

Rozwiązywanie równań nieliniowych i ich układów.

Wyznaczanie zer wielomianów.

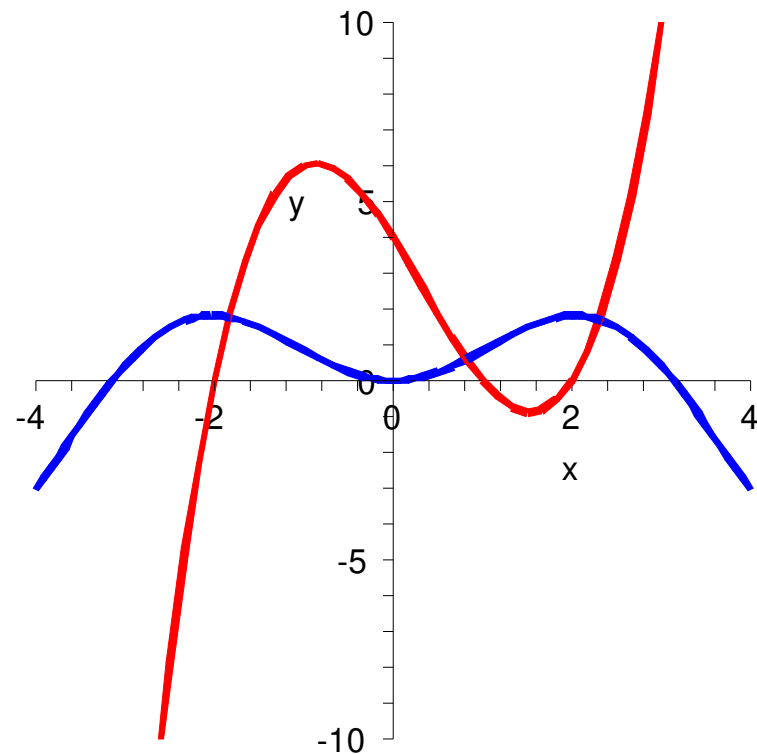
Plan wykładu:

1. Wyznaczanie pojedynczych pierwiastków rzeczywistych równań nieliniowych metodami
 - a) połowienia (bisekcji)
 - b) Regula Falsi
 - c) siecznych
 - d) Newtona-Raphsona
2. Wyznaczanie zer wielokrotnych
 - a) modyfikacja metod przy znajomości krotności pierwiastka
 - b) modyfikacja metod siecznych i Newtona dla przypadku ogólnego
3. Rozwiązywanie układów równań nieliniowych
4. Wyznaczanie zer rzeczywistych i zespolonych wielomianów
 - a) dzielenie wielomianów
 - b) metoda iterowanego dzielenia

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji jednej zmiennej

Poszukujemy zera rzeczywistego ciągłej funkcji $f(x)$,
czyli szukamy rozwiązania równania:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, x \in R$$



$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$



$$f(x) = x \sin(x)$$

Uwagi:

- nie istnieją wzory pozwalające obliczyć dokładnie pierwiastki równania – trzeba używać **schematów iteracyjnych**, często w obliczeniach inżynierskich nie jest znana postać równania nieliniowego
- rozwiązanie problemu uzyskane **metodą iteracyjną** będzie przybliżone (z zadaną dokładnością)
- jak w każdej metodzie iteracyjnej, o tym jak szybko znajdziemy zadowalające przybliżenie pierwiastka zależy będzie od samej metody, od przybliżenia założonego na starcie oraz od postaci funkcyjnej równania

Metoda połowienia (bisekcji)

- rozwiązania szukamy w przedziale, w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji, w tzw. **przedziale izolacji pierwiastka** (wewnątrz tego przedziału pierwsza pochodna funkcji nie zmienia znaku)
- przedział wyznacza się badając zmianę znaku funkcji

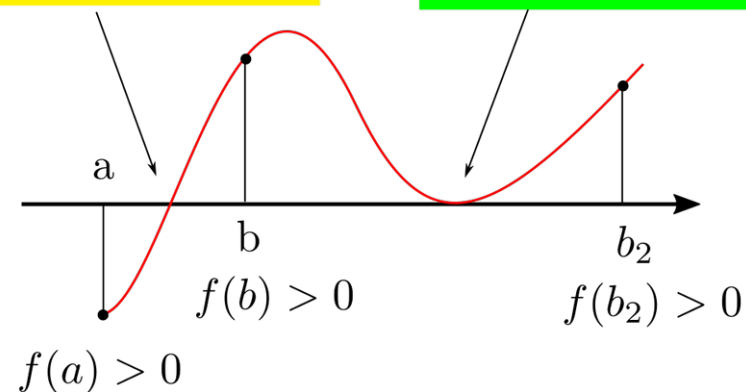
Założenia:

