Interpolacja

Plan wykładu:

1. Idea interpolacji wielomianowej

2. Interpolacja Lagrange'a

3. Dobór węzłów interpolacji - wielomiany Czebyszewa

4. Ilorazy różnicowe, różnice progresywne , różnice wsteczne

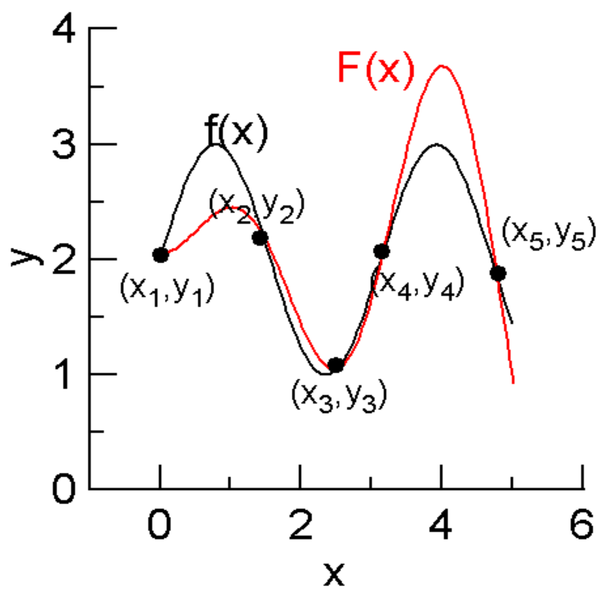
5. Interpolacja Newtona

6. Interpolacja funkcjami sklejanymi

- w przedziale [a,b] danych jest n+1 różnych punktów $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ (węzły interpolacji) oraz wartości funkcji y=f(x) w tych punktach:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ \cdots, f(x_n) = y_n$$

interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.



- problem interpolacji sprowadza się do znalezienia **funkcji interpolującej F(x)**, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja y=f(x) czyli **funkcja interpolowana** (której postać funkcyjna może nie być nawet znana)

Do czego służy interpolacja?

- dla stablicowanych wartości funkcji i określonych położeń węzłów szukamy przybliżenia funkcji pomiędzy węzłami
  a) zagęszczanie tablic
  b) efektywniejsze (szybsze) rozwiązywanie równań nieliniowych

- interpolacja wielomianowa pozwala lokalnie przybliżyć dowolną funkcję (np. wyrażającą się skomplikowaną formułą) wielomianem
  – ułatwia to analizę rozwiązań w modelach fizycznych,
  np. ułatwia całkowanie, numeryczne obliczanie wartości wyrażeń etc.

- wykorzystuje się w całkowaniu numerycznym

- w dwóch i trzech wymiarach do modelowania powierzchnii

Interpolację najczęściej przeprowadza się przy pomocy:

- wielomianów algebraicznych (nieortogonalne lub ortogonalne)

- wielomianów trygonometrycznych

- funkcji sklejanych

- powyższe funkcje stanowią **bazy funkcyjne**
  – **funkcja interpolująca** jest kombinacją elementów bazowych.

Idea interpolacji wielomianowej

Tw.

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Dowód

- n+1 węzłów rozmieszczonych jest w dowolny sposób w [a,b], szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- podstawiając do $W_n(x)$ kolejno $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ dostajemy układ n+1 równań na współczynniki a_i:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

- macierz współczynników układu to macierz Vandermode'a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

- wyznacznik jest wyznacznikiem Vandermode'a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \Rightarrow D = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

- wniosek: układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij}$$

D_{ij} – wyznaczniki macierzy dopełnień algebraicznych

i opisuje ono wielomian interpolacyjny (Lagrange'a)

Interpolacja Lagrange'a

- korzystamy z poprzedniego wyniku, podstawiamy

$$a_i = \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij} \quad \longrightarrow \quad W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- grupujemy składniki przy y_i

$$W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + y_1\Phi_1(x) + \cdots + y_n\Phi_n(x)$$

- funkcje $\Phi_i(x)$ są wielomianami co najwyżej stopnia n,
  zauważmy, że dla dowolnego x_i zachodzi zależność

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \ldots + y_n\Phi_n(x_i) = y_i$$

skąd wynika warunek

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j \neq i \\ 1 & \text{gdy } j = i \end{cases}$$

