dobrze dla dużych zmian Δy . Przykładowo, gdy stopa rośnie o 200 punktów bazowych, czyli $\Delta y = 0,02$, nowe $y = 0,14$ (14%), a stąd $\Delta P = -5,00$. Czyli nowa cena obligacji

$$P = 94,21 - 5 = 89,21$$

Poprawana cena obligacji to $P = 89,35$. Podobnie gdy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spada o 200 punktów bazowych. Wtedy $\Delta y = -0,02$, $y = 0,10$ (10%), $\Delta P = 5,00$ czyli nowa cena obligacji

$$P = 94,21 + 5 = 99,21$$

Jednak poprawna cena - wyliczona z formuły zdyskontowanych przepływów gotówkowych - to $P=99,36$. □

Pokazaliśmy w przykładzie, że dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu y , zależność (4.10) dobrze opisuje zmiany ceny obligacji. Natomiast dla dużych zmian ta zależność nie pracuje tak dobrze. Duration zatem aproksymuje krzywą $YTM-P$ tylko lokalnie - w małym otoczeniu y . Ponieważ nachylenie stycznej do krzywej $YTM-P$ jest dane zależnością $-D \cdot P$, bo mamy równanie

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -D \cdot P \tag{4.12}$$

4.2.2. Duration obligacji w modelu kapitalizacji dyskretnej

Dla modelu dyskretnego mamy wzór na cenę obligacji

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C/m}{(1 + y/m)^i} + \frac{F}{(1 + y/m)^n} \tag{4.13}$$

Obliczmy pochodną funkcji ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-1/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \frac{-2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^3} + \dots \\ &\quad + \frac{-n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^{n+1}} + \frac{-n/m \cdot F}{(1+y/m)^{n+1}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

wyłączymy czynnik $-\frac{1}{1+y/m}$ przed nawias i dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{1+y/m} \left(\frac{1/m \cdot C/m}{1+y/m} + \frac{2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n/m \cdot F}{(1+y/m)^n} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Teraz podzielmy obie strony równania (4.15) przez cenę P

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{P} &= -\frac{1}{1+y/m} \left(\frac{1/m \cdot C/m}{1+y/m} + \frac{2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n/m \cdot F}{(1+y/m)^n} \right) \frac{1}{P} \end{aligned} \quad (4.16)$$

i mamy definicję duration obligacji

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^n \frac{i/m \cdot C/m}{(1+y/m)^i} \frac{1}{P} + \frac{n \cdot F}{(1+y/m)^n} \frac{1}{P} \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1 \cdot C/m}{1+y/m} + \dots + \frac{n \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n \cdot F}{(1+y/m)^n} \right) \frac{1}{P} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tak sformułowana definicja duration obligacji została podana przez Fredericka Macaulay'a w raporcie dla National Bureau of Economic Research w 1938 roku. Stąd czas trwania obligacji nazywamy duration Macaulay'a. Tak zdefiniowane duration wyrażone jest w latach. Gdy nie ma czynnika $\frac{1}{m}$ to mamy duration w okresach odsetkowych.

Wykorzystując definicję duration (4.17) dla modelu dyskretnego oraz zależność (4.16) mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y/m} D \quad (4.18)$$

czyli uzyskaliśmy prawie takie samo wyrażenie jak dla kapitalizacji ciągłej.

Aby mieć zgodność formuł dla modelu kapitalizacji ciągłej i dyskretniej musimy definicję (4.17) trochę poprawić.

Wprowadźmy pojęcie zmodyfikowanego *duration* D_M (możemy spotkać też oznaczenia: MD lub D^*)

$$D_M = \frac{1}{1+y/m} D \quad (4.19)$$

i wtedy

$$\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{P} = -D_M \quad (4.20)$$

Charakter zależności (4.20) jest dokładnie taki sam jak wyrażenie (4.7) dla modelu ciągłego. Przykładowe obliczenia duration oraz zmodyfikowanego duration dla modelu dyskretnego można znaleźć w [arkuszu](#).

Duration można też liczyć korzystając ze wzoru na rentę okresową. Mielimy zależność

$$\begin{aligned} &\text{wartość dzisiejsza strumienia płatności} \\ &= \\ &\text{wartość dzisiejsza renty okresowej} \\ &+ \\ &\text{wartość dzisiejsza nominalu} \end{aligned}$$

gdzie: wartość dzisiejsza renty okresowej =

$$PA(y, n) = \frac{C}{y} \left(1 - \frac{1}{(1 + y/m)^n} \right) \quad (4.21)$$

$$\text{wartość dzisiejsza nominalu} = \frac{F}{(1 + y/m)^n} \quad (4.22)$$

różniczkując względem y pierwszy i drugi wyraz, sumując wyrazy i dzieląc przez cenę obligacji P , otrzymujemy

$$D = \frac{m + y}{my} - \frac{m + y + n(c - y)}{mc[(1 + y/m)^n - 1] + my} \quad (4.23)$$

Ćwiczenie

Wyznaczyć zależność (4.23).

Przykład 4.5 Rozważmy 30-letnią 0-kuponową obligację. Przypuśćmy, że stopa zwrotu w terminie do wykupu $y = 10\%$ p.a. Zatem duration tej obligacji wynosi $D=30$, a zmodyfikowane duration $D_M = 1/(1 + 0,1)D = 27,3$. Załóżmy teraz, że stopa zwrotu wzrasta o 100 punktów bazowych (pb), czyli o 1%. Zatem względna cena zmieni się o 27,3%. Długoterminowe 0-kuponowe papiery dłużne mają bardzo wysokie ryzyko stopy procentowej. $\square$

Własności duration

Weźmy model ciągły wyceny obligacji z duration D , a dla modelu dyskretnego mamy zmodyfikowane duration D_M . Zachodzą następujące zależności:

1. przy danym okresie do wykupu T i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , im niższe oprocentowanie obligacji c tym większe duration D (zmodyfikowane duration D_M),

2. przy danym oprocentowaniu obligacji c i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , im dłuższy okres do wykupu T tym większe duration D (D_M),
3. przy danym oprocentowaniu obligacji c i danym okresie do wykupu T , im niższa stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM tym większe duration D (D_M),

Ćwiczenie

Uzasadnić powyższe własności duration.

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że obligacja kuponowa o nieskończonym czasie życia ma duration też nieskończoną. Okazuje się jednak, że to nie jest prawdą. Duration obligacji stabilizuje się na pewnej skończonej wartości. Przykładowe obliczenia zamieszczone są w [arkuszu](#).

Duration jest wielkością, która jest powszechnie używana przez inwestorów do zarządzania portfelem obligacji. O tym w jaki sposób można wykorzystać duration do zarządzania portfelem obligacji pokażemy dalej.

Duration portfela obligacji

Załóżmy, że mamy n obligacji w portfelu o tej samej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , przy czym waga każdej z nich wynosi w_i , gdzie $1 \leq i \leq n$. Wtedy duration portfela obligacji wyraża się zależnością

$$D = \sum_{i=1}^n w_i \cdot D_i \quad (4.24)$$

4.3. Immunizacja portfela obligacji

W praktyce bardzo często zdarza się, że instytucja finansowa czy też inwestor chce uzyskać na koniec okresu inwestowania określoną wartość portfela. Naturalną strategią byłoby zainwestowanie w obligacje, których zapadalność jest taka sama jak długość okresu inwestowania i dodatkowo wartość takiego portfela obligacji jest taka sama jak wartość dzisiejsza pożądanej wartości końcowej inwestycji. Jednak taka sytuacja nie występuje często w rzeczywistości, bo takie obligacje mogą być niedostępne na rynku.

