

## **Aproksymacja funkcji**

## Plan wykładu

1. Problem aproksymacji, normy, rodzaje aproksymacji
2. Aproksymacja średniokwadratowa
  - a) w bazie jednomianów
  - b) w bazie wielomianów ortogonalnych
  - c) w bazie funkcji trygonometrycznych
  - d) w bazie funkcji sklepanych
3. Aproksymacja Padego

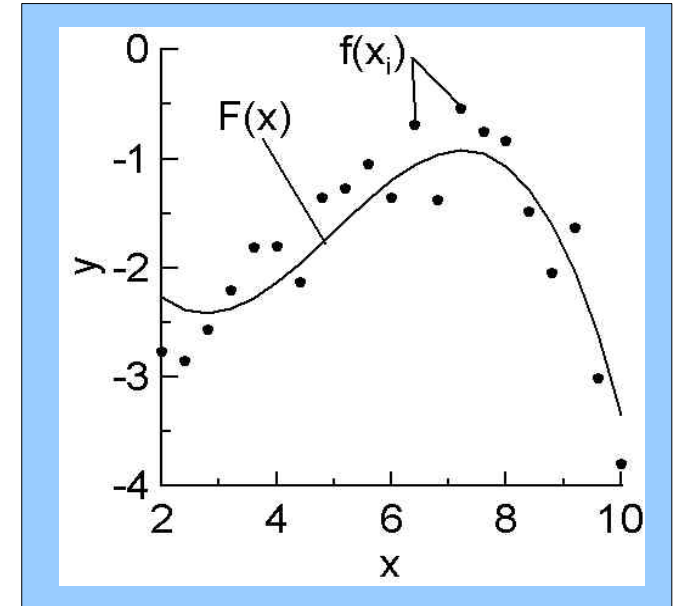
**Aproksymacja liniowa** funkcji  $f(x)$  polega na wyznaczeniu współczynników  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$$

gdzie:  $\varphi_i(\mathbf{x})$  - są funkcjami bazowymi  $(m+1)$  wymiarowej podprzestrzeni liniowej  $X_{m+1}$  ( $X_{m+1} \in X$ )

Żądamy aby funkcja  $F(x)$  spełniała warunek

$$\|f(x) - F(x)\| = \text{minimum}$$



Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

- podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(kx), \cos(kx)$$

- podprzestrzeń wielomianów stopnia  $m$  z bazą:

$$1, x, x^2, \dots, x^m$$

- podprzestrzeń funkcji, których o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu, np.:

$$\exp(a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

## Przykłady norm stosowanych w aproksymacji

- norma Czebyszewa

$$\|f(x) - F(x)\| = \sup_{[a,b]} |f(x) - F(x)|$$

- norma  $L_2$

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \int_a^b |f(x) - F(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

- norma  $L_2$  z wagą

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \int_a^b w(x) |f(x) - F(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gdzie:  $w(x)$  jest nieujemną ciągłą funkcją wagową

- jeśli funkcja  $f(x)$  jest określona na dyskretnym zbiorze punktów wówczas norma  $L_2$  z wagą przyjmuje postać:

$$\|f(x) - F(x)\| = \left( \sum_{i=0}^n w(x_i) [f(x_i) - F(x_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Aproksymacja średniokwadratowa

Dla funkcji ciągłej  $f(x)$  określonej w przedziale  $[a,b]$  poszukujemy minimum wartości całki:

$$\|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx$$

lub sumy gdy funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze  $n+1$  punktów (**metoda najmniejszych kwadratów**):

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^n w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$w(x_i) \geq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

## Aproksymacja jednostajna

Dla funkcji  $f(x)$  określonej w przedziale  $[a,b]$  poszukujemy  $F(x)$  dającej najmniejsze maksimum różnicy między nimi w całym przedziale:

$$\|F(x) - f(x)\| = \sup_{x \in [a,b]} |F(x) - f(x)|$$

**Tw. 1 (Weierstrassa)**

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła na skończonym przedziale  $[a,b]$ , to dla każdego  $\varepsilon$  dodatniego można dobrać takie  $n$ , że jest możliwe utworzenie wielomianu  $P_n(x)$  stopnia  $n$  ( $n=n(\varepsilon)$ ), który spełnia nierówność:

$$\|f(x) - P_n(x)\| \leq \varepsilon$$

Z twierdzenia powyższego wynika, że **zawsze** można znaleźć wielomian o dowolnie małym odchyleniu od funkcji  $f(x)$ .