- wniosek: aby okreslić funkcje $\Phi_j(x)$ należy znaleźć taki wielomian, który zeruje się w węzłach $x_i \neq x_j$ oraz przyjmuje wartość 1 w węźle x_j

- szukaną funkcją mógłby być poniższy wielomian:

$$\Phi_j(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1) \ldots \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)$$

który w x_j przyjmuje wartość 1

$$1 = \lambda(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)$$

- otrzymaliśmy wielomian węzłowy Lagrange'a

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

Interpolacja

- szukany wielomian przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
W_n(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} \\
&+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \\
&+ \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x)\cdots(x_n-x_{n-1})} \\
&= \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}
\end{aligned}
$$

lub krócej, oznaczając

$$
\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)
$$

- wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma postać

$$
W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\left\{\frac{\omega_n(x)}{x-x_j}\right\}\Big|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}
$$

Przykład:

Dla węzłów

x= -2, 1, 2, 4

w których funkcja przyjmuje wartości

y= 3, 1, -3, 8

należy znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

$$
\begin{aligned}
W_3(x) &= 3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 1\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\
&- 3\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + 8\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 5
\end{aligned}
$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

- interesuje nas rożnica pomiędzy wartościami funkcji interpolowanej i interpolującej w pewnym punkcie $x \in [x_0, x_n]$ nie będącym węzłem

$$\varepsilon(x) = f(x) - W_n(x)$$

$$\varepsilon(x) = K(x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

- zakładamy, że funkcja f(x) jest **n+2** krotnie różniczkowalna (n+1 krotnie różniczkowalną funkcją jest wielomian W_n)

- wprowadzamy funkcję pomocniczą
  - jeśli znajdziemy wartość K i zażądamy znikania φ to dodatkowy wyraz będzie opisywał błąd interpolacji

$$\varphi(x) = f(x) - W_n(x) - K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

(K -stała), która spełnia warunek interpolacji

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$$

- wartość współczynnika K dobieramy tak aby pierwiastkiem funkcji φ(u) był punkt $\bar{x}$, wówczas możemy zapisać warunek na stałą K

$$K = \frac{f(\bar{x}) - W_n(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n)} = \frac{f(\bar{x}) - W_n(\bar{x})}{\omega_n(\bar{x})}$$

  - mianownik jest różny od 0 więc funkcja φ(x) jest n+2 krotnie różniczkowalna
  - pochodna funkcji ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale ograniczonym jej miejscami zerowymi (tw. Rolle'a) więc ma ich conajmniej n+1
  - każda kolejna pochodna ma o jedno miejsce zerowe mniej

- istnieje zatem taki punkt, że

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

podobnie dla wielomianu interpolującego

$$W_n^{(n+1)}(x) = 0 \qquad \omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

- n+1 pochodna funkcji pomocniczej ma postać

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$$

podstawiamy

$$x = \xi \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

wówczas oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego ma postać

$$\varepsilon(x) = f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

Oznaczmy kres górny modułu n+1 pochodnej

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$$

wzór określa górną granicę błędu interpolacji Lagrange'a

- wzór posłużyć do oszacowania błędu bezwględnego wzoru interpolacyjnego pod warunkiem, że znamy maksymalną wartość n+1 pochodnej f(x) w zadanym przedziale

Przykład. Oszacować błąd wzoru interpolacyjnego przy obliczaniu wartości

ln(100.5)=?

Dane są wartości:

ln(100), ln(101), ln(102), ln(103)

$$f(x) = ln(x),\ n = 3,$$
$$a = 100,\ b = 103,$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M_4 = \sup_{x\in[100,103]} |f^4(x)| = \frac{6}{100^4}$$

$$|ln100.5 - W(100.5)| \leq 2.344 \cdot 10^{-9}$$

Dobór węzłów interpolacji

- oszacowanie błędu interpolacji Lagrange'a zależy od
    - postaci funkcji (n+1 pochodna)
    - ilości węzłów (mianownik)
    - położenia węzłów ($\omega_n(x)$)

- wartość oszcowania można ograniczyć jedynie zmieniając położenia węzłów

- chcemy zatem, aby

$$\sup_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|$$

było jak najmniejsze – bo tylko na ten wyraz możemy mieć wpływ

- optymalne położenia węzłów stanowią zera wielomianów Czebyszewa

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos\left[n \cdot arc\ \cos(x)\right] \\ x &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