Można zainwestować w obligacje o krótszym terminie zapadalności niż czas inwestowania, ale ponowna inwestycja w te same obligacje naraża nas na ryzyko reinwestowania.

Można również zainwestować w obligacje o dłuższym terminie zapadalności niż czas inwestowania i sprzedać te obligacje przed terminem wykupu. Wtedy jednak występuje ryzyko zmiany ceny, a ponadto ryzyko reinwestowania odsetek.

W celu osiągnięcia pożądanej wartości portfela, a jednocześnie zabezpieczenia się przed ryzykiem reinwestowania oraz ryzykiem zmiany ceny stosuje się strategię immunizacji portfela. Polega ona na utworzeniu portfela, którego duration równe jest okresowi inwestowania i którego wartość jest równa wartości dzisiejszej oczekiwanej wartości końcowej portfela.

Tą strategię pokażemy na przykładach. Zaczniemy od sytuacji, gdy w portfelu mamy tylko jedną obligację o zadanym duration.

Przykład 4.6 Załóżmy, że chcemy mieć po 4 latach 157,3 tys. zł na kupno mieszkania. Na rynku dostępna jest 5-letnia obligacja o stałym oprocentowaniu w wysokości 12% p.a., przy czym kupony są wypłacane raz do roku, $m = 1$. Nominał tej obligacji wynosi $F = 100$ zł. Kwotowanie obligacji wynosi 93,13 zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 14,0\%$. Co więcej, duration tej obligacji $D = 4$ lata. Do obliczeń, zastosowaliśmy model kapitalizacji dyskretnej. Zatem kupujemy 1000 obligacji, by po 4 latach uzyskać 157,3 tys. zł.

Pokażemy, że bez względu na to jak zmienia się rynkowe stopy procentowe w ciągu 4 lat, to wartość naszej inwestycji będzie na żądanym poziomie. Załóżmy, że stopy zmieniają się po kilku dniach od naszej inwestycji i pozostają na tym poziomie do końca trwania naszej inwestycji.

Wartość naszej inwestycji po 3,5 roku, 4 latach i po 4,5 roku podajemy w tabeli 4.2 przy różnych stopach zwrotu w terminie do wykupu YTM .

Tabela 4.2. Wartości inwestycji w obligację przy różnych scenariuszach rynkowych stóp procentowych w tys. zł.

stopa YTM	Wartość inwestycji		
	$V_{3,5}$	V_4	$V_{4,5}$
10%	150,18	157,51	165,20
12%	148,68	157,35	166,53
14%	147,32	157,30	167,95
16%	146,10	157,35	169,47
18%	144,99	157,50	171,09

Wartość inwestycji, jaką chcemy uzyskać po 4 latach, jest dobrze zabezpieczona przed zmianą stopy procentowej. Natomiast brak takiego zabezpieczenia występuje dla innych chwil. $\square$

W przykładzie założyliśmy, że stopa spada lub rośnie i pozostaje na tym poziomie przez cały czas.

Rozważmy teraz sytuację, w której zabezpieczamy wysokość naszego zobowiązania portfelem obligacji.

Przykład 4.7 Załóżmy, że przedsiębiorstwo ma do uregulowania zobowiązanie za 10 lat w wysokości 1 mln zł. Kupno 10-letniej obligacji 0-kuponowej rozwiązałoby problem, jednak na rynku nie ma takich obligacji. Dostępne są tylko 3 obligacje, wypłacające kupony 2 razy do roku, $m = 2$, o parametrach podanych w tabeli 4.3.

Warto podkreślić, że wszystkie obligacje mają taką samą stopę zwrotu w terminie do wykupu $YTM = 9\%$. Zatem nie będzie trudności w wyznaczeniu wartości dzisiejszej 1 mln zł za 10 lat. Wartość dzisiejsza 1 mln zł za 10 lat to

$$\frac{1}{(1 + \frac{0,09}{2})^{20}} = 414,643 \text{ tys. zł}$$

Tabela 4.3. Parametry obligacji dostępnych na rynku.

obligacja	oprocentowanie	zapadalność	cena	YTM
1	6%	30 lat	69,04	9,0%
2	11%	10 lat	113,01	9,0%
3	9%	20 lat	100,00	9,0%

Dodatkowo, policzmy duration każdej z obligacji. Okazuje się, że $D_1 = 11,44$ lat, $D_2 = 6,54$ lat, $D_3 = 9,61$ lat. Zatem portfel obligacji nie może być utworzony z obligacji drugiej i trzeciej bo ich duration jest krótsze niż 10 lat.

Założmy, że konstruujemy portfel składający się z obligacji pierwszej i drugiej. Immunizowany portfel powinien spełniać warunki

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 &= 1 \\w_1 D_1 + w_2 D_2 &= 10\end{aligned}$$

gdzie: w_i waga i -tej obligacji, D_i duration i -tej obligacji, $i = 1, 2$. Pierwszy warunek mówi o tym, że nasze aktywa są lokowane w dwie obligacje, natomiast drugi określa duration portfela.

Rozwiązując ten układ równań uzyskujemy wagi $w_1 = 0,706$ oraz $w_2 = 0,294$. Zatem w pierwszej obligacji powinniśmy ulokować $w_1 \cdot 414,643 = 292,789$ tys. zł, a w drugiej $w_2 \cdot 414,643 = 121,854$ tys. zł.

Zobaczmy teraz jak wygląda wynik naszego zabezpieczenia. Założmy, że w krótkim okresie, od chwili skonstruowania portfela (tak, że możemy pominąć upływ czasu) zmieniają się stopy rynkowe odpowiednio na 8% oraz 10%. Zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa przedstawiono w tabeli 4.4.

Tabela 4.4. Wartość portfela obligacji i zobowiązania przedsiębiorstwa w zł.

	8%	9%	10%
obligacja 1			
cena	77,38	69,04	62,14
liczba	4 241	4 241	4 241
wartość	328 157,36	292 798,63	263 526,73
obligacja 2			
cena	120,39	113,01	106,23
liczba	1 078	1 078	1 078
wartość	129 811,79	121 854,23	114 543,62
wartość portfela	457 969,15	414 642,86	378 070,35
wartość zobowiązania	456 386,95	414 642,86	376 889,48
różnica	1 582,21	0,00	1 180,87

Oczywiście należy uwzględnić w obliczeniach zaokrąglenia liczby akcji, ceny i wartości obligacji.