**Tw. 2 (Weierstrassa)**

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}$  i okresową o okresie  $2\pi$  to dla każdego  $\varepsilon$  dodatniego istnieje wielomian trygonometryczny

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$n = n(\varepsilon)$$

spełniający dla wszystkich  $x$  nierówność

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

**Metoda aproksymacji średniokwadratowej**

Dysponując układem funkcji bazowych w podprzestrzeni  $X_n$ :

$$\varphi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

szukamy wielomianu  $F(x)$  będącego **najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym** funkcji  $f(x)$  na zbiorze  $X=(x_j)$ :

$$F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$$

Dla  $F(x)$  liczymy normę  $L_2$

$$\begin{aligned} H(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \\ &= \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right]^2 \\ &= \sum_{j=0}^n w(x_j) R_j^2 \end{aligned}$$

gdzie:  $R_j$  jest odchyleniem w punkcie  $x_j$

Szukamy minimum funkcji  $H$  (wielu zmiennych) ze względu na współczynniki  $a_0, a_1, \dots$

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Warunek ten generuje  $m+1$  równań liniowych z  $m+1$  niewiadomymi:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_k(x_j) = 0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Powyższy układ równań zwany jest **układem normalnym**. Ponieważ funkcje bazowe są liniowo niezależne, istnieje więc dokładnie jedno rozwiązanie minimalizujące wartość  $H$ . Układ równań można zapisać w postaci macierzowej (**zakładamy  $w(x)=1$** ):

$$D^T D \mathbf{a} = D^T \mathbf{f}$$

$$D = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Uwaga:

- a) Macierz  $D$  może nie być kwadratowa np. w tzw. **regresji liniowej** baza jest dwuelementowa  $\{1, x\}$ , a węzłów może być dowolna ilość
- b)  $D^T D$  jest macierzą kwadratową i symetryczną o rozmiarach  $(m+1) \times (m+1)$



**Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów**

Jako bazę przyjmujemy ciąg jednomianów

$$1, x, x^2, \dots, x^m$$

Warunek minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^n \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i x_j^i \right] x_j^k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

po zmianie kolejności sumowania

$$\sum_{i=0}^m a_i \left( \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \right) = \sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k$$

i wprowadzeniu oznaczeń

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \quad \rho_k = \sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k$$

otrzymujemy układ normalny:

$$\sum_{i=0}^m a_i g_{ik} = \rho_k \quad \longrightarrow \quad G^T \mathbf{a} = \boldsymbol{\rho}$$

## Uwagi:

- jeżeli  $m=n$  wówczas funkcja aproksymująca pokrywa się z wielomianem interpolującym
- stopień wielomianu aproksymującego powinien być znacznie mniejszy od liczby węzłów  $x_k$ , aby „wygładzić” ewentualne błędy pomiarowe
- dla  $m \geq 6$  macierz układu staje się źle uwarunkowana (**pojedyncza precyzja**), najprostszym remedium jest zastosowanie silniejszej arytmetyki (**podwójna precyzja**)

## Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

**Def.** Funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jeśli....

..... funkcje  $f$  i  $g$  spełniają warunki:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i)]^2 > 0$$

$$\sum_{i=0}^n [g(x_i)]^2 > 0$$

- w aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k$$

oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i) > 0$$

$$d_{jj} = \sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i)$$

- wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną

$$D^T D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

## Wielomiany ortogonalne dla węzłów rozmieszczonych dowolnie

- kolejne wielomiany ortogonalne wyznaczamy rekurencyjnie  
tj. na podstawie znajomości postaci wielomianów niższych stopni:

$$\varphi_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j\varphi_{j-1}(x) \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

z warunkami „startowymi”

$$\varphi_{-1}(x) = 0 \quad \varphi_0(x) = 1$$

Znajdźmy współczynnik  $\alpha_{j+1}$

Jak? - mnożymy przez  $\varphi_j(x_i)$  i sumujemy po  $x_i$  wykorzystując ortogonalność funkcji