- postać wielomianów możemy określić korzystając z relacji rekurencyjnych

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= \cos\left[arc\ \cos(x)\right] = x \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ n \geq 2 \end{aligned}$$

- zera wielomianów określa formuła

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right),\ m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

n – stopień wielomianu

m – numer zera wielomianu

- szukamy funkcji $\omega_n(x)$, która musi być wielomianem Czebyszewa (znormalizowanym do 1 – relacja rekurencyjna dla $T_n(x)$)

$$\omega_n = T_n^*(x) \qquad \Longrightarrow \qquad T_n^*(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- skalowanie przedziału [-1,1] na [a,b]

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)], \;\; x \in [a,b]$$

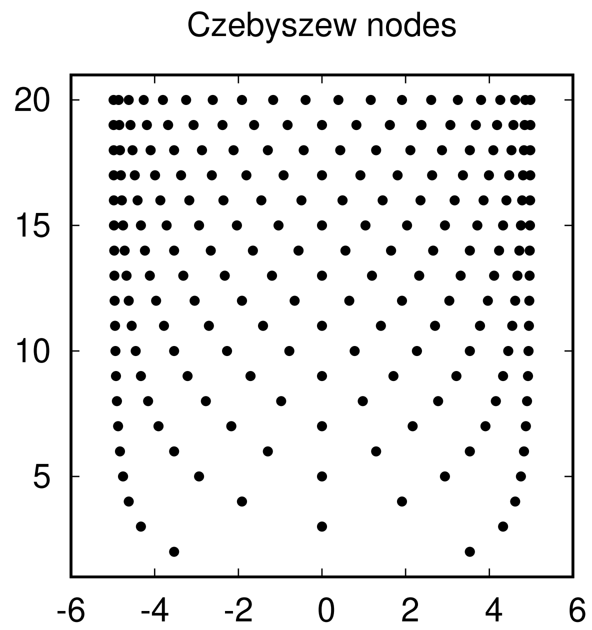
- skalowanie z [a,b] na [-1,1]

$$z = \frac{1}{b-a}(2x - b - a), \;\; z \in [-1,1]$$

- optymalne położenie węzłów można wyznaczyć wg wzoru:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2m+1}{2n+2}\pi + (b+a)\right] \qquad m = 0,1,\ldots,n$$

- węzły nie są rozmieszczone równomiernie, ale są zagęszczone na krańcach przedziału, przy takim wyborze węzłów oszacowanie błędu jest następujące



$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

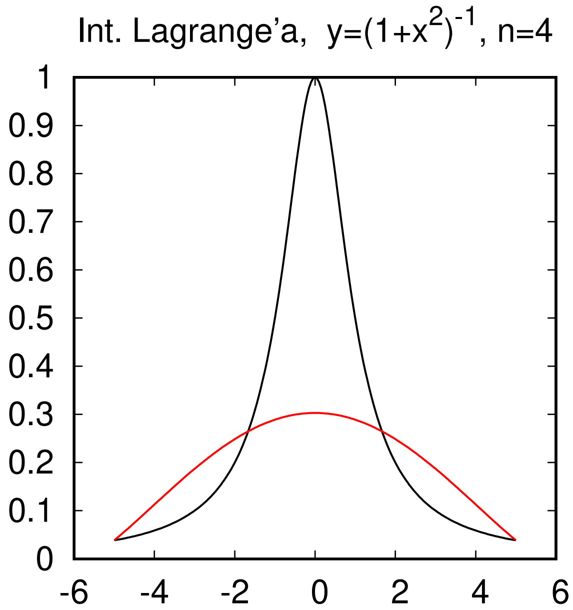
- wielomian wyznaczony przy takim ułożeniu węzłów na ogół nie daje **najmniejszego błędu** tylko jego **najmniejsze oszacowanie** – być może istnieje jeszcze lepszy rozkład węzłów