Przykład pokazuje, że jeśli stopy rynkowe (w naszym przykładzie stopy YTM zmieniają się) tuż po dokonaniu immunizacji portfela to zmiana ta, nie wpływa na wywiązanie się z zobowiązań przedsiębiorstwa. Jeśli stopa spada, to cena obligacji rośnie, rośnie zatem wartość portfela, ale z drugiej strony rośnie wartość dzisiejsza 1 mln zł za 10 lat. Gdy stopa rynkowa rośnie, to ma miejsce dokładnie odwrotny proces. Przykład można również znaleźć [arkuszu](#). $\square$

Immunizacja portfela dostarcza osłony ze względu na zmianę stopy procentowej. Idea osłony jest bardzo prosta i przejrzysta. Jednak w praktyce, ze względu na upływ czasu do zapadalności i zmianę stopy procentowej, musimy dokonywać zmiany składu portfela, czyli musimy immunizować portfel na bieżąco. Ta procedura jest związana z kosztami transakcji. Poza tym na rynku muszą występować obligacje o tej samej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , co ogranicza możliwość stosowania tej metody.

4.4. Wypukłość obligacji

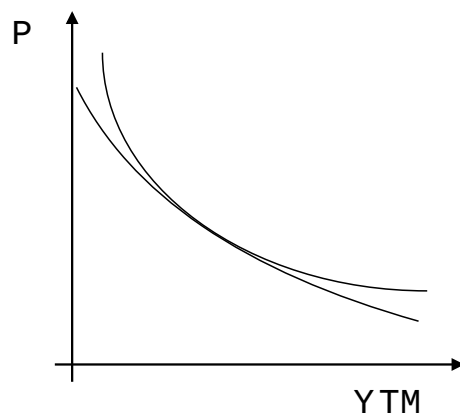
Idea zabezpieczania ryzyka stopy procentowej za pomocą duration jest intuicyjnie bardzo prosta. Jednak musimy być świadomi założeń ograniczających możliwość stosowania tej koncepcji:

- Zakładamy, że wartość portfela obligacji (w szczególności jednej obligacji) może być aproksymowane przez pierwszy wyraz rozwinięcia funkcji ceny obligacji w szereg Taylora. Jak pamiętamy, taka aproksymacja pracuje dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM . Czyli zakładamy, że w rzeczywistości mamy małe zmiany YTM , co nie zawsze odpowiada realiom rynkowym.
- Zakładamy, także że na krzywą YTM działają równoległe przesunięcia, tzn. jeśli na początku inwestycji każda obligacja w portfelu o dowolnej zapadalności miała takie samo YTM , to po pewnym czasie - jeśli zmieni się sytuacja na rynku - zakładamy, że każda obligacja poddana zostanie takiej samej zmianie.

Duration w modelu ciągłym (czy zmodyfikowane duration w modelu dyskretnym) mierzy nachylenie krzywej $YTM-P$ w danym punkcie stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM . Jak pokazaliśmy wcześniej, prowadzi to do aproksymacji krzywej $YTM-P$, która służy do mierzenia ryzyka stopy procentowej jak również zarządzania tym ryzykiem. Lepszą aproksymację krzywej możemy uzyskać dodając wyraz drugiego rzędu rozwinięcia funkcji ceny obligacji P w szereg Taylora. Wyraz drugiego rzędu w tym rozwinięciu związany jest z **wypukłością** (*convexity*) obligacji i odpowiada za stopień krzywizny relacji $YTM-P$. Poza tym pojęcie wypukłości będzie nam przydatne przy omawianiu metod zarządzania portfelem obligacji. Można teraz powiedzieć, że inwestorzy preferują "bardziej" wypukłe obligacje.

Wiemy, że cena obligacji P jest funkcją trzech parametrów $P = P(y, T, c)$. Definiujemy wypukłość $Conv$ w modelu ciągłym następująco

$$Conv = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n C_i \cdot t_i^2 \cdot e^{-y \cdot t_i} \quad (4.25)$$



Rysunek 4.3. Wypukłość dwóch obligacji.

gdzie:

C_i - wysokość kuponu w i -tej chwili, $1 \leq i \leq n$;

t_i - chwile w których są wypłacane kupony, $1 \leq i \leq n$;

$y = YTM$ - stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji.

Wtedy cenę obligacji możemy aproksymować następująco

$$\Delta P = -D \cdot P \cdot \Delta y + \frac{1}{2} Conv \cdot P \cdot (\Delta y)^2 \quad (4.26)$$

W przypadku modelu dyskretnego definiujemy wypukłość dokładnie tak samo, jednak z oczywistych powodów będziemy mieć inną zależność

$$Conv = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot (i+1) \cdot C/m}{(1+y/m)^{i+2}} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot F}{(1+y/m)^{n+2}} \right) \quad (4.27)$$

Przypuśćmy, że mamy obligację z ceną P i odpowiadającej jej stopie zwrotu w terminie do wykupu y , zatem możemy wyznaczyć zmodyfikowane duration D_M oraz wypukłość $Conv$ obligacji. Wtedy dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu Δy odpowiadająca zmiana ceny obligacji będzie dana następująco

$$\Delta P = -D_M P \Delta y + \frac{1}{2} Conv P (\Delta y)^2 \quad (4.28)$$

Zauważmy, że jednostkami wypukłości obligacji $Conv$ jest czas do kwadratu. Wypukłość jest średnią ważoną iloczynu chwil czasowych (danej i poprzedniej) $t_i t_{i+1}$, gdzie podobnie jak w przypadku duration, wagi są proporcjonalne do wartości dzisiejszej odpowiednich przepływów gotówkowych. Wynik jest modyfikowany przez czynnik $1/(1+y/m)^2$. Przykładowe wyznaczanie wypukłości obligacji można znaleźć w [arkuszu](#).

Własności wypukłości

1. dodatnia wypukłość (*positive convexity*)

$$YTM \nearrow \implies P \searrow \implies D \searrow \implies Conv \searrow$$

$$YTM \searrow \implies P \nearrow \implies D \nearrow \implies Conv \nearrow$$

Ta własność powoduje, że w odpowiedzi na zmiany stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM , zmienia się cena obligacji i w konsekwencji duration obligacji. Wzrost stopy YTM powoduje spadek ceny P , zmniejszenie duration tej obligacji, a to z kolei wyhamowuje spadek cen. Natomiast, kiedy YTM spada, cena obligacji P rośnie, duration rośnie tak, że przyspiesza procentową zmianę ceny. Kąt nachylenia stycznej maleje wraz ze wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM . Bardziej płaska styczna oznacza zatem krótsze duration, i odwrotnie.

2. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i okresie do wykupu T , im niższe oprocentowanie obligacji, tym większa wypukłość obligacji $Conv$,
3. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i stopie kuponowej c , im dłuższa zapadalność obligacji T , tym większa wypukłość obligacji $Conv$.

Pokażmy powyższe własności na przykładzie.

Przykład 4.8 Rozważmy model kapitalizacji dyskretniej. Załóżmy, że mamy obligację o stopie kuponowej $c = 6\%$ p.a., o wartości nominalnej $F=100$ zł, zapadającą za 10 lat. Załóżmy, że kupony są wypłacane raz do roku, $m=1$. Jej cena na rynku wynosi $P=100$ zł, zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu $YTM = 6\%$ p.a. Duration takiej obligacji wynosi 7,52 lata, a wypukłość 69,74. Rozważmy teraz sytuacje przedstawione powyżej.

Przy ustalonej zapadalności obligacji zmieniamy stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM . W konsekwencji zmianie ulega cena obligacji, duration oraz wypukłość obligacji.