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i)\varphi_{j+1}(x_i) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) [(x_i - \alpha_{j+1})\varphi_j(x_i) - \beta_j\varphi_{j-1}(x_i)]$$

$$\sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i)\varphi_{j+1}(x_i) = \sum_{i=0}^n x_i\varphi_j^2(x_i) - \sum_{i=0}^n \alpha_{j+1}\varphi_j^2(x_i) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i\varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_j^2(x_i)}$$

Identycznie znajdujemy współczynnik  
(mnożymy przez  $\varphi_{j-1}(x_i)$  i sumujemy po  $x_i$ )

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^n x_i\varphi_{j-1}\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_{j-1}^2(x_i)}$$

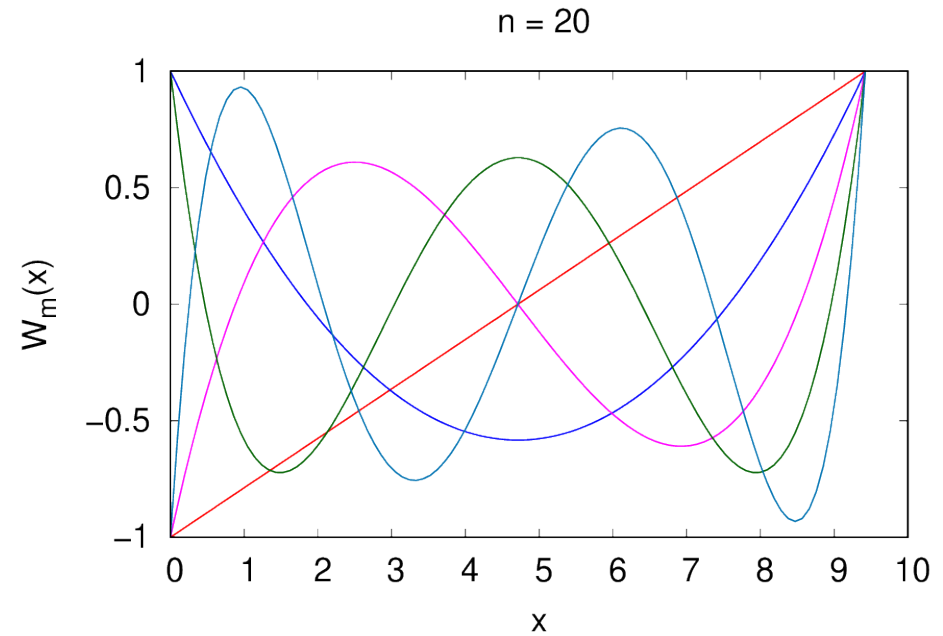
wielomiany Grama dla 20 węzłów

$$F(x) = \sum_{k=0}^m b_k \varphi_k(x)$$

$$b_k = \frac{C_k}{S_k}$$

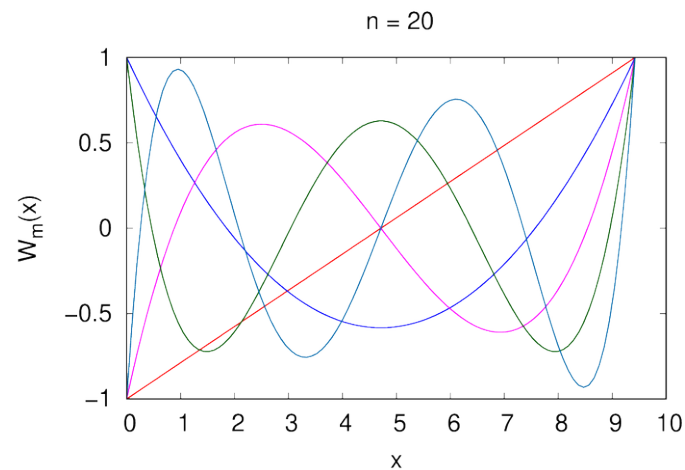
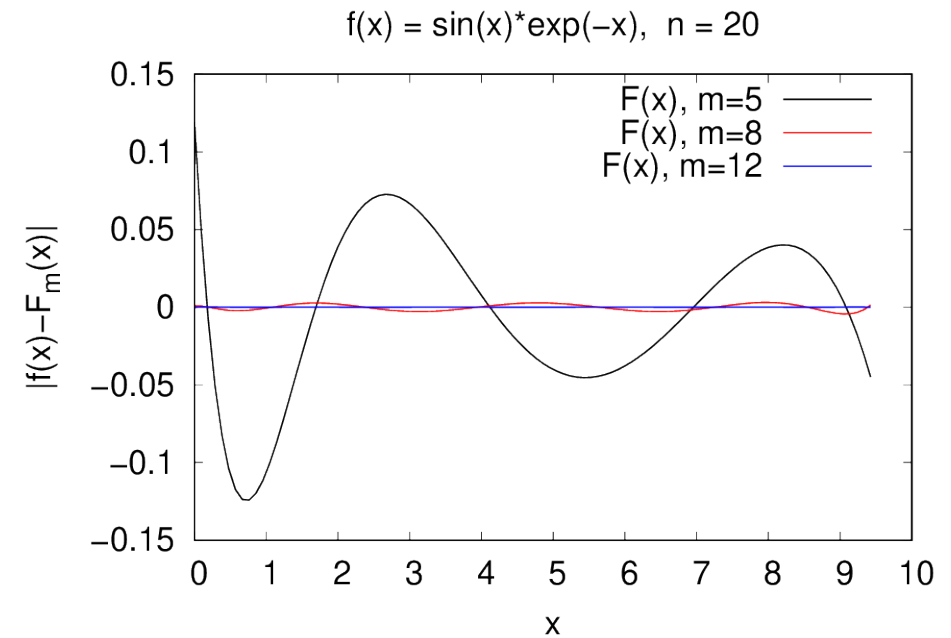
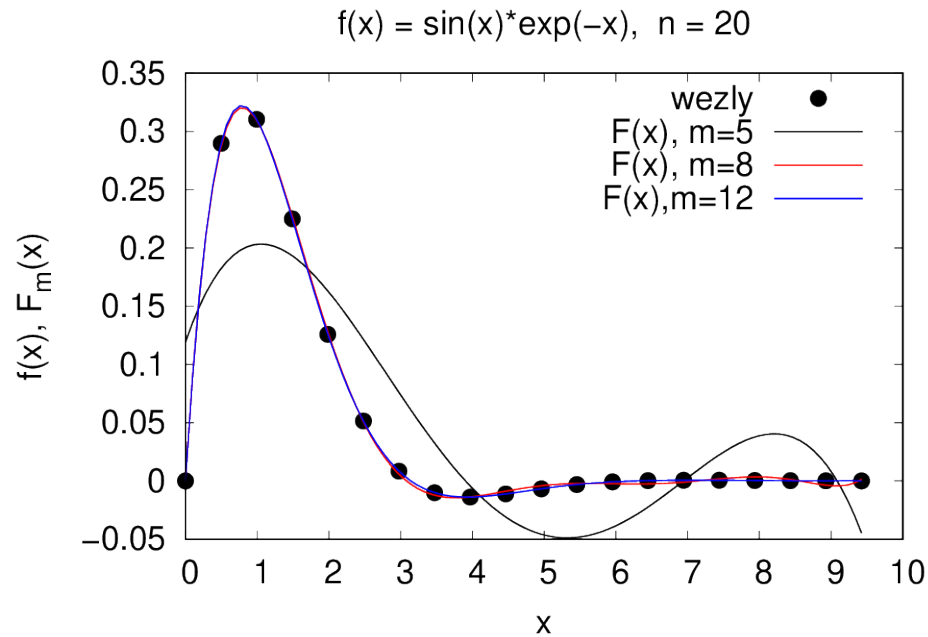
$$C_k = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_k(x_i)$$

$$S_k = \sum_{i=0}^n \varphi_k^2(x_i)$$



# przykład 1: aproksymacja wielomianami Grama funkcji

$$f(x) = \sin(x) \cdot \exp(-x), \quad x = [0, 3\pi], \quad n = 20$$





## Aproksymacja średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych

- funkcje okresowe aproksymujemy przy użyciu funkcji trygonometrycznych, czyli w bazie