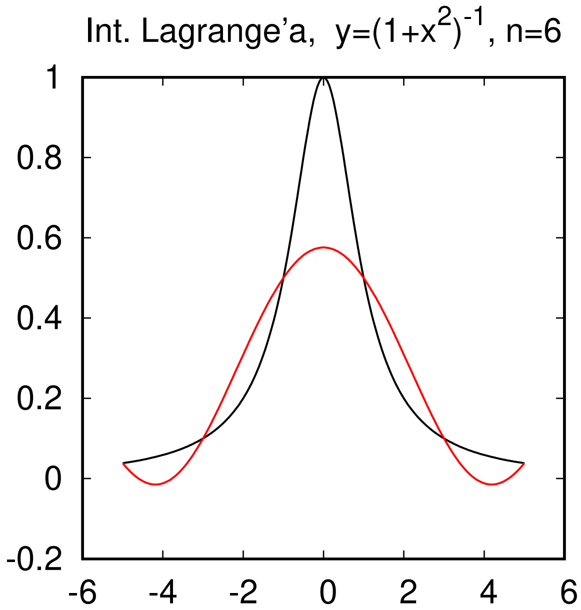
Zbieżność procesów interpolacyjnych

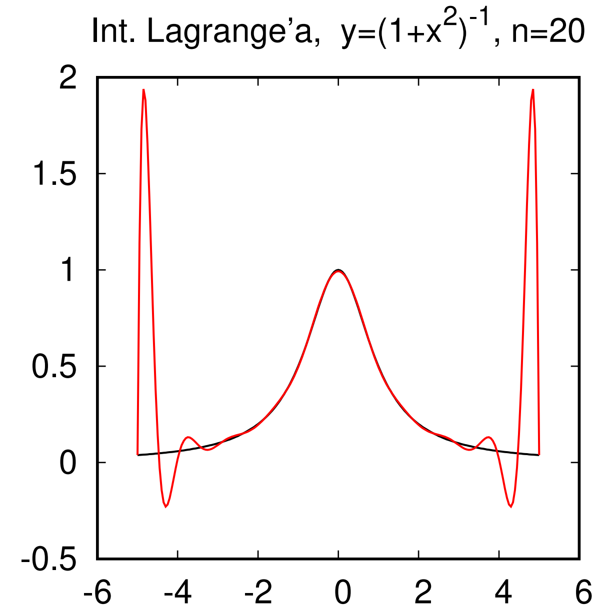
- Zwiększanie liczby węzłów interpolacji (przy stałych odległościach) nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Jest to **efekt Rungego** - zadanie jest źle uwarunkowane.

- Interpolacja funkcji, której przebieg znacznie różni się od przebiegu wielomianu interpolacyjnego, może nie dawać dobrych wyników przy dużej liczbie węzłów. Wpływ na to mają pojawiające się ekstrema w funkcji interpolującej, np.: $f(x)=1/x$.