Tabela 4.5. Wartość YTM , duration oraz wypukłości obligacji.

YTM	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	7,0%	8,0%	9,0%
duration	8,07	7,98	7,89	7,80	7,71	7,62	7,20
wypukłość	77,22	74,67	72,17	69,74	67,37	65,05	62,79

Tabela 4.6. Wpływ zmiany stopy kuponowej na wypukłość obligacji przy danym YTM oraz T obligacji.

stopa kuponowa	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
wypukłość	79,83	75,89	72,57	69,74	67,30	65,17	63,30

Tabela 4.7. Wpływ zmiany zapadalności obligacji na wypukłość obligacji przy danym YTM oraz stopie kuponowej c obligacji.

zapadalność	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0
wypukłość	39,68	49,15	59,20	69,74	80,67	91,93	103,43

□

Wypukłość portfela obligacji

Wypukłość portfela n obligacji, składającego się z obligacji o wagach w_i , $1 \leq i \leq n$, przy założeniu, że YTM obligacji w portfelu jest takie samo, wynosi

$$Conv_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot Conv_i \quad (4.29)$$

gdzie: $Conv_i$ oznacza wypukłość i -tej obligacji w portfelu, $1 \leq i \leq n$.

Gdy obligacje w portfelu mają różne stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM (czyli krzywa YTM nie jest płaska), to zależność (4.29) jest tylko wartością przybliżoną. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4.9 Rozważmy model kapitalizacji dyskretnej. Załóżmy, że mamy trzy obligacje, wypłacające raz do roku kupony $m=1$, o następujących parametrach

Tabela 4.8. Parametry obligacji.

obligacja	oprocentowanie (%)	zapadalność (lata)	cena (zł)
1	5%	2 lata	100,00
2	5%	7 lat	91,77
3	5%	15 lat	77,93

Możemy teraz policzyć każdej z nich stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM , duration D , zmodyfikowane duration MD oraz wypukłość.

Tabela 4.9. YTM , duration, zmodyfikowane duration, wypukłość obligacji.

obligacja	YTM (%)	duration (lata)	zmodyfikowane duration (lata)	wypukłość
1	5,0 %	1,952 roku	1,859 roku	5,269
2	6,5 %	6,029 lat	5,661 lat	40,354
3	7,5 %	10,286 lat	9,568 lat	123,808

Tworzymy teraz portfel tych obligacji, kupując po jednej obligacji do portfela. Obliczamy teraz średnią ważoną duration portfela, zmodyfikowanego duration portfela o wypukłość portfela, nie zakładając, że YTM każdej z obligacji jest takie samo.

Następnie wyznaczamy stopę zwrotu w terminie do wykupu portfela i dla tak wyznaczonego YTM portfela obliczamy nowe ceny obligacji, nowe wagi obligacji w portfelu, duration portfela, zmodyfikowane duration portfela oraz wypukłość portfela. Różnica pomiędzy wartościami przybliżonymi a rzeczywistymi jest podana w tabeli.

Tabela 4.10. YTM , duration, zmodyfikowane duration, wypukłość portfela obligacji, przy założeniu różnych YTM obligacji obliczonych w sposób przybliżony oraz dokładny.

	duration (lata)	zmodyfikowane duration (lata)	wypukłość
aproksymacja	5,747	5,380 roku	51,460
wartość dokładna	5,925	5,545 roku	54,596
różnica	-0,178	-0,165	-3,137
różnica względna	-3,00%	-2,98%	-5,75%

Dokładne obliczenia można znaleźć w [arkuszu](#)

□

4.5. Duration Fishera-Weila

Koncepcja duration zaprezentowana we wcześniejszym rozdziale może być rozszerzona na strukturę czasową stopy procentowej. Jak pamiętamy, duration jest miarą wrażliwości stopy procentowej. W przypadku duration Macaulaya była to wrażliwość ze względu na stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM .

Obecnie zajmujemy się sytuacją, gdy mamy strukturę terminową stopy procentowej i zbadamy jak zachowuje się pod wpływem przesunięcia równoległego krzywej spot.

Załóżmy, że mamy stopy spot: $r(1), r(2), \dots, r(n)$. Dla uproszczenia zapisu, oznaczmy $r(i) = r_i$. Weźmy przesunięcie równoległe krzywej spot o wielkość λ (λ może być dodatnie zatem mamy przesunięcie krzywej w górę, albo ujemne czyli przesunięcie krzywej w dół) czyli przesunięcie równoległe $r_1 + \lambda, r_2 + \lambda, \dots, r_n + \lambda$. Będziemy chcieli zbadać wrażliwość ceny obligacji w takiej sytuacji.

4.5.1. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji ciągłej

Weźmy model kapitalizacji ciągłej. Wtedy stopy spot wyznaczają cenę papieru dłużnego

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-r_{t_i} \cdot t_i} \quad (4.30)$$

Możemy teraz zdefiniować duration Fishera-Weila następująco:

$$D_{FW} = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^n t_i \cdot C_i e^{-r_{t_i} \cdot t_i} \quad (4.31)$$

Postawiona definicja, wprowadzona w 1977 roku, jest analogiczna do definicji Macaulaya, ale nie jest oparta na stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM , ale stopach spot r_{t_i} . Jednostką duration Fishera-Weila jest czas. Poza tym spełniony jest warunek: $t_0 \leq D_{FW} \leq t_n$.

Rozważymy teraz wrażliwość ceny obligacji na równoległe przesunięcie krzywej spot o wielkość λ i pokażemy, że jest ona determinowana przez duration Fishera-Weila D_{FW} . Dla dowolnej liczby λ cena obligacji wynosi

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-(r_{t_i} + \lambda) \cdot t_i} \quad (4.32)$$

Zatem pochodna ceny $P(\lambda)$ względem λ w punkcie 0 będzie dana

$$\left. \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{dP(0)}{d\lambda} = - \sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i \cdot e^{-r_{t_i} \cdot t_i} \quad (4.33)$$

stąd **względna wrażliwość ceny**

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \quad (4.34)$$

Zanotujmy tę obserwację.

Twierdzenie 4.1 *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o $r_{t_i} + \lambda$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ to cena obligacji $P(\lambda)$ spełni zależność*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \quad (4.35)$$

4.5.2. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji dyskretnej

Przeanalizujmy teraz model dyskretny, w którym mamy wypłacane kupony m razy w roku. Wtedy cena obligacji wynosi

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k + \lambda}{m} \right)^{-k} \quad (4.36)$$

Obliczając pochodną ceny $P(\lambda)$ względem λ dla $\lambda = 0$ uzyskamy

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = - \sum_{k=1}^n \frac{k}{m} \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k}{m} \right)^{-(k+1)} \quad (4.37)$$

Gdy podzielimy zależność (4.37) przez $-P(0)$ to otrzymamy

$$D_Q = - \frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{1}{P(0)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{m} \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k}{m} \right)^{-(k+1)} \quad (4.38)$$

Wyrażenie (4.38) to quasi-zmodyfikowane duration (*quasi-modified duration*). Jednostką tutaj jest czas, jednak nie jest to dokładnie średni czas przepływów gotówki ponieważ w wyrażeniu pojawia się wyraz $(1 + r_k/m)^{-(k+1)}$ zamiast czynnika dyskontowego $(1 + r_k/m)^{-k}$. Stąd nazwa quasi-modified duration.