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots$$

- wielomian trygonometryczny o okresie  $2\pi$  ma postać:

$$Q_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

- jeśli funkcja  $f(x)$  jest określona na dyskretnym zbiorze równoodległych punktów, a liczba punktów jest parzysta i wynosi  **$2n$** :

$$x_i = \frac{\pi i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \sin(mx_i) \sin(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ N, & m = k \neq 0 \\ 0, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \cos(mx_i) \cos(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ N, & m = k \neq 0 \\ 2N, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \cos(mx_i) \sin(kx_i) = 0$$

$m, k$  - dowolne



Szukamy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^m [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)], \quad m < N$$

Współczynniki  $a_j$  oraz  $b_j$  wyznacza się z warunku minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} [f(x_i) - F(x_i)]^2 = \min$$

co prowadzi do zależności na współczynniki

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i)$$

$$\begin{aligned} a_{j>0} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \cos(jx_i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \cos \frac{\pi i j}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \sin(jx_i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \sin \frac{\pi i j}{N} \end{aligned}$$

## Dobór bazy funkcyjnej

- nierzadko zależy nam na dopasowaniu do danych pomiarowych określonej zależności funkcyjnej (np. wynikającej z zasady działania danego urządzenia pomiarowego lub spodziewanego rozwiązania z modelu teoretycznego)
- często stosuje się poniższe upraszczające formuły aproksymacyjne:

$$y = ax^b + c$$

$$y = e^{ax^2+bx+c}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^b e^{cx}$$

naszym zadaniem jest znalezienie współczynników:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ....

## Aproksymacja Padego

- funkcję aproksymowaną przybliżamy funkcją wymierną tj. ilorazu dwóch wielomianów

$$R_{n,k}(x) = \frac{L_n(x)}{M_k(x)}$$

gdzie:  $N=n+k$

- zaletą powyższego przybliżenia (w problemie aproksymacji jednostajnej) są mniejsze błędy niż aproksymacja wielomianem stopnia  $N$  (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina)
- zadanie polega na znalezieniu  $N+1$  współczynników  $L_n$  oraz  $M_k$

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$M_k(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k, \quad b_0 \neq 0$$

tak aby w  $x_0=0$  funkcje aproksymowana i aproksymująca miały jak najwięcej równych pochodnych

Rozwijamy  $f(x)$  w szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Liczymy **błąd aproksymacji** (w celu otrzymania zależności współczynników  $a_i$  oraz  $b_i$ )

$$f(x) - \frac{L_n(x)}{M_k(x)} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^k b_i x^i}$$

Wykorzystujemy warunki z ciągłością pochodnych w  $x=0$

$$f^{(m)}(x) \Big|_{x=0} - R_{n,k}^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k+n$$

Powyższy warunek będzie spełniony, gdy licznik zapiszemy jako

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{j=1}^{\infty} d_{N+j} x^{N+j}$$

$$N = n + k$$

- dla warunku

$$f(0) - R_{n,k} = 0$$

dostajemy równanie

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k)(c_0 + c_1x + \dots) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$$

z którego wydobywamy zależności

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

i ostatecznie wzór ogólny

$$a_r = \sum_{j=0}^r c_{r-j}b_j, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

- wykorzystujemy też założenie o równości pochodnych (do rzędu  $n+k+1$ ) co daje dodatkową zależność

$$\sum_{j=0}^k c_{n+k-s-j}b_j = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

Sposób postępowania:

1. Wyznaczamy współczynniki szeregu McLaurina.

Numerycznie dokładnie – tylko przy użyciu liczb dualnych, ilorazy różnicowe są niedokładne.

