

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Tomasz Chwiej

25 kwietnia 2017

Naszym zadaniem będzie napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanых będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

1 Wstęp

Aby rozwiązać problem, należy rozwiązać układ równań liniowych (szczegóły na wykładzie)

$$Am = d \quad (1)$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \quad (2)$$

gdzie: m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych $i = 1, 2, \dots, n$).
Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i \quad (3)$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (4)$$

oraz położenia węzłów: x_1, x_2, \dots, x_n i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (5)$$

W projekcie mamy narzucone warunki na drugie pochodne na brzegach, czyli:

$$m_1 = \alpha, \quad m_n = \beta \quad (6)$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań (wykład), przyjmuje on postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (numer podprzedziału: $i - 1$) wyznaczamy według poniższego przepisu:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (8)$$

gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \quad (9)$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \quad (10)$$

2 Zadania do wykonania

1. Napisać procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach. Do procedury należy przekazać: a) wektor z położeniami węzłów **xw**, b) wektor z wartościami funkcji **yw**, c) liczbę węzłów **n**, d) wektor do którego procedura zapisze wartości drugich pochodnych **m**, e) wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach (**alfa** i **beta**)

```
void wyzM(float *xw, float *yw, float *w, int n, float alfa, float beta)
```

Uwaga: węzły indeksujemy od 1 do n.

2. Napisać procedurę do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Część argumentów będzie identyczna jak dla procedury wyzM, ale dodajemy jeszcze aktualną wartość argumentu x [zgodnie z wzorem (8)]:

```
float wyzSx(float *xw, float *yw, float *m, int n, float x){
    znajdź pierwszy podprzedział (i-1):    xw[i-1] <= x <= xw[i]
    sx=.....
    return sx;
}
```

3. Napisać program do interpolacji funkcjami sklejanymi, który będzie korzystał z dwóch powyższych procedur. Przy użyciu swojego programu przeprowadzić interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (11)$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \quad (12)$$

Przyjąć warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji ($\alpha = \beta = 0$).

4. Dla funkcji $f_1(x)$ oraz $n = 10$ węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$ należy wyznaczyć wartości drugich pochodnych i porównać je z "dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (13)$$

Przyjąć $\Delta x = 0.01$. Wykonać wykres wartości drugich pochodnych w zależności od położenia węzłów pokazujący porównanie obu sposobów obliczania drugich pochodnych.

5. Wykonać interpolację dla $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$, dla liczby węzłów: $n = 5, 8, 21$. Sporządzić wykresy funkcji interpolowanej $[f(x)]$ i interpolującej $[s(x)]$ dla każdego przypadku na jednym rysunku.