Twierdzenie 4.2 *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o $r_{t_i} + \lambda$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ to cena $P(\lambda)$ spełnia zależność*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_Q \quad (4.39)$$

4.6. Immunizacja portfela obligacji ze względu na równoległe przesunięcie krzywej dochodowości

Struktura terminowa stopy procentowej prowadzi do nowej (bardziej odpornej) metody immunizacji portfela papierów dłużnych. W przeciwieństwie do immunizacji portfela przedstawionej powyżej, nie zależy od wyboru obligacji z tymi samymi stopami zwrotu w terminie do wykupu YTM . Co więcej, z racji konstrukcji struktury terminowej stopy procentowej YTM nie ma nawet w zależnościach na wycenę papieru dłużnego. Będziemy teraz chcieli pokazać jak uodpornić portfel obligacji ze względu na ryzyko równoległego przesunięcia krzywej dochodowości. Wykorzystamy tutaj pojęcie duration Fishera-Weila wprowadzone wcześniej. Przeanalizujemy metodę postępowania na przykładzie.

Przykład 4.10 Przedsiębiorstwo ma zobowiązanie w wysokości 1 mln złotych płatne za 5 lat. Chce już dzisiaj zabezpieczyć swoje zobowiązanie. Załóżmy, że na rynku mamy stopy spot takie, jak podane w tabeli 4.11.

Tabela 4.11. Stopy spot.

lata	stopa spot
1	7,67%
2	8,27%
3	8,81%
4	9,31%
5	9,75%
6	10,16%
7	10,52%
8	10,82%
9	11,15%
10	11,42%
11	11,67%
12	11,89%

Na rynku mamy dwie obligacje o następujących parametrach. Pierwsza obligacja ma zapadalność za 12 lat, oprocentowana jest na poziomie 6% p.a. wartość nominalna wynosi 100 zł, a jej cena wynosi 65,95 zł. Druga obligacja jest obligacją 5-letnią, jej oprocentowanie wynosi 10% p.a., nominal 100 zł, a cena wynosi 101,65 zł. Obliczmy quasi-zmodyfikowane duration dla każdej z nich. Dla pierwszej obligacji $D_1 = 7,07$, natomiast dla drugiej $D_2 = 3,80$.

Wartość dzisiejsza 1 mln zł za 5 lat wynosi

$$\frac{1 \text{ mln}}{(1 + 0,0975)^5} = 627,903 \text{ tys. zł}$$

natomiast quasi-zmodyfikowane duration zobowiązania przedsiębiorstwa

$$\frac{5}{1 + r_5} = 4,56$$

Możemy teraz sformułować warunek na odporny portfel

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 &= 4,56 \end{aligned}$$

gdzie: w_i waga i -tej obligacji, D_i quasi-zmodyfikowane duration i -tej obligacji, dla $i = 1, 2$.

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy wartość wag: $w_1 = 0,23$, $w_2 = 0,77$. A stąd liczba obligacji w portfelu wynosi odpowiednio $x_1 = 2207,62$, $x_2 = 4744,60$.

Zobaczmy teraz jak wygląda wynik naszego zabezpieczenia. Załóżmy, że w krótkim okresie, od chwili skonstruowania portfela (tak, że możemy pominąć upływ czasu) następuje równoległe przesunięcie krzywej dochodowości odpowiednio o 100 pb w dół oraz 100 pb w górę. Zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa przedstawiono w tabeli 4.12. Pomocnicze obliczenia można znaleźć również w [arkuszu](#).

Tabela 4.12. Wartość portfela obligacji i zobowiązania przedsiębiorstwa w zł.

	-100pb	0pb	+100pb
obligacja 1			
cena	70,85	65,95	61,51
liczba	2 208	2 208	2 208
wartość	156 438,87	145 619,10	135 821,19
obligacja 2			
cena	105,62	101,65	97,89
liczba	4 745	4 745	4 745
wartość	501 146,74	482 349,14	464 489,37
wartość portfela	657 585,62	627 968,24	600 310,56
wartość zobowiązania	657 306,33	627 902,60	600 063,23
różnica	279,29	65,64	247,33

Widzimy, że tak skonstruowane zabezpieczenie przyszłej płatności jest odporne ze względu na równoległe przesunięcia całej krzywej dochodowości. $\square$

4.7. Zadania

Zadanie 4.1. Mamy 2 portfele obligacji, których skład jest następujący:

- A: roczna obligacja 0-kuponowa o wartości nominalnej $F_1=2000$ zł,
10-letnia obligacja 0-kuponowa o wartości nominalnej $F_2=6000$ zł
- B: 7-letnia obligacja kuponowa, oprocentowana 4% p.a., wypłacająca kupony raz do roku, o wartości nominalnej $F_3=5000$ zł.

Założmy, że krzywa YTM jest płaska i jest kwotowana na poziomie 10% p.a.

Ryzyko, mierzone *duration*, którego portfela jest mniejsze?

Zadanie 4.2. 9-letnia obligacja kuponowa ma stopę zwrotu w terminie do wykupu $YTM=10\%$ oraz *duration* $D = 7,19$ lat. Jeśli YTM zmieni się o:

- a) 50 pb,
- b) 200pb

to jak zmieni się cena obligacji? Wykorzystaj zależność pomiędzy ceną obligacji a *duration*.

Jaka jest cena takiej obligacji jeśli policzymy ją wprost ze wzoru?

Zadanie 4.3. Uporządkuj, ze względu na *duration* następujące obligacje:

- a) 10-letnia obligacja o oprocentowaniu 10% p.a., wypłacająca kupony 2 razy do roku, cenie 97,74%,
- b) 7-letnia obligacja 0-kuponowa,
- a) 8-letnia obligacja o oprocentowaniu 4% p.a., wypłacająca kupony 1 raz do roku, cenie 102,36%.

Zadanie 4.4. Ile wynosi YTM , *duration* oraz wypukłość 14 lutego 2005 następujących obligacji:

- i) PS1005
- ii) SP1207
- iii) PS0310
- iv) DS1110
- v) DS1015
- vi) WS0922

Jakie można wyciągnąć wnioski na podstawie obliczonych wielkości?

Jaka jest zależność między:

- a) YTM a *duration*
- b) wysokością kuponów a *duration*
- c) czasem do wykupu a *duration*
- d) *duration* a wypukłością.

Przedstaw graficznie odpowiednie zależności.

Zadanie 4.5. Przypuśćmy, że chcemy po 3 latach uzyskać kwotę 100 tys. zł. Rynkowa stopa procentowa wynosi 12%, a na rynku mamy roczne obligacje po 88,69zł. Założmy, że mamy płaską krzywą dochodowości. Co rok inwestujemy pieniądze uzyskane z wykupu obligacji. Pokaż wynik takiej inwestycji (czy rzeczywiście uzyskamy 100 tys. zł po 3 latach) dla 3 różnych scenariuszy

- i) stopa nie ulegnie zmianie,
- ii) stopa po roku spada do 9%, a po kolejnym wzrasta do 14%,
- iii) stopa po roku rośnie do 14%, a po kolejnym spada do 9%.