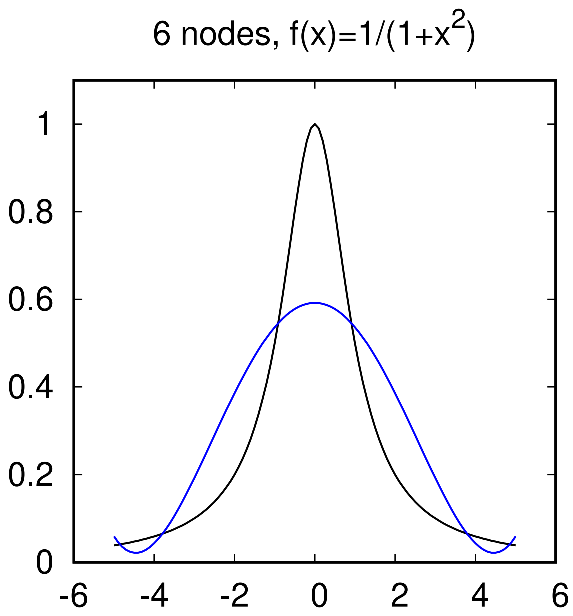
- interpolacja z węzłami równoodległymi

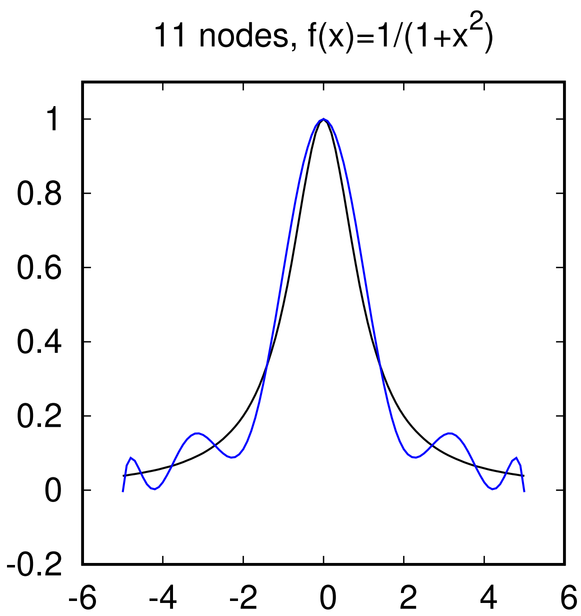


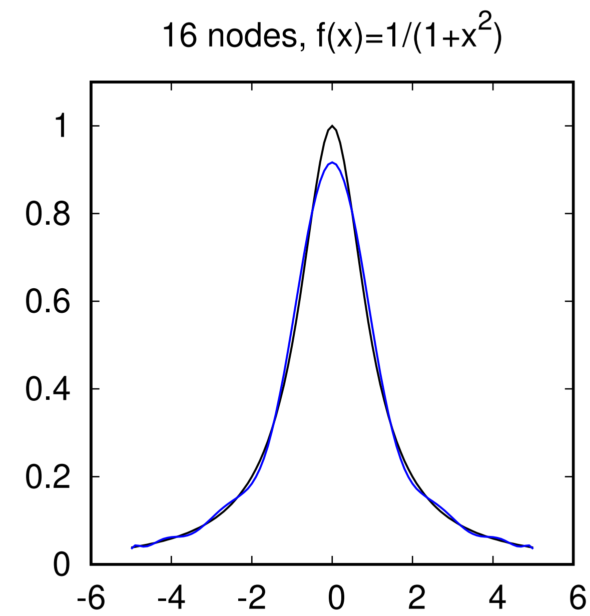




- interpolacja z węzłami Czebyszewa







Ilorazy różnicowe

- funkcja f(x) przyjmuje w punktach $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ x_i \neq x_j$ wartości

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

- zakładamy że odległości międzywęzłowe mogą nie być stałe

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Ilorazy różnicowe definiujemy następująco:

a) 1-go rzędu

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

b) 2-go rzędu

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

c) n-tego rzędu

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}$$

Przy założeniu i=0, iloraz różnicowy n-tego rzędu można zapisać:

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_n)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

lub w zwięzłej postaci

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_n)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{\omega_n'(x_j)}$$

Dowód przez indukcję:

dla n=1

$$f(x_i;x_{i+1})=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i+1}}+\frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}$$

Zazwyczaj tworzy się tablicę z ilorazami różnicowymi (łatwe do zaprogramowania na komputerze)

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe				
		1 rzędu	2 rzędu	3 rzędu	4 rzędu	5 rzędu
X_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0;x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$			
		$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$		$f(x_0;\ldots;x_4)$	
		$f(x_2;x_3)$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)$		$f(x_0;\ldots;x_5)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2;x_3;x_4)$		$f(x_1;\ldots;x_5)$	
		$f(x_3;x_4)$		$f(x_2;x_3;x_4;x_5)$		
x_4	$f(x_4)$		$f(x_3;x_4;x_5)$			
		$f(x_4;x_5)$				
x_5	$f(x_5)$					

Interpolacja Newtona dla nierównoodległych węzłów

- zakładamy że odległości między węzłami mogą być różne

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

- szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

musi on spełniać warunek interpolacji w węzłach

$$W_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

- szukany wieloman zapiszemy w równoważnej postaci

$$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)] + \cdots + [W_n(x) - W_{n-1}(x)]$$

gdzie różnice $\qquad W_k(x) - W_{k-1}(x)$

są wielomianami zdefiniowanymi następująco

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \qquad A_k = const$$

- stałą A wyznaczamy dokonując podstawienia $x=x_k$

$$W_k(x_k) - W_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})$$

- korzystamy z warunku $$W_k(x_k) = f(x_k)$$

$$A_k \quad = \quad \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\frac{\omega_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_i)\omega'_{k-1}(x_i)}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$A_k = \frac{f(x_k)}{\omega'_k(x_k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i)}{(x_k - x_i)\omega'_{k-1}(x_i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_k(x_i)}$$

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_k(x_i)}\right)\omega_{k-1}(x)$$

wyrażenie w nawiasie jest **ilorazem różnicowym k-tego rzędu**

Wielomian interpolacyjny można zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= f(x_0) + f(x_0;x_1)\omega_0(x) + f(x_0;x_1;x_2)\omega_1(x) \\ &+ \cdots + f(x_0;x_1;\cdots;x_n)\omega_{n-1}(x) \end{aligned}$$

powyższa formuła nazywana jest **wzorem interpolacyjnym Newtona** dla nierównych odstępów argumentów.