W niektórych przypadkach (rzadko) możliwe jest wykorzystanie wzoru analitycznego na pochodne.

$$s = 0, 1, 2, \dots, k - 1$$

$$\sum_{j=0}^k c_{n+k-s-j} b_j = 0$$

2. Tworzymy układ równań, którego rozwiązanie to współczynniki  $b_i$

$$j = 0 \rightarrow b_0 = 1$$

$$\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

3. Teraz możemy wyznaczyć kolejno współczynniki  $a_j$

$$a_i = \sum_{j=0}^i c_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

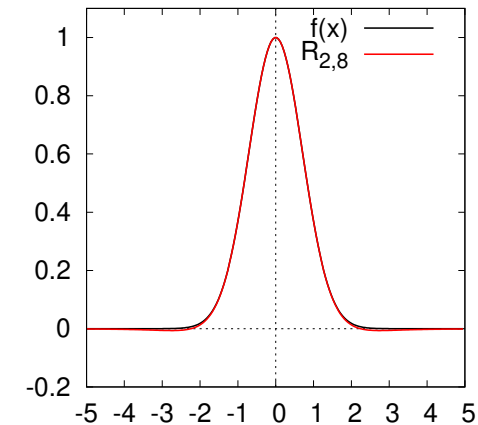
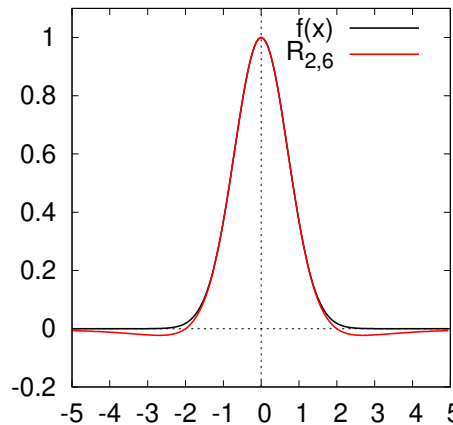
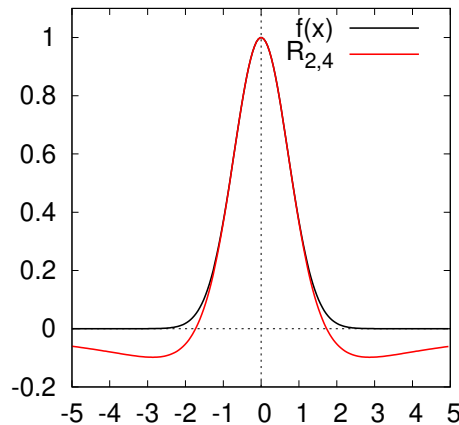
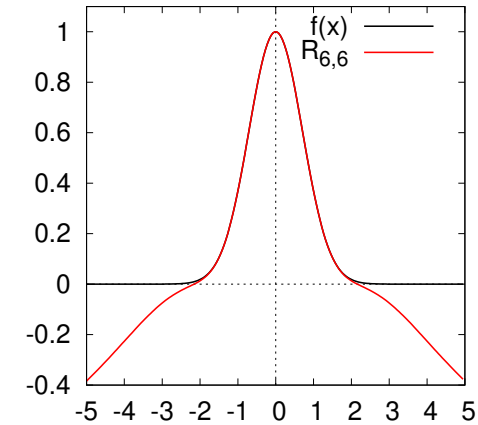
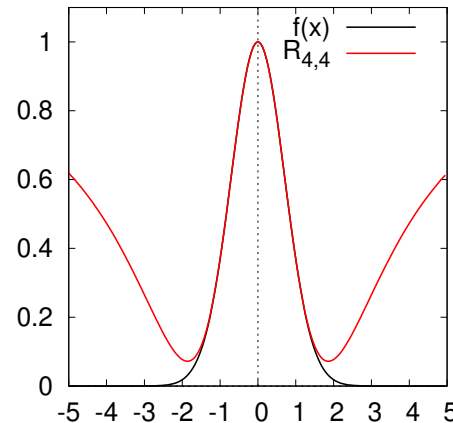
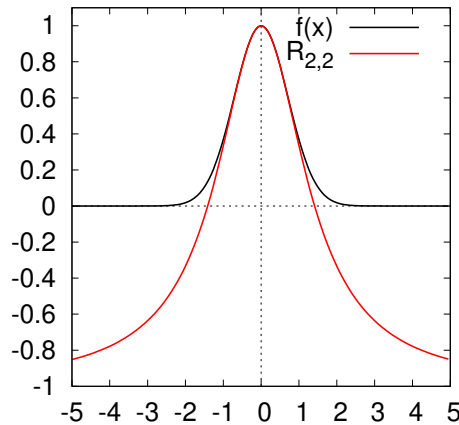
**Przykład** Aproksymacja Pade funkcji

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in [-5, 5]$$

Funkcja jest parzysta, więc wielomiany w liczniku i w mianowniku  $R_{n,k}$  będą miały niezerowe współczynniki tylko przy jednomianach o wykładnikach parzystych.

$$T_{12}\{f(x)\} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}$$

$$R_{6,6}(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{10} - \frac{x^6}{120}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{10} + \frac{x^6}{120}}$$

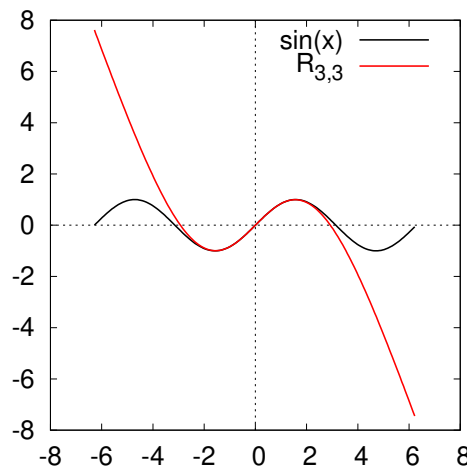


**Przykład** Aproksymacja Pade funkcji

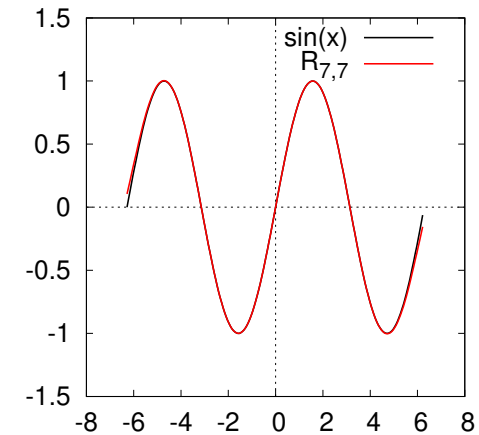
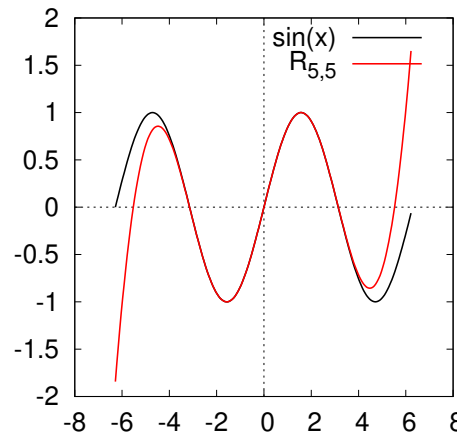
$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

Funkcja aproksymowana jest nieparzysta – niezerowe współczynniki wielmianu L to te stojące przy jednomianach o wykładnikach nieparzystych.

$$R_{3,3}(x) = \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{x^2}{20}}$$



$$R_{5,5}(x) = \frac{x - \frac{53}{396}x^3 + \frac{551}{166320}x^5}{1 + \frac{13}{396}x^2 + \frac{5}{11088}x^4}$$



$$R_{7,7}(x) = \frac{x - \frac{29593}{207636}x^3 + \frac{34911}{7613320}x^5 - \frac{479249}{11511339840}x^7}{1 + \frac{1671}{69212}x^2 + \frac{97}{351384}x^4 + \frac{2623}{1644477120}x^6}$$