Zadanie 4.6. Dzielisz posiadane pieniądze równo pomiędzy obligacje: 3-letnią (kupon $C=10$, $m=1$, nominal $F=100$) i roczną 0-kuponową. Załóżmy, że mamy płaską krzywą dochodowości. Stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 15%, a po roku spada do 14%. Jaką uzyskasz stopę zwrotu z tej inwestycji? Dla jakiego podziału początkowego portfela obligacji stopa zwrotu będzie maksymalna?

Zadanie 4.7. Inwestujesz w 5-letnie obligacje ($C=10$ zł, $m=1$, $F=100$) i kupony reinwestujesz w te same obligacje. Stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 15% w momencie rozpoczęcia inwestycji. Jak musi się zmienić YTM , aby stopa zwrotu z inwestycji w obligację wyniosła 16%?

Zadanie 4.8. Inwestujemy na 3 lata kwotę 10 tys. zł w 3-letnie obligacje o wartości nominalnej 100 zł, płacące kupon raz do roku w wysokości 12 zł. Kupony reinwestujemy w roczne obligacje 0-kuponowe. Jaką kwotę będziemy dysponować po trzech latach, jeżeli stopy procentowe w kolejnych latach (czyli na początku inwestycji, po pierwszym roku, po drugim roku) będą wynosić odpowiednio:

- 12%, 12%, 12%,
- 12%, 10%, 8%,
- 12%, 13%, 14%,
- 12%, 9%, 14%,
- 12%, 14%, 9%.

Ile możemy kupić obligacji 3-letnich?

Ile możemy kupić obligacji rocznych po roku, a ile po dwóch latach w każdym ze scenariuszy?

Rozdział 5

Zarządzanie portfelem obligacji

Jedną z najważniejszych idei rynku finansowego jest jego efektywność. Stąd często wykorzystuje się tę koncepcję w procesie zarządzania portfelem papierów dłużnych.

5.1. Zarządzanie portfelem obligacji

Z punktu widzenia instytucji finansowej, bez względu na specyfikę prowadzonej działalności, proces zarządzania portfelem obligacji można podzielić na następujące etapy:

1. Określenie celów inwestycyjnych.

Cele inwestycyjne zależą bezpośrednio od charakteru instytucji finansowej. Fundusze emerytalne będą dążyły do generowania przychodów na poziomie wystarczającym do zaspokojenia zobowiązań emerytalnych. Dla instytucji ubezpieczeniowych celem jest natomiast zaspokojenie zobowiązań wynikających z zawartych polis i generowanie zysku. Jeszcze inne cele mają fundusze inwestycyjne.

2. Ustalenie polityki inwestycyjnej.

Polityka inwestycyjna instytucji finansowej zależy głównie od regulacji prawnych nakładanych na te instytucje. Przykładowo, dla funduszu emerytalnego głównym celem jest bezpieczeństwo powierzonych środków. Dlatego istnieje wiele ograniczeń dla takiego funduszu, które określają w jakie instrumenty może fundusz inwestować.

3. Określenie strategii zarządzania portfelem.

Strategie zarządzania portfelem obligacji można podzielić na¹:

- strategie pasywne – portfel obligacji jest konstruowany w oparciu o indeks obligacji, czyli taki portfel podąża za rynkiem stóp procentowych,
- strategie aktywne – portfel obligacji jest konstruowany w oparciu o oczekiwania co do przyszłych zachowań rynkowych stóp procentowych,
- strategie mieszane – łączące strategie pasywne i aktywne,
- strategie strukturalne – portfel obligacji jest tak projektowany aby osiągnąć założone cele. Tego typu strategie często wykorzystuje się do sfinansowania pojedynczego zobowiązania czy strumienia zobowiązań rozłożonych w cza-

¹ Często dzieli się strategie zarządzania portfelem obligacji tylko na strategię pasywną i aktywną. Ze względu jedną na specyficzne oczekiwania inwestorów klasyfikacja prezentowana poniżej jest bardziej szczegółowa.

sie. Najczęściej stosuje się tutaj immunizację oraz harmonizację przepływów gotówkowych.

Dobór strategii inwestycyjnej zależy też od

- charakteru instytucji zarządzającej,
- rodzaju zobowiązań,
- oczekiwań inwestorów,
- efektywności rynku.

4. Dobór aktywów do portfela.

Dokładna analiza dostępnych papierów dłużnych na rynku pozwala na znalezienie portfela efektywnego, cechującego się najwyższą oczekiwaną stopą zwrotu dla zadanego ryzyka lub najniższym poziomem ryzyka dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu.

5. Pomiar i ocena wyników stosowanej strategii.

Każdy zarządzany portfel papierów dłużnych podlega ciągłej ocenie przez inwestorów oraz właścicieli instytucji finansowej.

Poniżej przyjrzymy się bliżej pasywnej i aktywnej strategii zarządzania portfelem obligacji.

5.2. Pasywne zarządzanie portfelem obligacji

Wielu inwestorów tak zarządza portfelem obligacji, aby podążał on za wybranym indeksem obligacji. Można to robić w zasadzie na dwa sposoby:

- stworzyć portfel odpowiadający wagami indeksowi obligacji (ale ten sposób ma wiele wad)
- replikować indeks (ale mniejszą liczbą obligacji w portfelu)

Zobaczmy jak działa ten drugi sposób. Mamy replikować - możliwie jak najlepiej - stopę zwrotu z indeksu obligacji, konstruując portfel składający się z N obligacji. Załóżmy, że wagi poszczególnych obligacji w portfelu wynoszą w_i , a stopy zwrotu poszczególnych obligacji r_i , gdzie $1 \leq i \leq N$. Stopa zwrotu takiego portfela obligacji wynosi

$$r_p = \sum_{i=1}^N w_i \cdot r_i \quad (5.1)$$

Oznaczmy przez $V = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ macierz kowariancji stopy zwrotu i -tej i j -tej obligacji, które są w portfelu. Załóżmy, że stopa zwrotu z indeksu obligacji wynosi r_B .

Zatem problem replikacji portfela obligacji sprowadza się do minimalizacji wariancji różnicy stopy zwrotu portfela i stopy zwrotu indeksu:

$$\min_{w_1, \dots, w_N} = \text{var}(r_p - r_B) \quad (5.2)$$

Czyli mamy klasyczny problem optymalizacji.

Jakość replikacji możemy mierzyć **błędem śledzenia** (*tracking error*) TE , który możemy wyrazić następująco:

$$TE = \sqrt{\text{var}(r_p - r_B)} \quad (5.3)$$

5.3. Aktywne zarządzanie portfelem obligacji

Aktywni zarządzający zakładają, że nie ma efektywności na rynku. Zatem istnieją możliwości arbitrażu lub przewidzenia zachowania stóp procentowych na rynku. Z ich punktu widzenia, warto podjąć ryzyko w celu osiągnięcia wyższej stopy zwrotu niż dawałby indeks odniesienia (*benchmark*).

Dwa podstawowe rodzaje aktywnych strategii to:

- próba przewidzenia zachowania stopy procentowej (*market timing*)
 - nie zmieni się poziom stóp na rynku
 - zmieni się poziom stóp procentowych
 - zmieni się kształt krzywej dochodowości
- wykorzystanie nieefektywności rynku (*bond picking*)

Zobaczmy na przykładach jak pracują wymienione powyżej aktywne strategie.

Strategie oparte na zmianach poziomu stopy procentowej są dość trywialne z definicji. Zakładają bowiem, że krzywa stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM przesunie się (spadnie bądź wzrośnie) równolegle w przyszłości. Rzadko się tak zdarza w rzeczywistości.

Jeśli założymy, że stopa procentowa spadnie - krzywa YTM przesunie się równolegle w dół - to zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami powinniśmy zwiększać duration portfela. Największą względną zmianę zanotują obligacje o największym duration (zmodyfikowanym duration).

Przykład 5.1 Załóżmy, że na rynku mamy płaską krzywą YTM . Dostępne są na rynku obligacje o parametrach podanych w (tab. 5.1). Policzmy od razu zmodyfikowane duration każdej z obligacji.

Tabela 5.1. Dostępne obligacje na rynku.

zapadalność	cena	stopa kuponowa CR	YTM	zmodyfikowane duration
2	100	5%	5%	1,859
10	100	5%	5%	7,722
30	100	5%	5%	15,372
30	138,43	7,5%	5%	14,269
30	176,86	10%	5%	13,646

Założmy, że zarządzający portfelem obligacji spodziewa się spadnie YTM w najbliższym czasie o 50 pb. Możemy teraz policzyć bezwzględną

$$\Delta P = -D_M \cdot P \cdot \Delta y \quad (5.4)$$

i względną zmianę ceny obligacji zgodnie z wcześniej wyprowadzoną zależnością

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta y \quad (5.5)$$

Dla rozważanych obligacji otrzymamy wartości podane w tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Zmiany cen obligacji przy spadku YTM o 50 pb.

obligacja	bezwzględna zmiana ceny	względna zmiana ceny
1	0,930	0,93%
2	3,861	3,86%
3	7,686	7,69%
4	9,876	7,13%
5	12,067	6,82%

Jeśli zarządzający chce zmaksymalizować względną stopę zwrotu, to wybierz obligację o największym zmodyfikowanym duration.

Obliczenia można prześledzić w [arkuszu](#).

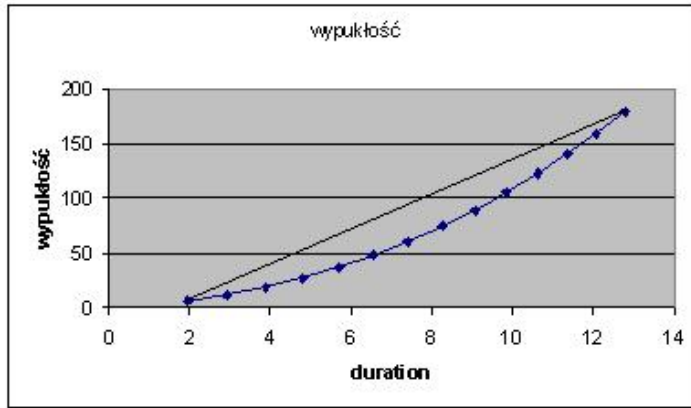
□

Do tej pory zakładaliśmy, że krzywa YTM nie przesuwają się bądź podlega równoległym przesunięciom. W rzeczywistości, krzywa YTM może się zachowywać zupełnie inaczej. Dopuszczymy teraz takie zmiany, czyli pozwolimy aby krótki koniec krzywej zachowywał się inaczej niż długi koniec krzywej i jeszcze inaczej niż YTM obligacji o średnim terminie zapadalności. Wykorzystamy w naszej analizie nie tylko duration ale również wypukłość obligacji.

Zdefiniujmy sobie jeszcze pewne pomocnicze strategie konstrukcji portfela:

- strategia pocisku (*bullet strategy*) polega na konstrukcji portfela w obligacje o określonej zapadalności;
przykładowo: zarządzający inwestuje 100% środków w 5-letnie obligacje;
- strategia objęcia (*barbell strategy*) polega na konstrukcji portfela w obligacje o krótkim i długim terminie zapadalności;
przykładowo: zarządzający inwestuje 40% środków w 2-letnie obligacje a 60% środków w obligacje 30-letnie;
- strategia drabinki (*ladder strategy*) polega na konstrukcji portfela poprzez inwestycje równych kwot w obligacje o różnych datach zapadalności;
przykładowo: zarządzający inwestuje 25% środków w 2-letnie obligacje, 25% środków w obligacje 5-letnie, 25% środków w obligacje 10-letnie oraz 25% środków w obligacje 20-letnie.

Zauważmy, że strategia objęcia jest bardziej wypukła niż strategia pocisku przy tym samym duration. Sprawdźmy to. Weźmy obligację kuponową oprocentowaną 2% p.a., o nominale $F=100$ zł, która ma stopę zwrotu do wykupu $YTM = 4\%$. Zobaczmy jak zależy wypukłość tej obligacji od duration.



Zdefiniowane wcześniej techniki użyjemy do konstrukcji portfela aktywnego. Strategia motyla (*butterfly strategy*) jest najbardziej rozpowszechnioną strategią zarządzania portfelem obligacji na rynku. Jest to kombinacja strategii objęcia (to są skrzydła motyla) i strategii pocisku (korpus motyla). Celem jest dopasowanie wag tych składników tak, aby wypadkowy portfel był neutralny na przepływy gotówkowe a duration było równe zero. Ten drugi warunek gwarantuje neutralność ze względu na małe równoległe przesunięcia krzywej *YTM* na rynku. Poza tym, w strategii motyla portfel jest tak konstruowany, że ma dodatnią wypukłość, co generuje zysk z tego portfela, przy dużych równoległych przesunięciach *YTM*.

Z drugiej strony jeśli dopuszczamy innych zachowań krzywej *YTM* to stopa zwrotu z portfela nie musi być dodatnia. W tym wypadku trudno przewidzieć do końca jaki będzie efekt zastosowanej strategii.

Istnieje kilka wariantów strategii motyla. Pokażemy je poniżej.

Przykład 5.2 Załóżmy, że na rynku mamy płaską krzywą *YTM*. Dostępne są obligacje o parametrach podanych w tab. 5.3. Policzmy od razu zmodyfikowane duration każdej z nich.

Tabela 5.3. Dostępne obligacje na rynku.

zapadalność	cena	stopa kuponowa <i>CR</i>	<i>YTM</i>	zmodyfikowane duration
2	100	5%	5%	1,859
5	100	5%	5%	4,329
10	100	5%	5%	7,722

Założmy, że dokonujemy krótkiej sprzedaży 1000 obligacji 5-letnich oraz zajmujemy długą pozycję w q_s obligacji 2-letniej i q_l 10-letniej. Czyli sprzedajemy na krótko pocisk, a kupujemy objęcie. Liczby (obligacji) q_s oraz q_l dobieramy tak, aby portfel (czyli motyl) był neutralny ze względu na przepływy gotówkowe oraz duration. Mamy zatem układ równań

$$\begin{aligned} q_s \cdot MD_s + q_l \cdot MD_l &= 1000 \cdot MD_m \\ q_s \cdot P_s + q_l \cdot P_l &= 1000 \cdot P_m \end{aligned}$$

gdzie: MD_s , MD_m , MD_l oznaczają zmodyfikowane duration odpowiednio obligacji o krótkim, średnim długim terminie zapadalności, a P_s , P_m , P_l oznaczają odpowiednio ceny tych obligacji. Postawiając dane liczbowe otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} q_s \cdot 1,859 + q_l \cdot 7,722 &= 1000 \cdot 4,329 \\ q_s \cdot 100 + q_l \cdot 100 &= 1000 \cdot 100 \end{aligned}$$

i wyznaczamy stąd $q_s = 578,65$ oraz $q_l = 421,35$.