Przykład.
Znaleźć wielomian interpolujący funkcję f(x) dla stablicowanej funkcji:

f(0)=1, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=5, f(6)=7

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;x_{i+1})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+2})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+3})$	$f(x_i;\ldots;x_{i+4})$
0	**1**				
		1			
2	3		**-2/3**		
		-1		**2/3**	
3	4		2		**-2/9**
		3		-2/3	
4	5		-2/3		
		1			
6	7				

$$\begin{aligned} W_4(x) &= 1 + 1(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-3) \\ &- \frac{2}{9}(x-0)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1 \end{aligned}$$

Wnioski:

- interpolacja **wielomianami algebraicznymi** jest prosta ale ma istotną wadę. Proste zwiększenie liczby węzłów nie prowadzi do polepszenia interpolacji, a zastosowanie wielomianów Czebyszewa daje poprawę tylko w szczególnych przypadkach (jak interpolować funkcję silnie oscylującą w środku przedziału?).

- trzeba zmienić podejście do problemu i zrezygnować z użycia rozciągłych na całym przedziale interpolacji **wielomianów wysokiego stopnia** na rzecz **wielomianów niskiego stopnia** (brak efektu Rungego), ale zdefiniowanych w rozdzielnych obszarach międzywęzłowych.

- wielomiany te powinniśmy tak do siebie dopasować („skleić”), aby globalnie odtwarzały przebieg funkcji ciągłej i gładkiej (uciąglenie pochodnych) → stąd nazwa: **funkcje sklejane, sklejki**

Interpolacja funkcjami sklejanymi - sklejki

- w przedziale [a,b] mamy n+1 punktów takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

punkty te określają podział przedziału [a,b] na n podprzedziałów tj. $[x_i, x_{i+1}]$.

- funkcję s(x) określoną na przedziale [a,b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia m (*m*≥*1*) jeżeli:
    - s(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i; x_{i+1})$, i=0,1,...,n-1

- punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej, w każdym przedziale (x_i, x_{i+1}) funkcja s(x) jest wielomianem stopnia conajwyżej m:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1})$$

- funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \qquad x \in [a,b]$$

mamy dwie możliwości:

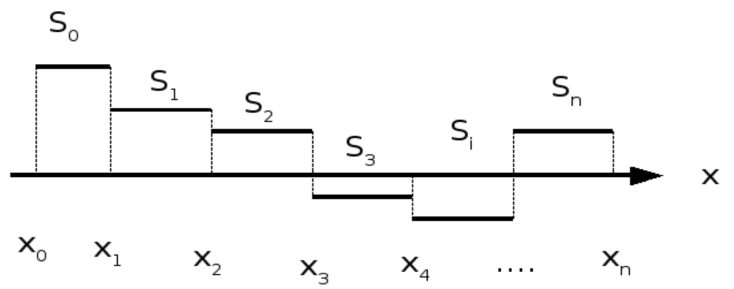
1) szukamy postaci s_i, wówczas c_i=1
2) zakładamy postać s_i i szukamy c_i

- w każdym z n podprzedziałów aby określić s(x) należałoby wyznaczyć m+1 stałych
- żądamy ciągłości pochodnych rzędu 0,1,2,..,m-1 w każdym z węzłów (sklejamy rozwiązania) co daje nam m(n-1) warunków
- ostatecznie funkcja s(x) zależy „jedynie” od:

$$n(m+1)-m(n-1)=\mathbf{n+m}$$

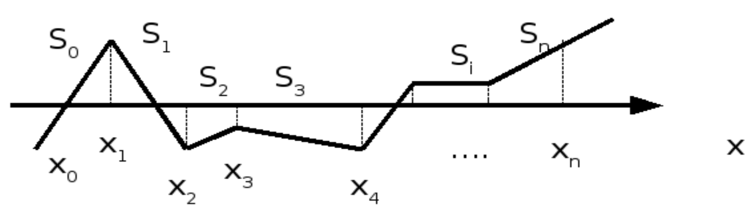
parametrów które należy wyznaczyć.