- w przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek, gdy są dwa pierwiastki - po zawężeniu przedziału znak funkcji na obu krańcach może być identyczny \rightarrow metoda zawodzi
- na końcach przedziału wartości funkcji mają różne znaki

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

ten punkt znajdziemy

tego nie znajdziemy



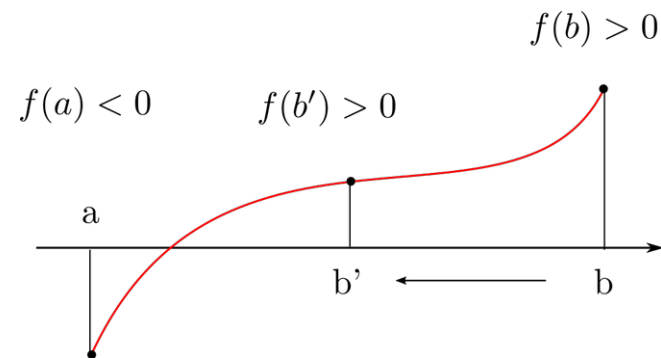
Algorytm metody bisekcji

- dzielimy przedział izolacji na pół $x_1 = \frac{b+a}{2}$
- sprawdzamy czy spełniony jest warunek $f(x_1) = 0$

jeśli tak to mamy rozwiązanie, jeśli nie to przechodzimy do kolejnego punktu

- z dwóch przedziałów $[a, x_1]$ oraz $[x_1, b]$ wybieramy ten, w którym wartości funkcji na krańcach przedziałów mają różne znaki

$$f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$$



- powtarzamy kroki 1-3, co powoduje że długości kolejnych przedziałów maleją

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^k} (b - a)$$

- lewe krańce przedziałów tworzą ciąg niemalejący ograniczony z góry, natomiast prawe tworzą ciąg nie rosnący ograniczony z dołu, istnieje ich wspólna granica w punkcie α punkt ten jest poszukiwanym rozwiązaniem równania nieliniowego

Przykład - znaleźć w przedziale [1,2] metodą połowienia pierwiastek równania

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

- zapisujemy funkcję nieliniową $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
- sprawdzamy przedział izolacji pierwiastka $f(1) = -4$ $f(2) = 3$ $f(a) \cdot f(b) = -12 < 0$
- wyniki kolejnych przybliżeń rozwiązania

x	f(x)
1.0	-4
2.0	3
1.5	-1.874
1.75	0.17187
1.625	-0.94335
1.6875	-0.40942
1.71875	-0.12487
1.73437	0.02198
.....
1.73205	0.000000

- wadą metody wolna zbieżność w otoczeniu punktu stanowiącego rozwiązanie
- zaletą jest natomiast niezawodność metody.

Zbieżność metody iteracyjnej

- ciąg przybliżeń jest zbieżny, gdy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \quad f(a) = 0$

- zdefiniujemy błąd rozwiązania w k-tej iteracji

$$\varepsilon_k = a - x_k$$

- w punkcie $x=a$ **metoda jest rzędu p**, jeśli istnieje liczba rzeczywista

$$p \geq 1$$

dla której zachodzi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - a|}{|x_k - a|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = C \neq 0$$

- liczbę C nazywamy **stałą asymptotyczną błędu**

$$|\varepsilon_{k+1}| = C|\varepsilon_k|^p$$

- im wyższa wartość p tym metoda jest wydajniejsza - błąd maleje szybciej

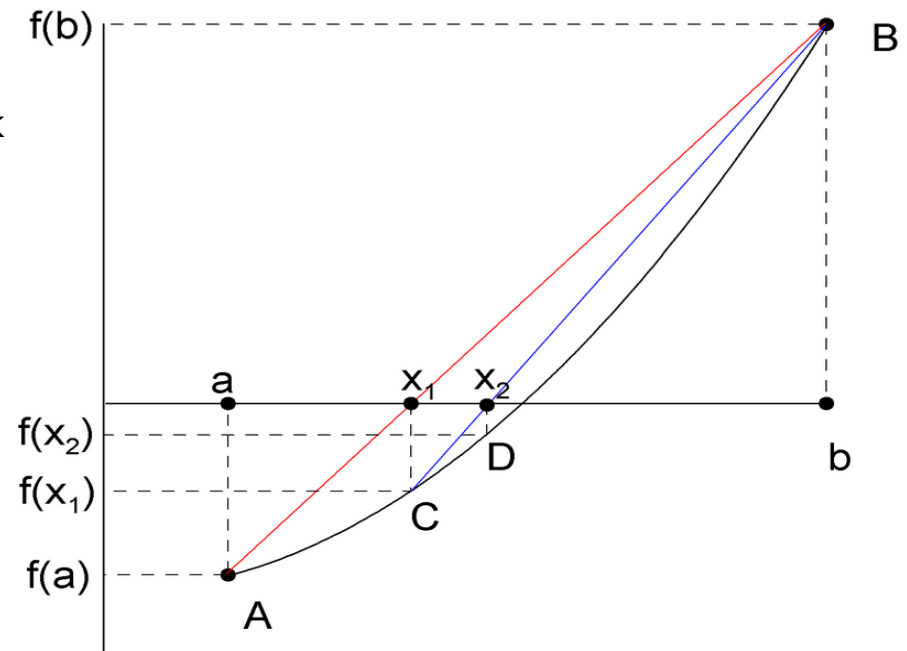
Metoda Regula Falsi

- w metodzie tej wykorzystuje się założenie istnienia lokalnej liniowości funkcji (fałszywe, stąd nazwa).

zakładamy ponadto:

- w przedziale $[a,b]$ funkcja ma tylko jeden pierwiastek
- $f(a)f(b) < 0$
- funkcja jest klasy C^2 (wielomian 1 stopnia)
- pierwsza i druga pochodna nie zmieniają znaku w przedziale $[a,b]$
- rzęd metody jak dla bisekcji

$$p = 1$$



Rys. Idea metody Regula Falsi dla funkcji wypukłej

algorytm metody **Regula Falsi**:

- przez punkty A i B prowadzimy prostą o równaniu

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad [y = 0]$$

- punkt x_1 w którym prosta przecina oś 0x przyjmuje się za pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka równania

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

- sprawdzamy warunek, czy: $f(x_1)=0$, jeśli tak to przerywamy obliczenia
- jeśli $f(x_1) \neq 0$ to sprawdzamy na końcach którego przedziału ($[A, x_1]$, $[x_1, B]$) wartości funkcji mają różne znaki - przez te punkty prowadzimy kolejną prostą i powtarzamy poprzednie kroki

Uwaga: jeśli w przedziale $[A, B]$

a) $f^{(1)}(x) > 0$ oraz $f^{(2)}(x) > 0$ to B jest punktem stacjonarnym (prawy brzeg ustalony)

b) $f^{(1)}(x) > 0$ oraz $f^{(2)}(x) < 0$ to A jest punktem stacjonarnym

- metoda generuje ciąg przybliżeń, elementy ciągu wyznaczamy iteracyjnie:

$$x_0 = a$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Uwagi:

- Metoda Regula Falsi jest zbieżna do dowolnej funkcji ciągłej w przedziale $[a,b]$ jeśli wartość pierwszej pochodnej jest ograniczona i różna od zera w otoczeniu pierwiastka
- Obliczenia przerywa się jeśli dwa kolejne przybliżenia różnią się o mniej niż założone ε .
- Wadą jest wolna zbieżność ciągu przybliżeń – rząd metody $p=1$.

Metoda siecznych

- jest modyfikacją metody **Regula Falsi**, prostą przeprowadza się przez dwa ostatnie przybliżenia x_k i x_{k-1} (**metoda dwupunktowa**)
- kolejne przybliżenia w metodzie siecznych wyznacza się według relacji rekurencyjnej

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

- zbieżność metody jest większa niż w metodzie RF, rząd metody

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$$

- należy dodatkowo przyjąć, że $|f(x_k)|$ mają tworzyć ciąg wartości malejących, jeśli w kolejnej iteracji $|f(x_k)|$ zaczyna rosnąć, należy przerwać obliczenia i ponownie wyznaczyć punkty startowe zawężając przedział izolacji

Przykład - szukamy dodatniego pierwiastka równania

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$$

- wybieramy punkty startowe metody RF i siecznych

$$x_1 = \pi/2$$

$$x_2 = \pi$$

	Regula Falsi	Metoda siecznych
x_3	1.75960	1.75960
x_4	1.84420	1.93200
x_5	1.87701	1.89242
x_6	1.88895	1.89543
x_7	1.89320	1.89549
x_8	1.89469	
x_9	1.89521	
x_{10}	1.89540	
x_{11}	1.89546	
x_{12}	1.89548	
x_{13}	1.89549	

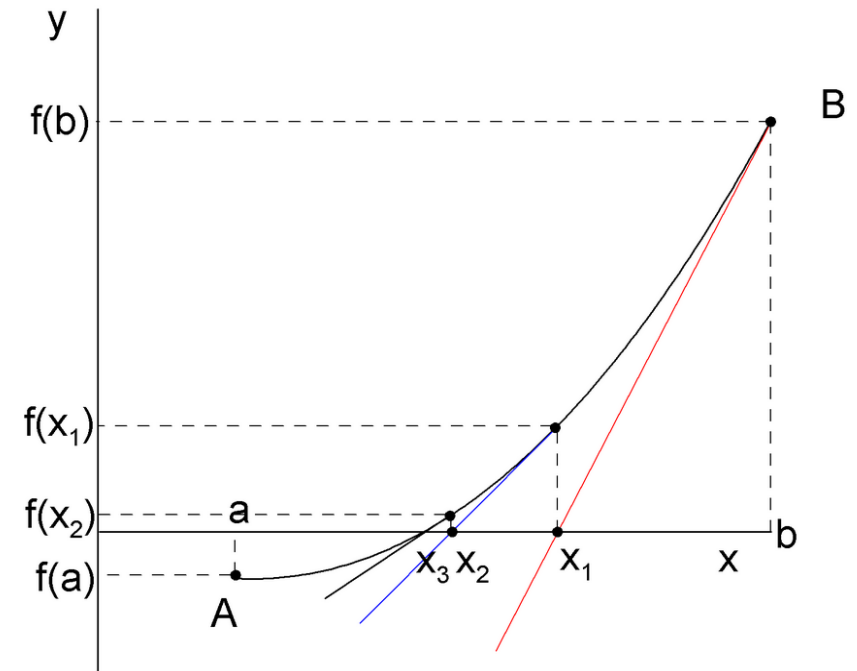
Metoda Newtona-Raphsona (metoda stycznych)

sposób postępowania:

- z końca przedziału $[a,b]$ w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna należy poprowadzić styczną do wykresu funkcji $y=f(x)$

(w ten sposób wykonujemy jedną iterację mniej, bo zbliżamy się od pierwiastka z jednej strony - patrz rysunek)

- styczna przecina oś OX w punkcie x_1 który stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania
- sprawdzamy czy $f(x_1)=0$, jeśli nie to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną
- druga styczna przecina oś OX w punkcie x_2 który stanowi drugie przybliżenie
- kroki 3-4 powtarzamy iteracyjnie aż spełniony będzie warunek



$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

Wzór iteracyjny w metodzie Newtona-Raphsona

- równanie stycznej poprowadzonej z punktu B

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

- dla $y=0$, otrzymujemy pierwsze przybliżenie

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

- równanie stycznej w k-tym przybliżeniu

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

- wzór iteracyjny na położenie k-tego przybliżenia
pierwiastka równania nieliniowego w metodzie Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

- metoda Newtona jest **metodą jednopunktową**

szacowanie rzędu metody Newtona

- korzystamy z rozwinięcia Taylora w miejscu ostatniego przybliżenia x_k

$$f(a) = f(x_k) + f'(x_k)(a - x_k) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(a - x_k)^2, \quad \zeta \in [a, x_k]$$

- wiemy że $f(a)=0$, więc po przekształceniu wzoru Taylora otrzymujemy

$$a = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(x_k)} \overbrace{(a - x_k)^2}^{\varepsilon_k}}_{\varepsilon_{k+1}}$$

$$\varepsilon_{k+1} = -\frac{f''(\zeta)}{2f'(x_k)} \varepsilon_k^2 \quad / \cdot \frac{1}{\varepsilon_k^2}$$

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\frac{f''(\zeta)}{2f'(x_k)} \approx C \quad \rightarrow \quad p = 2$$

- rząd metody Newtona-Raphsona wynosi $p=2$

Przykład - zastosować metodę Newtona do znalezienia pierwiastka kwadratowego dodatniej liczby c

$$\sqrt{c} = x =? \quad \rightarrow \quad x^2 - c = 0$$

- szukamy miejsca zerowego funkcji nieliniowej

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

- wykorzystujemy relację rekurencyjną

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k}$$

co po przekształceniu daje

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{c}{x_k} \right)$$

Poszukiwanie pierwiastków wielokrotnych równania nieliniowego

- liczbę α nazywamy r -krotnym ($r \geq 2$) pierwiastkiem równania $f(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $(r-1)$ -krotnym pierwiastkiem równania

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = (x - a)^r = 0$$

$$f'(x) = r(x - a)^{r-1} = 0$$

- metody
 - połowienia, RF, siecznych** - nadają się do poszukiwania pierwiastków tylko o **nieparzystej krotności**, rząd metody siecznych obniża się (wolniejsza zbieżność)
 - metoda Newtona** - pozwala znaleźć pierwiastki o parzystej i nieparzystej krotności
- aby utrzymać rząd metody (przyśpieszyć zbieżność) stosuje się **zmodyfikowane wzory iteracyjne**

Modyfikacje wzorów iteracyjnych

- znamy krotność r pierwiastka równania - wówczas możemy wykorzystać tę informację w **metodzie Newtona**

$$x_{k+1} = x_k - r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

- w praktyce bardzo rzadko znamy wartość r przez co zastosowanie powyższego wzoru jest mocno ograniczone
- rzęd metody pozostaje bez zmian $p=2$
- nie znamy krotności pierwiastka - stosujemy podstawienie

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- dla funkcji pomocniczej $u(x)$ krotność pierwiastka wynosi $r=1$

- zmodyfikowany wzór iteracyjny w **metodzie siecznych**

$$x_{k+1} = x_k - u(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{u(x_k) - u(x_{k-1})}$$

- zmodyfikowany wzór iteracyjny w **metodzie Newtona**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$

$$u'(x_k) = 1 - \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} u(x_k)$$

- liczenie 2 pochodnej może być kłopotliwe

Przykład - wyznaczyć dodatni pierwiastek równania metodą Newtona

$$f(x) = \left(\sin(x) - \frac{1}{2}x \right)^2 = 0$$

- równanie jest nieliniowe,
a krotność pierwiastka $r=2$

- jako punkt startowy wybieramy

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

- bez modyfikacji wzoru, metoda znajduje
miejsce zerowe, ale potrzebuje więcej itracji

	m. Newtona	m. Newtona - r	m. Newtona - u(x)
x_2	1.78540	2.00000	1.80175
x_3	1.84456	1.90100	1.88963
x_4	1.87083	1.89551	1.89547
x_5	1.88335	1.89549	1.89549
x_6	1.88946		
x_7	1.89249		
x_8	1.89399		
x_9	1.89475		
x_{10}	1.89512		
x_{11}	1.89531		
x_{12}	1.89540		
x_{13}	1.89545		
x_{14}	1.89547		
x_{15}	1.89548		
x_{16}	1.89549		

Układy równań nieliniowych

- układ równań nieliniowych

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \end{cases}$$

zapisujemy w postaci wektorowej

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \dots, f_n) \\ \mathbf{x} &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Uwaga: pogrubiona czcionka oznacza wielkość wektorową

- dla takiej postaci układu wyprowadza się wzory iteracyjne, ogólny wzór iteracyjny (**wielokrokowy**)

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \dots, \mathbf{x}_{i-n+1})$$

- zakładamy, że funkcja wektorowa \mathbf{f} ma w otoczeniu rozwiązania

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

funkcję odwrotną

$$\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Funkcję **odwrotną** $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ możemy rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu \mathbf{y}_i

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_i) + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j!} d^j \mathbf{g}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y} - \mathbf{y}_i) + \frac{1}{(m+2)!} d^{m+2} \mathbf{g}(\zeta, \mathbf{y} - \mathbf{y}_i), \quad \zeta \in [\mathbf{y}, \mathbf{y}_i]$$

$$d^j h(\mathbf{y}, \Delta \mathbf{y}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0} D_{i_1, i_2, \dots, i_n} h(\mathbf{y}) \Delta y_1^{i_1} \Delta y_2^{i_2} \dots \Delta y_n^{i_n}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_n = j$$

$D_{i_1, i_2, \dots, i_n} h(\mathbf{y})$ - pochodna cząstkowa funkcji rzędu j

$\Delta \mathbf{y} = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n)$ - przyrosty (przesunięcia) w wybranych kierunkach

- szukane rozwiązanie ma postać

$$\alpha = g(\mathbf{0}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

- po odrzuceniu reszty w rozwinięciu Taylora i uwzględnieniu powyższego warunku otrzymujemy **n-wymiarowy odpowiednik metody Newtona**
- dla $m=0$ uzyskamy **metodę jednokrokową**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{g}(\mathbf{y}_k, -\mathbf{y}_k) = \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}_k)}{\partial y_{j,k}} y_{j,k}$$



j - numer elementu wektora
k - numer iteracji

- jak znaleźć pochodne funkcji odwrotnej której nie znamy?**
- przykład dla układu 2 funkcji zależnych od dwóch zmiennych

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = 0$$

$$f_2(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Pochodne funkcji odwrotnej możemy policzyć numerycznie

- przykład dla 2 funkcji dwuargumentowych

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2) = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2) = 0 \end{cases}$$

policzmy **różniczki zupełne** funkcji f_1, f_2, \dots

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 \\ df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 \end{aligned}$$

i zapiszmy je w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix}$$

interesują nas przyrosty wektora \mathbf{x} więc odwracamy zagadnienie (i macierz)

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix}$$

- jeśli funkcje f_1 i f_2 rozwijamy w szereg w otoczeniu pierwiastka to możemy założyć

$$\Delta\xi_1 \approx d\xi_1$$

$$\Delta\xi_2 \approx d\xi_2$$

również różniczki funkcji zastępujemy przyrostami

$$df_1 \approx f_1(\xi_1, \xi_2) - f_1(\boldsymbol{\alpha}) = f_1(\xi_1, \xi_2)$$

$$f_1(\boldsymbol{\alpha}) = f_2(\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

$$df_2 \approx f_2(\xi_1, \xi_2) - f_2(\boldsymbol{\alpha}) = f_2(\xi_1, \xi_2)$$

i podstawiamy do równania z macierzą pochodnych

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

po obliczeniu prawej strony dostajemy przyrosty wektora \mathbf{x}

$$\Delta\mathbf{x}_k = [\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \dots]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \Delta\mathbf{x}_k$$

W przypadku 2-wymiarowym macierz możemy łatwo odwrócić analitycznie

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$$

uwaga: elementy macierzowe
wyznaczamy w każdej
iteracji

Uwagi:

- w praktyce nie odwracamy macierzy, ale rozwiązujemy układ równań

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_i} \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_i}$$

- ponieważ elementy macierzowe wyznaczamy w każdej iteracji więc rozkład LU też się zmienia
- proces iteracyjny kończymy, gdy przesunięcia w **każdym kierunku** stają się mniejsze od wartości progowej

$$\max\{|\Delta \xi_j|; j = 1, 2, \dots, n\} < \Delta_{min}$$

Problem poszukiwania rozwiązań układu równań nieliniowych można sformułować jako problem poszukiwania minimum poniższej funkcji

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{x})$$

Funkcja osiąga minimum globalne dla dokładnego rozwiązania \mathbf{x} . Do jego znalezienia można użyć **metody największego spadku (minimalizacja wartości funkcji)**.

Wyznaczanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia

- w wielu zagadnieniach pojawiają się wielomiany np.

interpolacja, aproksymacja, całkowanie

wówczas istotna może być informacja dotycząca lokalizacji zer wielomianu, mogą one mieć określoną interpretację, np. zera wielomianu w mianowniku to punkty osobliwe, itp

- w algorytmach wyznaczania zer wielomianów iteracyjnie dzielimy wielomian przez
 - a) czynnik liniowy (dwumian)
 - b) czynnik kwadratowy (trójmian)

Wielomian

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dzielimy przez dwumian

$$(z - z_j)$$

chcemy aby ten
wyraz zniknął

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia (n-1) i reszta z dzielenia

$$f(z) = (z - z_j) (b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0) + R_j$$

- z porównania współczynników przy jednakowych potęgach otrzymujemy zależności

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - z_j b_{n-1} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0 - z_j b_1 \\ a_0 &= R_j - z_j b_0 \end{aligned}$$

- zatem współczynniki nowego wielomianu można obliczać rekurencyjnie

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ b_k &= a_{k+1} + z_j b_{k+1} \\ k &= n-1, n-2, \dots, 0 \\ R_j &= a_0 + z_j b_0 \end{aligned}$$

- dzieląc jeszcze raz wielomian otrzymamy

$$f(z) = (z - z_j)^2 (c_{n-2}z^{n-2} + c_{n-3}z^{n-3} + \dots + c_0) + R'_j(z - z_j) + R_j$$

- wartości współczynników c_i wyznaczamy analogicznie jak w poprzednim przypadku
- naszym celem jest iteracyjna zmiana wartości z_j tak aby $R_j=0$, w tym celu użyjemy metod **Newtona** i **siecznych**

Obliczanie zer za pomocą iterowanego dzielenia

Zera wielomianu możemy wyznaczyć iteracyjnie stosując zmodyfikowane wzory jednokrokowe

- metoda siecznych

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j(z_j - z_{j-1})}{R_j - R_{j-1}} \quad - \text{potrzebne 2 punkty startowe}$$

- metoda Newtona

$$z_{j+1} = z_j - \frac{R_j}{R'_j} \quad - \text{potrzebny tylko 1 punkt startowy}$$

Uwagi:

- mianownik w metodzie Newtona wyzeruje się tylko gdy z_j będzie zerem wielokrotnym
- dla pojedynczego zera, znika tylko licznik
- po wyznaczeniu zera usuwamy je z wielomianu dokonując **deflacji czynnikiem liniowym**, w zasadzie tę czynność już wykonaliśmy

$$f(z) = \underbrace{(z - z_j)}_{\text{usuwamy}} \underbrace{(b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0)}_{\text{zredukowany wielomian}} + \underbrace{R_j}_{=0}$$

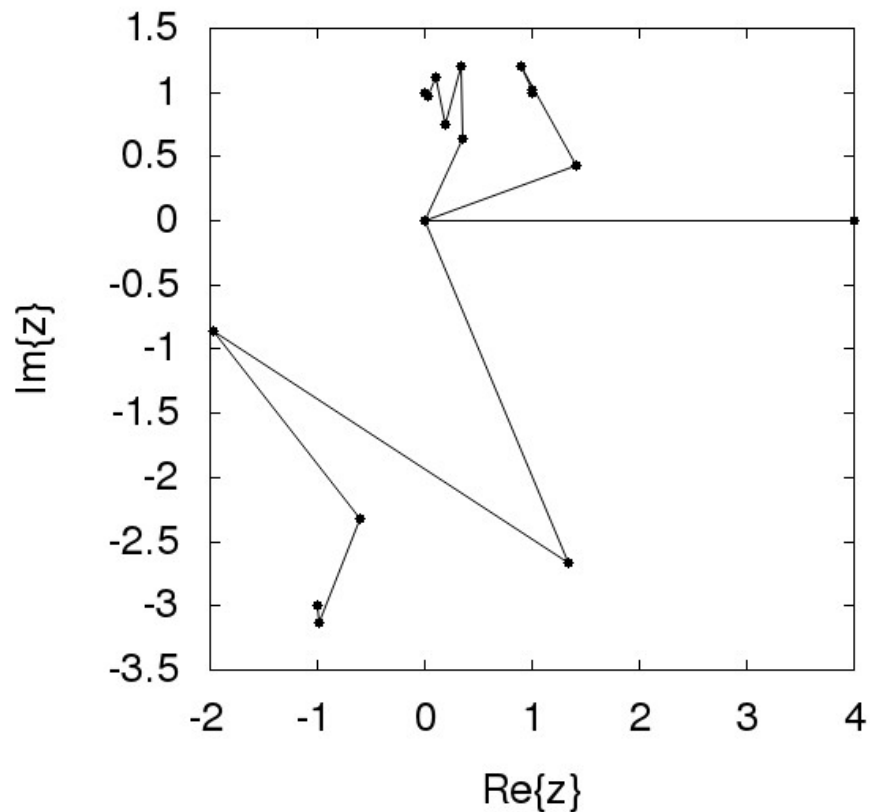
Przykład. Znaleźć zera wielomianu

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

dla współczynników

$$a_0 = 16 + i8 \quad a_1 = -20 + i14 \quad a_2 = 4 - i8 \quad a_3 = -4 - i \quad a_4 = 1 + i0$$

start: $z=(0,0)$



start: $z=(-10,-10)$