Strategia motyla ma dodatnią wypukłość. Jakikolwiek będzie poziom stopy *YTM* to strategia ta zawsze wygeneruje dodatni cash flow, oczywiście pod warunkiem, że

cała krzywa przesuwana się równolegle. Poza tym zauważmy że, aby otworzyć taką pozycję nie musimy posiadać żadnych środków. $\square$

Jednak na rynku nie zawsze zachodzą równoległe przesunięcia. Załóżmy teraz, że konstruujemy strategię motyla z równymi skrzydłami (*fifty-fifty weightings*). Zatem musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} q_s \cdot MD_s + q_l \cdot MD_l + \alpha \cdot MD_m &= 0 \\ q_s \cdot MD_s &= q_l \cdot MD_l = -\frac{\alpha \cdot MD_m}{2} \end{aligned}$$

Celem tej strategii jest uzyskanie neutralności ze względu na małe przesunięcia. Co więcej, jeśli zmiana spreadu pomiędzy krótkim skrzydełkiem a korpusem motyla jest taka sama jak zmiana spreadu pomiędzy korpusem a długim skrzydełkiem to strategia ta jest neutralna na takie zmiany. To znaczy, jeśli występuje przykładowo zmiana -50/0/50, to strategia nasza jest neutralna na takie zmiany. Podobnie, gdy zmiana wynosi 50/0/-50.

Przykład 5.3 Załóżmy, że na rynku mamy dostępne obligacje o parametrach podanych w tab. 5.4. Policzmy od razu zmodyfikowane duration każdej z nich.

Tabela 5.4. Dostępne obligacje na rynku.

zapadalność	cena	stopa kuponowa CR	YTM	zmodyfikowane duration
2	100,936	5%	4,5%	1,886
5	97,865	5%	5,5%	4,212
10	92,64	5%	6,0%	7,011

Zajmujemy krótką pozycję w 10 tys. obligacji 5-letnich i równocześnie długą pozycję w q_s obligacji 2-letnich oraz q_l obligacji 10-letnich. Musimy rozwiązać zatem układ równań

$$\begin{aligned} q_s \cdot 1,886 + q_l \cdot 7,011 &= 10000 \cdot 4,212 \\ q_s \cdot 1,886 - q_l \cdot 7,011 &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy $q_s = 11\,165,7$ oraz $q_l = 3\,003,5$.

Aby otworzyć taką pozycję musimy mieć na to środki. $\square$

Bibliografia

- [1] Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, *Investments*, McGraw Hill, New York, 2002.
- [2] Michael Brett, *Świat finansów. How to Read the Financial Pages*, Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa, 1992. (istnieje nowsze wydanie).
- [3] Marek Capiński, *Inwestycje*, Wyższa Szkoła Biznesu-National Louis University, Nowy Sącz, 1998.
- [4] Nicolas Dunbar, *Alchemia pieniądza*, Liber, Warszawa, 2000.
- [5] Jack C. Francis, *Inwestycje*, WIG-Press, Warszawa, 2000.
- [6] Robert A. Haugen, *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa, 1996.
- [7] Michael Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa, 1993.
- [8] Lionel Martellini, Philippe Priaulet, Stephane Priaulet, *Fixed-income securities*, Wiley Finance, Chichester, 2003.

Skorowidz

akcept bankierski, 6

akcja

wartość emisyjna, 9

wartość księgowa, 9

wartość nominalna, 9

błąd śledzenia, 70

bon komercyjny, 6

brak możliwości arbitrażu, 36

cena

brudna, 25

czysta, 25

certyfi­kat depozytowy, 6

czynnik

dyskontowy, 16

stopy procentowej, 15

dealer, 6

dom maklerski, 5

duration, 49

euroobligacja, 8

fundusz

emerytalny, 5

hedgingowy, 5

powierniczy

otwarty, 5

zamknięty, 5

giełda papierów wartościowych, 3

Giełda Papierów Wartościowych w War-
szawie, 3

immunizacja portfela obligacji, 49

instrument

finansowy, 1

kapitalizacja

ciągła, 17

prosta, 10

złożona, 14

makler, 5

narosłe odsetki, 25

obligacja

śmieciovą, 8

bezterminowa, 8

dodatnia wypukłość, 60

kuponowa, 19

liczba okresów odsetkowych, 20

o stałym oprocentowaniu, 7

o zmiennym oprocentowaniu, 7

oprocentowanie obligacji, 20

w obcej walucie, 8

wartość nominalna, 20

wypukłość, 58

wysokość kuponu, 20

z opcją wykupu na żądanie emitenta,
8

z opcją wykupu na żądanie posiada-
cza, 8

zamienna, 8

zapadalność, 20

odsetki

składane, 14

odwrotna umowa odkupu, 6

operacja otwartego rynku, 12

over the counter market (OTC) zob. rynek
pozagięldowy, 3

overnight repo, 6

papier

dyskontowy, 6

wartościowy, 1

podstawa naliczania odsetek, 26

premia za płynność, 42

renta

okresowa, 18

wieczysta, 18

repo, 6

reverse repo, 6

- rynek
 - finansowy, 1
 - kapitałowy, 2
 - pieniężny, 2
 - pierwotny, 2
 - pozagiełdowy, 3
 - walutowy, 2
 - wtórny, 3
- ryzyko
 - kredytowe, 41
 - niedotrzymania warunków, 45
 - operacyjne, 41
 - płynności, 41
 - prawne, 41
 - reinwestowania, 45
 - rynkowe, 41
 - specyficzne, 41
 - systematyczne, 41
 - zmiany ceny, 45
- strategia
 - motyla, 72
- stopa
 - dyskontowa, 12
 - kapitalizacji z góry, 13
 - procentowa
 - czynnik, 15
 - efektywna, 15
 - roczna, 10
 - zwrotu
 - rynku pieniężnego, 12
- stopa inflacji, 42
- stopa procentowa
 - realna, 42
- stopa zwrotu
 - bieżąca, 27
 - w terminie do wykupu, 24
 - portfela obligacji, 28
- strategia
 - drabinki, 71
 - objęcia, 71
 - pocisku, 71
- struktura terminowa stopy procentowej, 35
- trader, 6
- umowa odkupu, 6
- Wall Street, 3
- wartość
 - dzisiejsza, 11
 - pieniądza w czasie
 - jedna płatność, 10
 - przyszła, 11
 - zdyskontowana, 11
 - wartość pieniądza w czasie, 10
- wypukłość
 - dodatnia obligacji, 60
 - obligacji, 58
- yield to maturity, YTM, 24
- zarządzanie portfelem obligacji
 - aktywne, 70
 - pasywne, 69