m=0



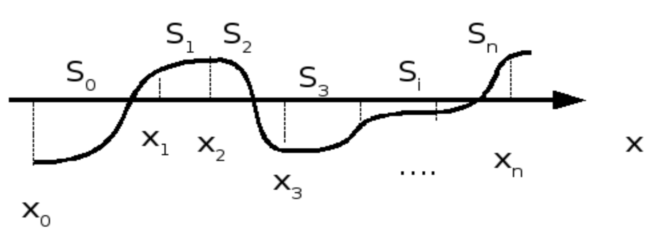
← funkcje nie „sklejają się”

m=1



← funkcja ciągła, ale pochodne nie są ciągłe

m=2



← funkcja ciągła, pierwsza pochodna też ciągła

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (m=3)

- funkcję s(x) nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji f(x), jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, \ldots, n; \; n \geq 2$$

$$s_i(x) = c_{i,3}x^3 + c_{i,2}x^2 + \cdots + c_{i,1}x + c_{i,0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1})$$

- do określenia funkcji s(x) stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie (n+3) parametrów, ponieważ ilość węzłów jest równa n+1 pozostają 2 stopnie swobody
→ musimy nałożyć dwa dodatkowe warunki

- rodzaj tych warunków zależy od funkcji f(x) lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a,b]:

1 rodzaj warunków
(1 pochodna)

$$s^{(1)}(a+0) = \alpha_1$$
$$s^{(1)}(b-0) = \beta_1$$

2 rodzaj warunków
(2 pochodna)

$$s^{(2)}(a+0) = \alpha_2$$
$$s^{(2)}(b-0) = \beta_2$$

gdzie: $\alpha_1, \; \alpha_2, \; \beta_1, \; \beta_2$ są ustalonymi liczbami

3 rodzaj warunków stosuje się dla funkcji okresowych:

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), \; i = 1, 2$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

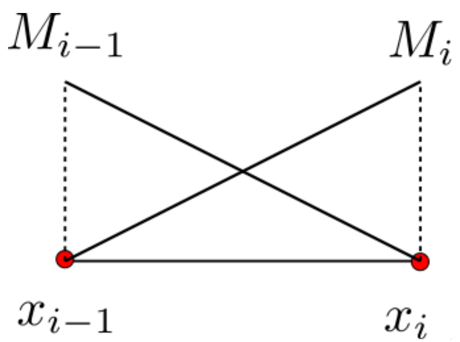
Oznaczmy drugą pochodną

$$M_j = s^{(2)}(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) **jest ciągła i liniowa** w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$.

Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} s^{(2)}_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x &\in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i &= x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$



Całkujemy powyższe wyrażenie

$$s^{(1)}_{i-1}(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + A_i$$

i jeszcze raz:

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} \\ &+ A_i(x - x_{i-1}) + B_i \end{aligned}$$

w równaniu brakuje nam 4 wielkości:

M_{i-1}, M_i, A_i, B_i

Stałe A_i i B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji:

$$s_{i-1}(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1}$$

$$s_{i-1}(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = y_i$$

$$B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i) = s_i^{(1)}(x_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$s_i^{(1)}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Porównując prawe strony dwóch powyższych równań dla każdego z węzłów uzyskamy (n-1) równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$$

- do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków
  - dla warunków z 1 pochodną:

$$2M_0 + M_1 = d_0 \qquad d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \qquad d_n = \frac{6}{h_1}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

- dla warunków z 2 pochodną

$$M_0 = \alpha_2 \qquad M_n = \beta_2$$

Otrzymujemy układ równań który można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

- macierz współczynników układu, jest macierzą silnie diagonalnie dominująca, moduły elementów na diagonali są większe od sumy modułów pozostałych elementów leżących w tym samym wierszu
- układy te mają więc jednoznaczne rozwiązanie – istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego spełniająca przyjęte warunki dodatkowe
- po rozwiązaniu układu równań - znalezieniu współczynników M_i – wyznaczamy funkcję sklejaną wg wzoru

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

- zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

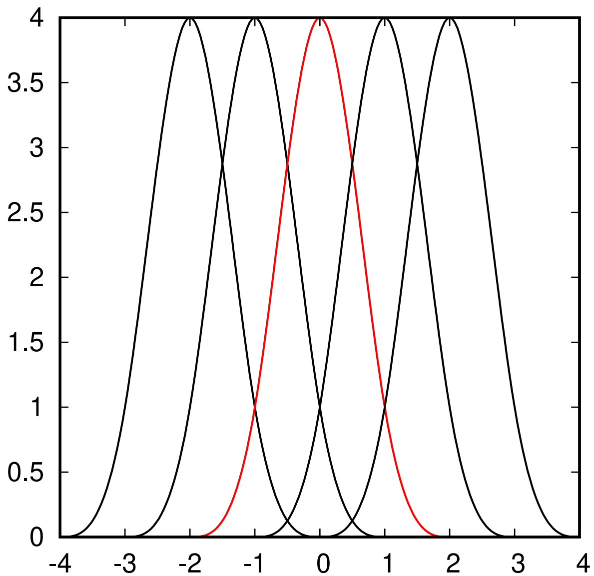
- bazę stanowią funkcje $\Phi_i^3(x), \quad i = -1, 0, 1, \dots, n, n+1$

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & x \notin [x_{-3}, x_{n+3}] \end{cases}$$

- funkcję s(x) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej:

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \qquad a \le x \le b$$

	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}
$\Phi^3_j(x)$	0	1	4	1	0
$[\Phi^3_j(x)]'$	0	3/h	0	-3/h	0
$[\Phi^3_j(x)]''$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0



Korzystając z warunku interpolacji można zapisać:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

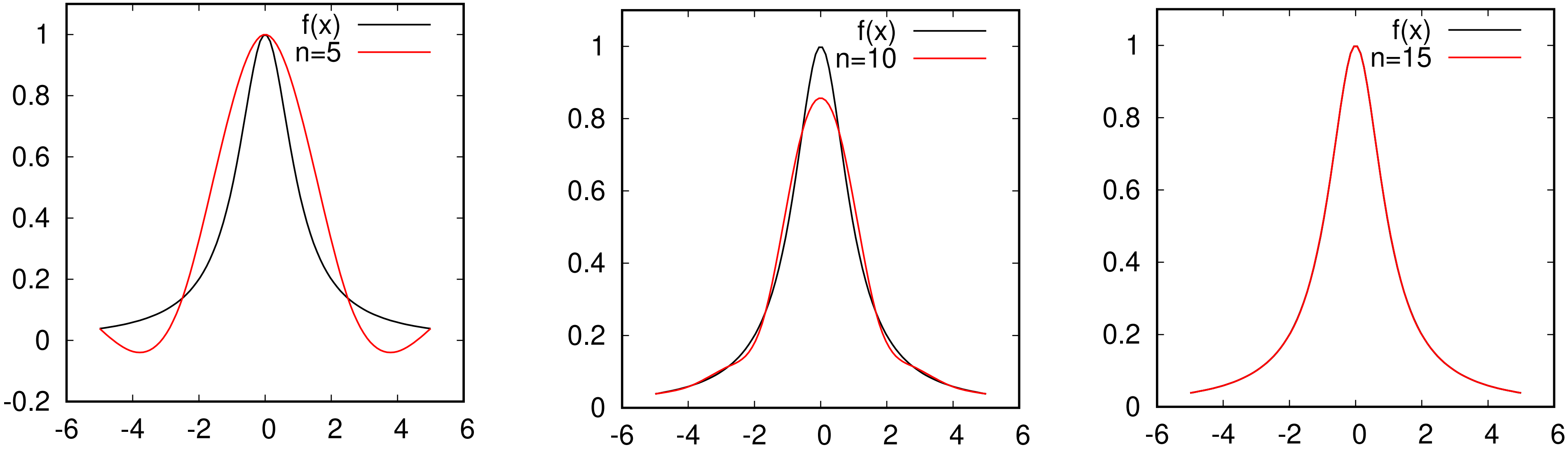
Jeśli rozważamy dodatkowo warunek z pierwszą pochodną to do powstałego układu równań należy dołączyć kolejne 2 równania:

$$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3}\alpha_1 \qquad -c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta_1$$

Po wyeliminowaniu współczynników c_{-1} i c_{n+1} otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & & \vdots & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{h}{3}\alpha_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta_1 \end{bmatrix}$$

- **interpolacja funkcjami sklejanymi - drugie pochodne**



- **interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie**